ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов

В статье рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается линейными функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа, а показатель качества состоит из двух слагаемых: первое оценивает историю движения системы, сформировавшуюся к терминальному моменту времени, второе представляет собой интегрально-квадратичную оценку соответствующих реализаций управлений игроков. Для вычисления цены и построения оптимальных законов управления в этой дифференциальной игре предлагается подход, основанный на решении подходящей вспомогательной дифференциальной игры, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается уже при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества содержит оценку движения только в терминальный момент времени. Для нахождения цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре используется так называемый метод выпуклых сверху оболочек, который в рассматриваемом случае в силу определенной структуры показателя качества и геометрических ограничений на управляющие воздействия игроков приводит к эффективному решению. Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется на примере, представлены результаты численных экспериментов. При этом построенные оптимальные законы управления сравниваются с разработанными авторами ранее процедурами оптимального управления с конечномерными аппроксимирующими поводырями.

Ключевые слова: дифференциальные игры, системы нейтрального типа, оптимальные стратегии управления, численные методы.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems.

The paper deals with a zero-sum differential game, in which the dynamic of a conflict-controlled system is described by linear functional differential equations of neutral type and the quality index is the sum of two terms: the first term estimates the history of motion of the system realized by the terminal time, and the second term is an integral–quadratic estimation of the corresponding realizations of the players' controls. To calculate the value and construct the optimal control laws in this differential game, we propose an approach based on solving a suitable auxiliary differential game, in which the motion of a conflict-controlled system is described by ordinary differential equations and the quality index contains an estimation of the motion at the terminal time only. To find the value and the saddle point in the auxiliary differential game, we apply the so-called upper convex hull method, which leads to an effective solution in the case under consideration due to the specific structure of the quality index and the geometric constraints on the control actions of the players. The efficiency of the approach is illustrated by an example, and the results of numerical simulations are presented. The constructed optimal control laws are compared with the optimal control procedures with finite-dimensional approximating guides, which were developed by the authors earlier.

Keywords: differential games, neutral-type systems, optimal control strategies, numerical methods.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-75-87

Введение

В статье в рамках позиционного подхода [1–5] рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух лиц. Движение конфликтно-управляемой системы описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа. Показатель качества состоит из двух слагаемых: первое оценивает историю движения системы, сформировавшуюся к терминальному моменту времени, второе представляет собой интегрально-квадратичную оценку реализаций управлений игроков. Дифференциальная игра формализуется в

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 15-11-10018).

классах чистых позиционных стратегий [6]. Ставится задача о вычислении цены и построении оптимальных законов управления в этой дифференциальной игре.

Для решения задачи предлагается подход, основанный на ее сведении к нахождению цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается уже при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества содержит оценку движения только в терминальный момент времени. Сведение базируется на функциональной трактовке процесса управления [7] и опирается на конструкции конечномерных информационных образов, состоящих из специальных прогнозов движения. Для нахождения цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре используется так называемый метод выпуклых сверху оболочек [3; 8]. В силу определенной структуры рассматриваемого показателя качества и геометрических ограничений на управляющие воздействия игроков требуемые выпуклые сверху оболочки функций удается [3, § 29; 9] построить в явном виде. Как следствие, метод оказывается эффективным даже при больших размерностях фазового вектора во вспомогательной игре. Ранее такой подход применялся для решения дифференциальных игр и задач динамической оптимизации гарантии в системах с запаздыванием по состоянию [10] и/или по управлению [11; 12]. Таким образом, настоящая работа продолжает эти исследования, развивая их для динамических систем нейтрального типа.

Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется на примере, приводятся результаты численных экспериментов. При этом, следуя [13], конструкции оптимальных законов управления сравниваются с процедурами оптимального управления исходной системой с использованием конечномерных аппроксимирующих поводырей [14].

1. Постановка задачи

Пусть движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t) - A_\tau(t)x(t-\tau)\big) = A(t)x(t) + A_h(t)x(t-h) + B(t)u(t) + C(t)v(t),\\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^s,\end{gathered} \tag{1.1}$$

задано начальное условие

$$x(t_0 + \xi) = \varphi_0(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \tag{1.2}$$

и показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = \bigg(\int\limits_{\vartheta-h}^{\vartheta} \|x(t)\|^2 \mathrm{d}t\bigg)^{1/2} + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t)\rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t)\rangle\big)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Здесь t — текущее время, $x(t)$ — значение фазового вектора в момент времени t, $u(t)$ и $v(t)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; P и Q — заданные компактные множества; $\tau > 0$ и $h > 0$ — постоянные величины запаздываний (для определенности полагаем, что $h \geqslant \tau$); t_0 и ϑ — начальный и терминальный моменты промежутка времени управления; матрицы $A(t)$, $A_h(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ непрерывны на $[t_0, \vartheta]$; матрица $A_\tau(t)$ удовлетворяет условиям

$$\|A_\tau(t)\| < 1, \quad \|A_\tau(t) - A_\tau(\xi)\| \leqslant K|t - \xi|, \quad K = \mathrm{const} > 0, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \xi \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.4}$$

Имеет место включение $\varphi_0(\cdot) \in \mathrm{Lip}$, где через Lip обозначено множество функций $\varphi(\cdot)$ из $[-h, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, каждая из которых с некоторой своей константой Липшица $L > 0$ удовлетворяет условию $\|\varphi(t) - \varphi(\xi)\| \leqslant L|t - \xi|$, $t \in [-h, 0]$, $\xi \in [-h, 0]$. Матрицы $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ являются симметричными, непрерывно меняются на $[t_0,\vartheta]$, при этом квадратичные формы $\langle u,\Phi(t)u\rangle$ и $\langle v,\Psi(t)v\rangle$ положительно определены. Символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора и согласованную с ней норму матрицы, а символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов.

Для динамической системы (1.1), начального условия (1.2) и показателя качества (1.3) рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой первый игрок нацелен на минимизацию показателя качества, а цель второго игрока, соответственно, противоположна.

З а м е ч а н и е 1. При сделанных предположениях дифференциальная игра (1.1)–(1.3) удовлетворяет всем требованиям из работы [6]. Таким образом, к ней, в частности, применимы все результаты, полученные в этой работе в общем нелинейном случае. Однако следует отметить, что в линейном случае, являющемся предметом исследования в настоящей статье, часть из указанных выше условий может быть ослаблена. Например, можно отказаться от, вообще говоря, обременительного условия $\|A_\tau(t)\|<1$ (см. замечание 2).

Всякую пару $(t,\varphi(\cdot))\in G=[t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$ будем называть позицией системы (1.1), имея в виду, что функция $\varphi(\cdot)$ определяет историю движения системы на отрезке времени $[t-h,t]$, так что $x(t+\xi)=\varphi(\xi)$, $\xi\in[-h,0]$. Пусть выбрана позиция $(t_*,\varphi_*(\cdot))\in G$. Допустимыми реализациями управлений игроков на промежутке $[t_*,\vartheta)$ считаем измеримые функции $u: [t_*,\vartheta)\to P$ и $v:[t_*,\vartheta)\to Q$, для которых, следуя [2], будем использовать обозначения $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ соответственно. Из позиции $(t_*,\varphi_*(\cdot))$ пара таких реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ единственным образом порождает [6] (см. также [15, Ch. 9, Theorem 1.1; 16, Theorem 1] для линейного случая) движение $x[t_*-h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) — абсолютно непрерывную функцию $x:[t_*-h,\vartheta]\to\mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условию $x(t_*+\xi)=\varphi_*(\xi)$, $\xi\in[-h,0]$, и вместе с $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при почти всех $t\in[t_*,\vartheta]$. Отметим, что для реализующихся вдоль этого движения позиций $(t,x_t(\cdot))$, где $x_t(\xi)=x(t+\xi)$, $\xi\in[-h,0]$, справедливо включение $(t,x_t(\cdot))\in G$, $t\in[t_*,\vartheta]$.

Формализация дифференциальной игры (1.1)–(1.3) проводится в классах чистых позиционных стратегий игроков по схеме из работы [6]. Согласно результатам этой работы в рассматриваемой игре (1.1)–(1.3) существуют цена $\rho^0=\rho^0(t_0,\varphi_0(\cdot))$ и оптимальные стратегии управления игроков $U^0(t,\varphi(\cdot),\varepsilon)\in P$ и $V^0(t,\varphi(\cdot),\varepsilon)\in Q$, $(t,\varphi(\cdot))\in G$, $\varepsilon>0$, составляющие седловую точку $\{U^0(\cdot),V^0(\cdot)\}$ этой игры.

В частности, это означает следующее: для любого числа $\zeta>0$ можно указать такие число $\varepsilon_*>0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon)>0$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$, что, каковы бы ни были число $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$, число $\delta\in(0,\delta_*(\varepsilon)]$ и разбиение

$$\Delta_\delta=\bigl\{t_j:\,t_1=t_0,\,0<t_{j+1}-t_j\leqslant\delta,\,j=\overline{1,k},\,t_{k+1}=\vartheta\bigr\} \tag{1.5}$$

промежутка времени управления $[t_0,\vartheta]$, имеют место следующие утверждения.

С одной стороны, пошаговый закон управления первого игрока $\{U^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию управления первого игрока по правилу

$$u(t)=U^0(t_j,x_{t_j}(\cdot),\varepsilon),\quad t\in[t_j,t_{j+1}),\quad x_{t_j}(\xi)=x(t_j+\xi),\quad \xi\in[-h,0],\quad j=\overline{1,k},$$

при любой допустимой реализации управления второго игрока $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ обеспечивает для соответствующего значения γ показателя качества (1.3) выполнение неравенства

$$\gamma\leqslant\rho^0+\zeta. \tag{1.6}$$

С другой стороны, закон управления второго игрока $\{V^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$, который формирует кусочно-постоянную реализацию управления второго игрока

$$v(t)=V^0(t_j,x_{t_j}(\cdot),\varepsilon),\quad t\in[t_j,t_{j+1}),\quad x_{t_j}(\xi)=x(t_j+\xi),\quad \xi\in[-h,0],\quad j=\overline{1,k},$$

при любой допустимой реализации управления первого игрока $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\gamma\geqslant\rho^0-\zeta. \tag{1.7}$$

Основным результатом настоящей работы является эффективный метод для приближенного вычисления цены ρ^0 дифференциальной игры (1.1)–(1.3) и построения оптимальных законов управления первого и второго игроков, которые с наперед заданной точностью $\zeta > 0$ гарантируют выполнение неравенств (1.6) и (1.7) соответственно.

В следующем разделе в качестве предварительных построений проводится аппроксимация показателя качества (1.3), и решение дифференциальной игры (1.1)–(1.3) сводится к нахождению цены и оптимальных стратегий в дифференциальной игре для исходной динамической системы (1.1), заданного начального условия (1.2) и аппроксимирующего показателя качества.

2. Аппроксимация показателя качества

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$, положим

$$\Delta h = h/m, \quad \vartheta_i = \vartheta - h + i\Delta h, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

и рассмотрим дифференциальную игру для системы (1.1), начального условия (1.2) и показателя качества

$$\gamma^{(m)} = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x(\vartheta_i)\|^2 \Delta h \right)^{1/2} + \int_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t) u(t) \rangle - \langle v(t), \Psi(t) v(t) \rangle \big) \mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

аппроксимирующего исходный показатель (1.3). Цену и седловую точку в этой игре обозначим соответственно через $\rho^{(m)} = \rho^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot))$ и $\{U^{(m)}(\cdot), V^{(m)}(\cdot)\}$.

Утверждение 1. *Для любого числа $\zeta > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для любого натурального $m \geqslant M$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Выполняется неравенство*

$$|\rho^0 - \rho^{(m)}| \leq \zeta.$$

2. *Существуют такие число $\varepsilon^{(m)} > 0$ и функция $\delta^{(m)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(m)}]$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(m)}]$, $\delta \in (0, \delta^{(m)}(\varepsilon)]$ и Δ_δ из (1.5), с одной стороны, закон управления $\{U^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ первого игрока гарантирует неравенство (1.6) какова бы ни была допустимая реализация $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ управления второго игрока, а с другой стороны, закон управления $\{V^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ второго игрока обеспечивает неравенство (1.7) при любой допустимой реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ управления первого игрока.*

Доказательство утверждения 1 может быть проведено по схеме из [8]. □

В соответствии с этим утверждением вычисление цены и построение оптимальных законов управления в исходной дифференциальной игре с показателем качества (1.3) сводятся к вычислению цены и построению оптимальных стратегий в дифференциальной игре с аппроксимирующим показателем качества (2.2) при достаточно больших значениях m.

Решение дифференциальной игры (1.1), (1.2), (2.2) основывается на использовании подходящего информационного образа позиции $(t, \varphi(\cdot)) \in G$ системы (1.1), который составляется из специальных прогнозов движения этой системы на каждый из моментов времени ϑ_i из показателя (2.2).

3. Информационный образ

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и позицию $(t_*, \varphi_*(\cdot)) \in G$. Прежде чем определить информационный образ этой позиции, проведем следующие вспомогательные построения.

Рассмотрим движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденное из позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ парой допустимых реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta)$, $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ управлений игроков. Для этого движения справедливо представление:

$$x(t) = \big(F(t,t_*) - F(t,t_*+\tau)A_\tau(t_*+\tau)\big)\varphi_*(0) + \int\limits_{t_*}^{t_*+\tau} F(t,\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big(A_\tau(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - \tau)\big)\mathrm{d}\xi$$

$$+ \int\limits_{t_*}^{t_*+h} F(t,\xi)A_h(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - h)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{t_*}^{t} F(t,\xi)\big(B(\xi)u(\xi) + C(\xi)v(\xi)\big)\mathrm{d}\xi, \quad t \in [t_*, \vartheta]. \qquad (3.3)$$

Здесь матрица $F(t,s)$ при фиксированном $s \in [t_0, \vartheta + h]$ удовлетворяет условиям

$$F(t,s) = 0, \quad t \in [t_0 - h, s), \quad F(s,s) = E, \qquad (3.4)$$

где E — единичная матрица, и при этом является кусочно-непрерывным справа решением интегрального уравнения

$$F(t,s) = E + A_\tau(t)F(t-\tau,s) + \int\limits_{s}^{t} A(\xi)F(\xi,s)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{s+h}^{t} A_h(\xi)F(\xi - h, s)\mathrm{d}\xi, \quad t \in [s, \vartheta]. \qquad (3.5)$$

С другой стороны, при каждом фиксированном $t \in [t_0, \vartheta]$ эту матрицу можно определить как кусочно-непрерывное слева решение интегрального уравнения

$$F(t,s) = E + F(t,s+\tau)A_\tau(s+\tau) + \int\limits_{s+\tau}^{t} F(t,\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}A_\tau(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+ \int\limits_{s+h}^{t} F(t,\xi)A_h(\xi)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{s}^{t} F(t,\xi)A(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad s \in [t_0, t], \qquad (3.6)$$

при условиях

$$F(t,s) = 0, \quad s \in (t, \vartheta + h], \quad F(t,t) = E. \qquad (3.7)$$

Существование и единственность решения задачи (3.4), (3.5), эквивалентность такого определения матрицы $F(t,s)$ ее определению как единственного решения задачи (3.6), (3.7) и справедливость формулы (3.3) могут быть выведены из результатов [17, Theorem 2.4, Lemmas 2.1, 2.2] с учетом конкретного вида системы (1.1). Тем не менее отметим, что доказательство существования и единственности кусочно-непрерывных решений интегральных уравнений (3.5) и (3.6) с кусочно-непрерывными начальными условиями (3.4) и (3.7) может быть проведено по аналогии с доказательством существования и единственности решения исходного уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2), например по схеме из [16, Theorem 1], а справедливость формулы (3.3) и эквивалентность приведенных двух определений матрицы $F(t,s)$ могут быть проверены непосредственно. Отметим также, что соотношение (3.5) используется в данной работе при обосновании устанавливаемых утверждений, а соотношение (3.6) — при численной реализации развиваемых конструкций.

Для позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ и момента времени ϑ_i, $i = \overline{1,m}$, из показателя (2.2) определим вектор $w_i(t_*, \varphi_*(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ по следующему правилу. При $t_* < \vartheta_i$ этот вектор определяется как то значение фазового вектора $x(\vartheta_i)$, которое в момент ϑ_i реализуется на движении $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$

системы (1.1), порожденном из позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ нулевыми реализациями управлений игроков $u(t) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$. Таким образом, применяя формулу (3.3), при $t_* < \vartheta_i$ получаем

$$w_i(t_*, \varphi_*(\cdot)) = \big(F(\vartheta_i, t_*) - F(\vartheta_i, t_* + \tau)A_\tau(t_* + \tau)\big)\varphi_*(0)$$
$$+ \int\limits_{t_*}^{t_*+\tau} F(\vartheta_i, \xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big(A_\tau(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - \tau)\big)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{t_*}^{t_*+h} F(\vartheta_i, \xi)A_h(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - h)\mathrm{d}\xi.$$

Если $t_* \geqslant \vartheta_i$, то учитывая, что в этом случае в силу (2.1) имеет место оценка $\vartheta_i > \vartheta - h \geqslant t_* - h$ и, стало быть, $x(\vartheta_i) = \varphi_*(\vartheta_i - t_*)$, полагаем $w_i(t_*, \varphi_*(\cdot)) = \varphi_*(\vartheta_i - t_*)$.

Из векторов $w_i(t_*, \varphi_*(\cdot))$, $i = \overline{1, m}$, составим вектор

$$\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot)) = \big\{w_1(t_*, \varphi_*(\cdot)), w_2(t_*, \varphi_*(\cdot)), \ldots, w_m(t_*, \varphi_*(\cdot))\big\} \in \mathbb{R}^{nm}, \tag{3.8}$$

который назовем информационным образом позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$. Запись в (3.8) означает, что первые n координат вектора $\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot))$ совпадают с координатами вектора $w_1(t_*, \varphi_*(\cdot))$, следующие n координат вектора $\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot))$ совпадают с координатами вектора $w_2(t_*, \varphi_*(\cdot))$ и так далее; последние n координат вектора $\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot))$ совпадают с координатами вектора $w_m(t_*, \varphi_*(\cdot))$.

Определим далее матрицы

$$\widehat{B}^{(m)}(t) = \big\{B_1(t), B_2(t), \ldots, B_m(t)\big\}, \quad \widehat{C}^{(m)}(t) = \big\{C_1(t), C_2(t), \ldots, C_m(t)\big\}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.9}$$

где $B_i(t) = F(\vartheta_i, t)B(t)$, $C_i(t) = F(\vartheta_i, t)C(t)$, $i = \overline{1, m}$. По аналогии с (3.8) запись в (3.9) означает, что первые n строк матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_1(t)$, следующие n строк матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_2(t)$ и так далее; последние n строк матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_m(t)$. Матрица $\widehat{C}^{(m)}(t)$ составляется из матриц $C_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, по такому же правилу.

Непосредственно по построению, если учесть соотношения (3.3)–(3.5), имеет место

Утверждение 2. *Пусть движение $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) порождено из начальной позиции $(t_0, \varphi_0(\cdot))$ (1.2) допустимыми реализациями $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$. Тогда для любого числа $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Для любых $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$ информационные образы позиций $(t_*, x_{t_*}(\cdot))$ и $(t^*, x_{t^*}(\cdot))$, реализовавшихся на этом движении, связаны соотношением*

$$\widehat{w}^{(m)}(t^*, x_{t^*}(\cdot)) = \widehat{w}^{(m)}(t_*, x_{t_*}(\cdot)) + \int\limits_{t_*}^{t^*} \big(\widehat{B}^{(m)}(\xi)u(\xi) + \widehat{C}^{(m)}(\xi)v(\xi)\big)\mathrm{d}\xi.$$

2. *В терминальный момент времени ϑ выполняется равенство*

$$\widehat{w}^{(m)}(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) = \big\{x(\vartheta_1), x(\vartheta_2), \ldots, x(\vartheta_m)\big\}.$$

В качестве следствия из утверждения 2 получаем, что, во-первых, динамика информационного образа $\widehat{w}^{(m)}(t, x_t(\cdot))$ в силу движения $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) описывается уравнением

$$\mathrm{d}\widehat{w}^{(m)}(t, x_t(\cdot))/\mathrm{d}t = \widehat{B}^{(m)}(t)u(t) + \widehat{C}^{(m)}(t)v(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.10}$$

а во-вторых, аппроксимирующий показатель качества (2.2) может быть записан в виде

$$\gamma^{(m)} = \sqrt{\Delta h}\, \|\widehat{w}^{(m)}(\vartheta, x_\vartheta(\cdot))\| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t)\rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t)\rangle\big)\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Соотношения (3.10) и (3.11) определяют вспомогательную дифференциальную игру, которая рассматривается в следующем разделе.

4. Вспомогательная дифференциальная игра

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим вспомогательную дифференциальную игру, в которой движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\mathrm{d}\widehat{z}^{(m)}(t)/\mathrm{d}t = \widehat{B}^{(m)}(t)u(t) + \widehat{C}^{(m)}(t)v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad \widehat{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^{nm}, \quad u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \tag{4.1}$$

начальное условие определяется по правилу

$$\widehat{z}^{(m)}(t_0) = \widehat{z}_0^{(m)} = \widehat{w}^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot)) \tag{4.2}$$

и показатель качества имеет вид

$$\widehat{\gamma}^{(m)} = \sqrt{\Delta h}\, \|\widehat{z}^{(m)}(\vartheta)\| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t)\rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t)\rangle\big)\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Здесь матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ и $\widehat{C}^{(m)}(t)$ определяются в соответствии с соотношением (3.9); $\widehat{w}^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot))$ — информационный образ (3.8) начальной позиции $(t_0, \varphi_0(\cdot))$ (1.2).

Подчеркнем, что в отличие от исходной дифференциальной игры (1.1)–(1.3) во вспомогательной дифференциальной игре движение динамической системы (4.1) описывается уже обыкновенным дифференциальным уравнением, а показатель качества (4.3) зависит от значения фазового вектора $\widehat{z}^{(m)}(\vartheta)$ этой системы только в терминальный момент времени ϑ.

Согласно [2, теорема 29.2, § 32] дифференциальная игра (4.1)–(4.3) имеет цену $\widehat{\rho}^{(m)} = \widehat{\rho}^{(m)}(t_0, \widehat{z}_0^{(m)})$ и седловую точку $\{u^{(m)}(\cdot), v^{(m)}(\cdot)\}$, состоящую из оптимальных чистых позиционных стратегий $u^{(m)}(t, \widehat{z}^{(m)}, \varepsilon) \in P$ и $v^{(m)}(t, \widehat{z}^{(m)}, \varepsilon) \in Q$, $(t, \widehat{z}^{(m)}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{nm}$, $\varepsilon > 0$.

Утверждение 3. *Для любого числа $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Цены $\rho^{(m)}$ и $\widehat{\rho}^{(m)}$ в дифференциальных играх* (1.1), (1.2), (2.2) *и* (4.1)–(4.3) *совпадают:*

$$\rho^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot)) = \widehat{\rho}^{(m)}\big(t_0, \widehat{w}^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot))\big).$$

2. *Стратегии управления игроков*

$$\begin{gathered} U_*^{(m)}(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = u^{(m)}\big(t, \widehat{w}^{(m)}(t, \varphi(\cdot)), \varepsilon\big), \quad V_*^{(m)}(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = v^{(m)}\big(t, \widehat{w}^{(m)}(t, \varphi(\cdot)), \varepsilon\big), \\ (t, \varphi(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0, \end{gathered} \tag{4.4}$$

являются оптимальными в дифференциальной игре (1.1), (1.2), (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения 3 устанавливается по схеме из [12, теорема 2.1] с опорой на утверждение 2. □

З а м е ч а н и е 2. Упомянутая схема доказательства не использует вытекающий из результатов работы [6] факт о том, что в дифференциальной игре (1.1), (1.2), (2.2) существуют цена и седловая точка: этот факт устанавливается по ходу доказательства. Таким образом, предложенные конструкции информационного образа (3.8) и соответствующая вспомогательная дифференциальная игра (4.1)–(4.3) могут быть применены для непосредственного доказательства существования цены и седловой точки в игре (1.1), (1.2), (2.2), а следовательно, если учесть утверждение 1, и в исходной игре (1.1)–(1.3). Кроме того, можно показать, что такой подход, опирающийся на линейность исходной системы (1.1), останется работоспособным и в случае, когда матрица $A_\tau(t)$ не удовлетворяет первому из условий в (1.4) и результаты работы [6] неприменимы.

З а м е ч а н и е 3. Развитые в настоящей работе конструкции по сведению дифференциальной игры (1.1), (1.2), (2.2) к вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3) не используют специфики показателя (2.2). Принципиальным является то, что этот показатель зависит только от конечного числа значений фазового вектора системы в зафиксированные моменты времени.

В согласии с утверждениями 1 и 3 вычисление цены и построение оптимальных законов управления в исходной дифференциальной игре (1.1)–(1.3) сводятся к нахождению цены и оптимальных стратегий во вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3) при достаточно больших значениях m. С точки зрения численной реализации соответствующих разрешающих процедур основным недостатком при этом является большая размерность nm фазового вектора во вспомогательной игре (4.1)–(4.3). Однако в случае, когда множества P и Q, задающие геометрические ограничения на управляющие воздействия игроков, «достаточно велики», предложенные конструкции приводят к эффективному решению.

А именно предположим, что справедливы включения

$$\big\{u \in \mathbb{R}^r : \|u\| \leqslant R\big\} \subset P, \quad \big\{v \in \mathbb{R}^s : \|v\| \leqslant R\big\} \subset Q, \tag{4.5}$$

причем число $R > 0$ удовлетворяет условиям

$$\|\Phi^{-1}(t) B^T(t) F^T(\xi, t)\| \leqslant 2R, \quad \|\Psi^{-1}(t) C^T(t) F^T(\xi, t)\| \leqslant 2R, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \xi \in [\vartheta - h, \vartheta],$$

где матрица $F(\xi, t)$ определяется согласно (3.4), (3.5), верхние символы $^{-1}$ и ^{T} обозначают взятие обратной матрицы и транспонирование соответственно. Тогда в силу (3.9) для любого числа $m \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства $\|\Phi^{-1}(t) \widehat{B}^{(m)T}(t)\| \leqslant 2R$, $\|\Psi^{-1}(t) \widehat{C}^{(m)T}(t)\| \leqslant 2R$, $t \in [t_0, \vartheta]$, и, стало быть, с учетом вида показателя качества (4.3) можно считать [2, §34; 3, §29], что во вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3) геометрические ограничения на управляющие воздействия игроков отсутствуют: $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^s$. В этом случае решение вспомогательной игры (4.1)–(4.3) даже при относительно большой размерности фазового вектора может быть эффективно найдено при помощи метода выпуклых сверху оболочек. Подробное описание этого метода применительно к дифференциальной игре вида (4.1)–(4.3), а также репрезентативные формулы для цены и оптимальных стратегий игроков можно найти, например, в [3, § 29] (см. также [9; 13, Sec. 3]).

В разд. 6 предложенный подход к решению дифференциальной игры (1.1)–(1.3) иллюстрируется на модельном примере. При этом по аналогии с [13] разработанные конструкции оптимальных законов управления сравниваются с процедурами управления системой (1.1), основанными на использовании конечномерных аппроксимирующих систем в качестве поводырей [14]. В следующем разделе эти процедуры описываются с учетом конкретного вида системы (1.1) и показателя качества (1.3).

5. Управление с конечномерным поводырем

Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 2$ и в соответствии с (2.1) определим число Δh, при этом для простоты формул будем считать, что $l = \tau/\Delta h \in \mathbb{N}$. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую динамической системой

$$\begin{cases} \mathrm{d}y^{[0]}(t)/\mathrm{d}t = A(t)y^{[0]}(t) + A_h(t)y^{[m]}(t) + B(t)\widetilde{u}(t) + C(t)\widetilde{v}(t), & t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \\ \mathrm{d}y^{[1]}(t)/\mathrm{d}t = \big(y^{[0]}(t) + A_\tau(t)y^{[l]}(t) - y^{[1]}(t)\big)/\Delta h, & y^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \\ \mathrm{d}y^{[i]}(t)/\mathrm{d}t = \big(y^{[i-1]}(t) - y^{[i]}(t)\big)/\Delta h, \quad i = \overline{2, m}, & \widetilde{u} \in P, \quad \widetilde{v} \in Q, \end{cases} \tag{5.1}$$

начальным условием

$$y^{[0]}(t_0) = y_0^{[0]} = \varphi_0(0) + A_\tau(t_0)\varphi_0(-l\Delta h), \quad y^{[i]}(t_0) = y_0^{[i]} = \varphi_0(-i\Delta h), \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.2}$$

и показателем качества

$$\widetilde{\gamma}^{(m)} = \bigg(\sum_{i=1}^{m} \|y^{[i]}(\vartheta)\|^2 \Delta h\bigg)^{1/2} + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle \widetilde{u}(t), \Phi(t)\widetilde{u}(t)\rangle - \langle \widetilde{v}(t), \Psi(t)\widetilde{v}(t)\rangle\big)\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

В соответствии с [2, теорема 29.2] эта игра имеет цену $\widetilde{\rho}^{(m)} = \widetilde{\rho}^{(m)}(t_0, y_0^{[0]}, y_0^{[1]}, \ldots, y_0^{[m]})$ и седловую точку $\{\widetilde{u}^{(m)}(\cdot), \widetilde{v}^{(m)}(\cdot)\}$, которая состоит из оптимальных чистых позиционных стратегий $\widetilde{u}^{(m)}(t, y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[m]}, \varepsilon) \in P$ и $\widetilde{v}^{(m)}(t, y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[m]}, \varepsilon) \in Q$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $y^{[i]} \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, m}$, $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ_δ (1.5). Следуя [14], рассмотрим процедуру формирования управлений игроков в исходной дифференциальной игре (1.1)–(1.3) с использованием аппроксимирующей системы (5.1) в качестве моделирующего поводыря. С учетом наличия интегральных слагаемых в показателях качества (1.3) и (5.3), обозначая

$$\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \big(\langle u(\xi), \Phi(\xi) u(\xi)\rangle - \langle v(\xi), \Psi(\xi) v(\xi)\rangle\big) \mathrm{d}\xi$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \big(\langle \widetilde{u}(\xi), \Phi(\xi) \widetilde{u}(\xi)\rangle - \langle \widetilde{v}(\xi), \Psi(\xi) \widetilde{v}(\xi)\rangle\big) \mathrm{d}\xi, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{5.4}$$

для первого игрока имеем

$$\begin{aligned} u(t) = u_j &\in \operatorname*{argmin}_{u \in P} \big(\langle B(t_j) u, x(t_j) - A_\tau(t_j) x(t_j - \tau) - y^{[0]}(t_j)\rangle + \langle u, \Phi(t_j) u\rangle \alpha(t_j)\big), \\ \widetilde{v}(t) = \widetilde{v}_j &\in \operatorname*{argmax}_{\widetilde{v} \in Q} \big(\langle C(t_j) \widetilde{v}, x(t_j) - A_\tau(t_j) x(t_j - \tau) - y^{[0]}(t_j)\rangle - \langle \widetilde{v}, \Psi(t_j) \widetilde{v}\rangle \alpha(t_j)\big), \\ \widetilde{u}(t) &= \widetilde{u}^{(m)}\big(t_j, y^{[0]}(t_j), y^{[1]}(t_j), \ldots, y^{[m]}(t_j), \varepsilon\big), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока получаем:

$$\begin{aligned} v(t) = v_j &\in \operatorname*{argmax}_{v \in Q} \big(\langle C(t_j) v, y^{[0]}(t_j) - x(t_j) + A_\tau(t_j) x(t_j - \tau)\rangle - \langle v, \Psi(t_j) v\rangle \alpha(t_j)\big), \\ \widetilde{u}(t) = \widetilde{u}_j &\in \operatorname*{argmin}_{\widetilde{u} \in P} \big(\langle B(t_j) \widetilde{u}, y^{[0]}(t_j) - x(t_j) + A_\tau(t_j) x(t_j - \tau)\rangle + \langle \widetilde{u}, \Phi(t_j) \widetilde{u}\rangle \alpha(t_j)\big), \\ \widetilde{v}(t) &= \widetilde{v}^{(m)}\big(t_j, y^{[0]}(t_j), y^{[1]}(t_j), \ldots, y^{[m]}(t_j), \varepsilon\big), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{1, k}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Утверждение 4. *Для любого числа $\zeta > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для любого натурального $m \geqslant M$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Выполняется неравенство $|\rho^0 - \widetilde{\rho}^{(m)}| \leq \zeta$.*

2. *Существуют такие число $\widetilde{\varepsilon}^{(m)} > 0$ и функция $\widetilde{\delta}^{(m)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}^{(m)}]$, что для любых $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}^{(m)}]$, $\delta \in (0, \widetilde{\delta}^{(m)}(\varepsilon)]$ и Δ_δ (1.5), с одной стороны, процедура формирования управления первого игрока (5.5) гарантирует неравенство (1.6) при любой допустимой реализации управления $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ второго игрока, а с другой стороны, процедура формирования управления второго игрока (5.6) обеспечивает неравенство (1.7) при любой допустимой реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ управления первого игрока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 4 проводится по схеме, указанной в [13]. □

Отметим, что, как и во вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3), цена $\widetilde{\rho}^{(m)}$ и оптимальные стратегии $\widetilde{u}^{(m)}(\cdot)$ и $\widetilde{v}^{(m)}(\cdot)$ в игре (5.1)–(5.3) могут быть найдены методом выпуклых сверху оболочек [3; 8]. При этом получаемые разрешающие конструкции допускают эффективную реализацию в случае, когда для геометрических ограничений P и Q выполняются включения (4.5), причем число R удовлетворяет неравенствам

$$\|\Phi^{-1}(t) B^T(t) F_m^T(\vartheta, t)\| \leqslant 2R, \quad \|\Phi^{-1}(t) C^T(t) F_m^T(\vartheta, t)\| \leqslant 2R, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где через $F_m(\vartheta, t)$ обозначена матрица Коши системы (5.1).

Подчеркнем, что основное отличие описанного в этом разделе подхода к построению приближенного решения дифференциальной игры (1.1)–(1.3) от конструкций, предложенных в предыдущих разделах, заключается в том, что в согласии с (5.5), (5.6) при формировании управлений на текущем шаге $[t_j, t_{j+1})$ каждому из игроков требуется дополнительная информация о величине $\alpha(t_j)$ (5.4), оценивающей реализации управлений обоих игроков на промежутке $[t_0, t_j)$.

6. Пример

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой движение системы описывается следующим линейным функционально-дифференциальными уравнением нейтрального типа:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t = x_2(t), \\ \mathrm{d}\big(x_2(t) + 0.4x_3(t-0.5) - 0.4(4-t)x_4(t-0.5)\big)/\mathrm{d}t = -2x_1(t) - 0.4x_2(t) \\ \qquad + 0.02x_3(t) - x_1(t-1) - 0.4x_2(t-1) + 0.4x_3(t-1) - x_4(t-1) \\ \qquad + (5-t)u_1(t) + 2v_1(t), \\ \mathrm{d}x_3(t)/\mathrm{d}t = x_4(t), \\ \mathrm{d}\big(x_4(t) + 0.5x_1(t-0.5) - 0.5(2-t)x_4(t-0.5)\big)/\mathrm{d}t = 0.01x_1(t) - x_3(t), \\ \qquad - 0.1x_4(t) - 0.2x_1(t-1) + 0.7x_2(t-1) - 0.4x_3(t-1) + 0.5x_4(t-1) \\ \qquad + (4-0.5t)u_2(t) + 3v_2(t), \end{cases} \tag{6.1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 4, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \quad v_1^2 + v_2^2 \leqslant 9,$$

задано начальное условие

$$x_1(\xi) = \sin(\xi), \quad x_2(\xi) = \cos(\xi), \quad x_3(\xi) = \cos(\xi), \quad x_4(\xi) = -\sin(\xi), \quad \xi \in [-1, 0], \tag{6.2}$$

и показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = \Big(\int_3^4 \big(x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + x_4^2(t)\big)\mathrm{d}t \Big)^{1/2} + \int_0^4 \big(u_1^2(t) + u_2^2(t) - v_1^2(t) - v_2^2(t)\big)\mathrm{d}t. \tag{6.3}$$

Для нахождения цены и построения оптимальных законов управления игроков в дифференциальной игре (6.1)–(6.3) применялись предложенные в работе конструкции.

Вычисления проводились при различных значениях параметров $m \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$ и равномерных разбиениях Δ_δ (1.5) с диаметром $\delta > 0$. При этом моделировались следующие способы формирования управляющих воздействий игроков:

1. Первый и второй игроки используют соответственно законы управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ на базе стратегий $U_*^{(m)}(\cdot)$ и $V_*^{(m)}(\cdot)$ из (4.4).

2. Первый игрок использует закон управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, второй игрок формирует управляющие воздействия на основе процедуры управления с поводырем (5.6).

3. Первый игрок формирует управляющие воздействия на основе процедуры управления с поводырем (5.5), второй игрок использует закон управления $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$.

4. Первый игрок использует закон управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, второй игрок применяет закон управления $\{V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ на базе стратегии

$$V(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = \begin{cases} 1/2\Psi^{-1}(t)C^T(t)\varphi(0)/\|\varphi(0)\|, & \text{если } \varphi(0) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad (t, \varphi(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0.$$

5. Первый игрок применяет закон управления $\{U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ на базе стратегии

$$U(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = \begin{cases} -1/2\Phi^{-1}(t)B^T(t)\varphi(0)/\|\varphi(0)\|, & \text{если } \varphi(0) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad (t, \varphi(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0,$$

второй игрок использует закон управления $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$.

6. Первый игрок использует закон управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, второй игрок выбирает нулевое управление $v(t) \equiv 0$.

7. Первый игрок выбирает нулевое управление $u(t) \equiv 0$, второй игрок использует закон управления $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$.

В таблице приведены полученные результаты. На рис. 1 и 2 изображены движение системы (6.1) и соответствующие реализации управлений игроков при выборе первого и шестого способов формирования управляющих воздействий.

Результаты численного моделирования в дифференциальной игре (6.1)–(6.3)

m	ε	δ	$\rho^{(m)}$	$\widetilde{\rho}^{(m)}$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
10	0.1	0.01	1.844	2.178	1.853	1.388	2.082	0.126	3.189	1.296	10.68
20	0.05	0.005	1.842	2.005	1.845	1.81	1.953	0.12	3.102	1.332	10.597
50	0.02	0.002	1.84	1.905	1.842	1.829	1.885	0.13	3.052	1.36	10.608
100	0.01	0.001	1.839	1.872	1.84	1.834	1.861	0.135	3.036	1.369	10.621

Здесь $\rho^{(m)}$ и $\widetilde{\rho}^{(m)}$ — цены дифференциальных игр (1.1), (1.2), (2.2) и (5.1)–(5.3) соответственно, γ_i — значение показателя качества (6.3), реализовавшееся при выборе i-го способа формирования управляющих воздействий игроков, $i = \overline{1,7}$.

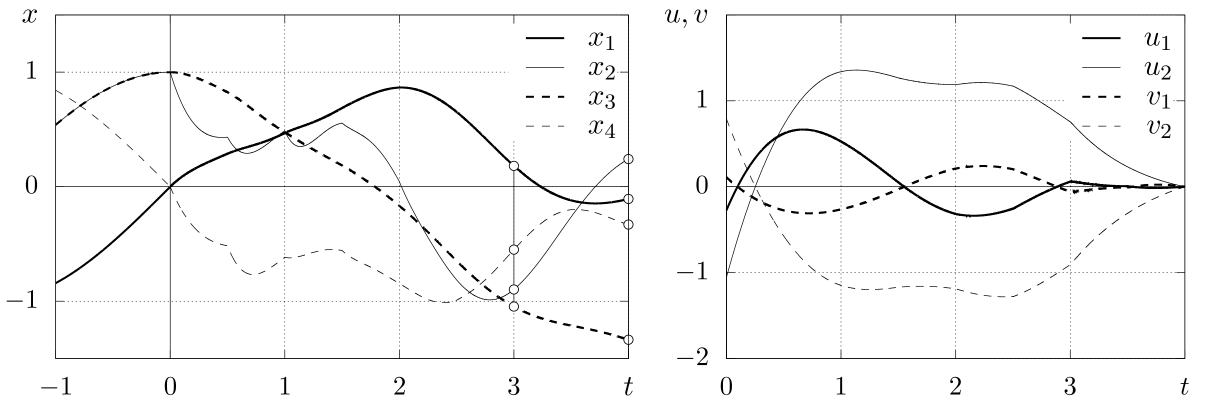

Рис. 1. Движение системы (6.1) и реализации управлений игроков, сформировавшиеся при действии законов управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ (см. (4.4)) при $m = 100$, $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.001$.

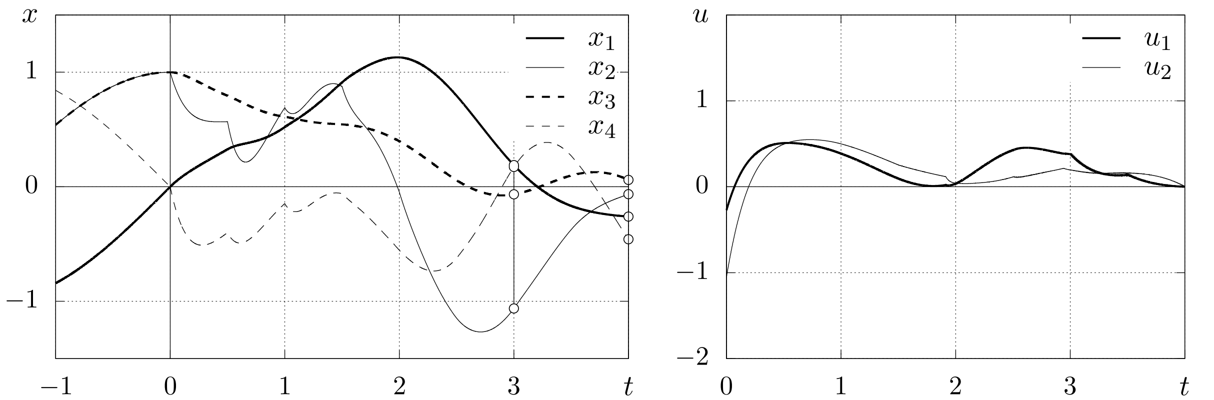

Рис. 2. Движение системы (6.1) и реализация управления первого игрока, сформировавшиеся при действии закона управления первого игрока $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ (см. (4.4)) при $m = 100$, $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.001$ и нулевой реализации управления второго игрока $v(t) \equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С. 1890–1896.
5. **Ушаков В.Н.** К свойству стабильности в игровой задаче о сближении с фиксированным моментом окончания // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1034–1046.
6. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 101–112. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112 .
7. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
9. **Лукоянов Н.Ю.** Об одной дифференциальной игре с интегральным критерием качества // Дифференц. уравнения. 1994. Т 30, № 11. С. 1905–1913.
10. **Лукоянов Н.Ю., Решетова Т.Н.** Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 586–597.
11. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Оптимизация гарантии в функционально-дифференциальных системах с последействием по управлению // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 515–525.
12. **Гомоюнов М.И.** Линейно-выпуклые задачи оптимизации гарантии при запаздывании в управлении // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. Вып. 1(45). С. 37–105.
13. **Gomoyunov M., Plaksin A.** On a problem of guarantee optimization in time-delay systems // IFAC PapersOnLine. 2015. Vol. 48, iss. 25. P. 172–177. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079 .
14. **Лукоянов Н.Ю.** Конечномерные поводыри систем нейтрального типа // Междунар. конф. “Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления”, посвящен. 80-летию акад. Ю.С. Осипова (Москва, 22–23 сентября 2016 г.): тез. докл. С. 67–70.
15. **Hale J.K., Lunel S.M.V.** Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993. 447 p. (Appl. Math. Sci.; vol. 99).
16. **Hale J.K., Meyer K.R.** A class of functional equations of neutral type // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 76. 65 p.
17. **Kent G.A.** Optimal control of functional differential equations of neutral type // Thesis (Ph.D.)–Brown University. Ann Arbor: ProQuest LLC, 1971. 132 p.

Поступила 8.11.2016

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр., профессор
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: nyul@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamic system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information.* Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p.
4. Subbotina N.N. Universal optimal strategies in positional differential games. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896 (in Russian).
5. Ushakov V.N. On the stability property in a game-theoretic approach problem with fixed terminal time. *Diff. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1046–1058. doi: 10.1134/S0012266111070147.
6. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 101–112 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112.
7. Krasovskii N.N. *Stability of motion: Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay.* Stanford: Stanford Univ. Press, 1963, 188 p. This book is a translation, with alterations and additions, of N.N. Krasovskii, *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p.
8. Lukoyanov N.Yu. The problem of computing the value of a differential game for a positional functional. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 177–186.
9. Lukoyanov N.Yu. A differential game with integral performance criterion. *Diff. Equat.*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1759–1766.
10. Lukoyanov N.Yu., Reshetova T.N. Problems of conflict control of high dimensionality functional systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 545–554.
11. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Guarantee optimization in functional-differential systems with a control aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 369–377. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.002.
12. Gomoyunov M.I. Linear-convex guarantee optimization problems with control delay. *Izv. IMI UdGU*, 2015, no. 1(45), pp. 37–105 (in Russian).
13. Gomoyunov M., Plaksin A. On a problem of guarantee optimization in time-delay systems. *IFAC PapersOnLine*, 2015, vol. 48, iss. 25, pp. 172–177. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079.
14. Lukoyanov N.Yu. Finite-dimensional guides of neutral-type systems. *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Dinamicheskie sistemy: obratnye zadachi, ustoichivost' i protsessy upravleniya", posvyashchennaya vos'midesyatiletiyu akademika Yu.S. Osipova, Tezisy dokl.* [Abstr. Internat. Conf., Dynamical Systems: Inverse Problems, Stability, and Control Processes, dedicated to the 80-th birthday of Academician Yu. S. Osipov], Moscow, 2016, pp. 67–70. Available at: http://dynsys2016.cs.msu.ru (in Russian).
15. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993, Ser. Appl. Math. Sci., vol. 99, 447 p.
16. Hale J.K., Meyer K.R. A class of functional equations of neutral type. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 76, 65 p.
17. Kent G.A. Optimal control of functional differential equations of neutral type. *Thesis (Ph.D.)–Brown University*, Ann Arbor: ProQuest LLC, 1971, 132 p.

M. I. Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

N. Yu. Lukoyanov, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: nyul@imm.uran.ru .