

УДК 517.988.68

**ДВУХЭТАПНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ  
АЛГОРИТМОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ<sup>1</sup>****В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина**

Для уравнения с нелинейным дифференцируемым оператором, действующим в гильбертовом пространстве, исследуется двухэтапный метод построения регуляризирующего алгоритма. А именно сначала используется схема регуляризации Лаврентьева, а затем к регуляризованному уравнению применяется метод Ньютона, либо нелинейные аналоги  $\alpha$ -процессов: метод минимальной ошибки, метод минимальной невязки и метод наискорейшего спуска. Для этих процессов устанавливается линейная скорость сходимости и свойство фейеровости итераций. Рассматриваются два случая: оператор задачи является либо монотонным, либо оператор – конечномерный, производная которого имеет неотрицательный спектр. Для двухэтапного метода с монотонным оператором дается оценка погрешности, оптимальная по порядку на классе истокообразно представимых решений. Для второго случая погрешность метода оценивается по невязке. Обсуждаются результаты численного эксперимента при реализации исследуемых методов и их модифицированных аналогов для трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

Ключевые слова: схема регуляризации Лаврентьева, метод Ньютона, нелинейные  $\alpha$ -процессы, двухэтапный метод, обратные задачи гравиметрии и магнитометрии.

V. V. Vasin, A. F. Skurydina. A two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems.

For an equation with a nonlinear differentiable operator acting in a Hilbert space, we study a two-stage method of construction of a regularizing algorithm. First, we use Lavrientiev's regularization scheme. Then, we apply to the regularized equation either Newton's method or nonlinear analogs of  $\alpha$ -processes: the minimum error method, the minimum residual method, and the steepest descent method. For these processes we establish the linear convergence rate and the Fejér property of iterations. Two cases are considered: when the operator of the problem is monotone and when the operator is finite-dimensional and its derivative has nonnegative spectrum. For the two-stage method with a monotone operator, we give an error bound, which has optimal order on the class of sourcewise representable solutions. In the second case, the error of the method is estimated by means of the residual. The proposed methods and their modified analogs are implemented numerically for three-dimensional inverse problems of gravimetry and magnetometry. The results of the numerical experiment are discussed.

Keywords: Lavrentiev regularization scheme, Newton's method, nonlinear  $\alpha$ -processes, two-stage algorithm, inverse gravimetry and magnetometry problems.

MSC: 65J15, 65J20, 45L05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-57-74

**1. Введение**

Рассматривается нелинейное уравнение

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

в гильбертовом пространстве  $U$  с непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором  $A$ , для которого обратные операторы  $A'(u)^{-1}$ ,  $A^{-1}$  разрывны, что влечет некорректность задачи (1.1). Для построения регуляризирующего алгоритма (РА) предлагается двухэтапный метод, предусматривающий на первом этапе использование регуляризации по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{1.2}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00629, 15-01-05984, 16-51-50064).

где  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ ,  $u^0$  — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения  $u_\alpha$  применяются либо регуляризованный метод Ньютона (РМН)

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (1.3)$$

либо нелинейные аналоги  $\alpha$ -процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \quad (1.4)$$

при  $\varkappa = -1, 0, 1$ . Здесь  $\alpha, \bar{\alpha}$  — положительные параметры регуляризации,  $\gamma > 0$  — демпфирующий множитель (параметр шага),  $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$ .

Предполагается, что либо оператор  $A'(u^k)$  — неотрицательно определенный оператор, как это имеет место для монотонного оператора  $A$ , либо  $A'(u^k)$  имеет неотрицательный спектр, состоящий из различных собственных чисел, когда  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (конечномерный случай). При этих предположениях операторы  $(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}$  существуют и ограничены, следовательно, процессы (1.3), (1.4) определены корректно.

Итеративно регуляризованный метод Ньютона ( $\gamma = 1$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$ ) для вариационных неравенств был предложен и исследован ранее в [1; 2]. Подход основан на том, что априори выбирается подходящим образом последовательность параметров  $\alpha_{k(\delta)}$  и при некоторых условиях, в том числе на вторую производную оператора  $A$ , доказываемость сходимости итераций к решению уравнения (1.1). В данной работе в предположении, что производная  $A'(u)$  удовлетворяет условию Липшица, устанавливаются линейная скорость сходимости методов (1.3), (1.4) и свойство фейеровости итераций. При истокообразной представимости решения асимптотическое правило останова итераций  $k(\delta)$  определяется из равенства оценок погрешности для итераций и регуляризованного решения  $u_\alpha$ .

Необходимо отметить, что в рамках двухэтапного подхода в работах [3–5] исследовались модифицированные варианты процессов (1.3), (1.4) ( $1 \leq \varkappa < \infty$ ), когда вместо  $A'(u^k)$  используется производная в начальной точке  $A'(u^0)$  в ходе всего итерационного процесса, где  $A'(u^0)$  — самосопряженный неотрицательно определенный оператор.

Очевидно, что если  $A$  — линейный оператор и  $\alpha = \bar{\alpha} = 0$ ,  $\gamma = 1$ , то процессы (1.4) при  $\varkappa = -1, 0, 1$  переходят в метод минимальной ошибки (ММО), метод наискорейшего спуска (МНС) и метод минимальных невязок (ММН). Поэтому (1.4) можно рассматривать как нелинейные регуляризованные аналоги ММО, МНС и ММН. Для краткости сохраним эти названия и для нелинейных аналогов как для  $\gamma = 1$ , так и для  $\gamma > 0$ .

В заключение обзора заметим, что в линейном случае для неотрицательно определенного оператора  $A$  иной подход к построению итеративно-регуляризованных  $\alpha$ -процессов  $-1 \leq \varkappa < \infty$  предложен в [2].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 для монотонного оператора  $A$  с производной  $A'(u)$ , удовлетворяющих условию Липшица, исследуется метод Ньютона (1.3), для которого доказываемость сходимости к регуляризованному решению, устанавливаются оценка погрешности и свойство фейеровости оператора шага. В разд. 3 при тех же условиях на оператор и с тех же позиций рассматриваются процессы (1.4). Раздел 4 посвящен итерационным процессам (1.3), (1.4) для операторного уравнения (1.1) в конечномерном пространстве, когда  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и матрица  $A'(u^k)$  имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений. В разд. 5 устанавливаются регуляризующие свойства двухэтапного метода, состоящего из схемы регуляризации в форме (1.2) и итерационной аппроксимации регуляризованного решения одним из процессов (1.3), (1.4). Результаты численных экспериментов для обратных задач гравиметрии и магнитометрии представлены в разд. 6.

## 2. Метод Ньютона для монотонного оператора

Для доказательства теорем сходимости и получения оценок погрешности нам понадобятся условия на оператор  $A$  и его производную:

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\| \quad \forall u, v \in U, \quad (2.1)$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\| \quad \forall u, v \in U. \quad (2.2)$$

Кроме того, предполагается, что известна оценка для нормы производной в точке  $u^0$  (начальном приближении), т. е.

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r, \quad \|A'(u^0)\| \neq 0. \quad (2.3)$$

**З а м е ч а н и е 2.1.** Начальное приближение в неравенстве (2.3) в общем случае не обязательно совпадает с  $u^0$  в схеме (1.2). Однако для простоты изложения будем считать, что это один и тот же элемент. Кроме того, для монотонного оператора  $A$  оператор  $A + \alpha I$  равномерно монотонный, поэтому при выполнении условия 2.1 согласно [6, теорема 43.7] регуляризованное уравнение (1.2) имеет единственное решение.

**Теорема 2.1.** Пусть  $A$  — монотонный оператор, для которого выполнены условия (2.1), (2.2) для  $u, v \in S_r(u_\alpha)$ ,  $r \leq \alpha/N_2$ ,  $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $u^0 \in S_r(u_\alpha)$ .

Тогда для процесса (1.3) с  $\gamma = 1$  имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения  $u_\alpha$  регуляризованного уравнения (1.2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \left(1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}\right). \quad (2.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Учитывая, что для монотонного оператора  $A$   $\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq 1/\bar{\alpha}$  а из (2.2) следует справедливость разложения

$$A(u_\alpha) = A(u^k) + A'(u^k)(u_\alpha - u^k) + \xi, \quad \|\xi\| \leq \frac{N_2}{2} \|u_\alpha - u^k\|^2,$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} u^{k+1} - u_\alpha &= u^k - u_\alpha - (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) - A(u_\alpha) + \alpha(u^k - u_\alpha)) = u^k - u_\alpha \\ &\quad - (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A'(u^k)(u^k - u_\alpha) + \bar{\alpha}(u^k - u_\alpha) - \xi + (\alpha - \bar{\alpha})(u^k - u_\alpha)). \end{aligned}$$

Из полученного соотношения вытекает оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leq \frac{1}{\bar{\alpha}} \left( \frac{N_2 \|u^k - u_\alpha\|^2}{2} + (\bar{\alpha} - \alpha) \|u^k - u_\alpha\| \right) = \left(1 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} + \frac{N_2}{2\bar{\alpha}} \|u^k - u_\alpha\|\right) \|u^k - u_\alpha\|.$$

Имея  $\|u^0 - u_\alpha\| \leq r \leq \alpha/N_2$  и предполагая  $\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r$ , по индукции приходим к оценке (2.4).  $\square$

Усиленное свойство Фейера [7, определение 1.3] для оператора  $T$  означает, что для некоторого  $\nu > 0$  выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \quad (2.5)$$

где  $z \in \text{Fix}(T)$  — множество неподвижных точек оператора  $T$ . Это влечет для итерационных точек  $u^k$ , порождаемых процессом  $u^{k+1} = T(u^k)$ , выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \quad (2.6)$$

Важным свойством фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Располагая итерационными процессами с фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек, можно конструировать разнообразные гибридные методы, а также учитывать в итерационном алгоритме априорные ограничения на решение в виде системы линейных или выпуклых неравенств.

Установим усиленное свойство Фейера для оператора шага  $T$  в методе (1.3).

**Теорема 2.2.** Пусть для монотонного оператора  $A$  выполнены условия (2.1)–(2.3),  $A'(u^0)$  — самосопряженный оператор,  $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$  и для параметров справедливы соотношения

$$0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \geq 4N_1, \quad r \leq \alpha/8N_2. \quad (2.7)$$

Тогда для оператора  $F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$  справедлива оценка снизу

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 \quad \forall u \in S_r(u_\alpha). \quad (2.8)$$

**Доказательство.** Введем обозначение  $B(u) = A'(u) + \bar{\alpha}I$ . Принимая во внимание, что  $u_\alpha$  — решение уравнения (1.2), имеем

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle = \langle F(u) - F(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle = \alpha \langle B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \langle B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle. \quad (2.9)$$

Учитывая, что  $A'(u^0)$  — самосопряженный и, ввиду монотонности  $A$ , неотрицательно определенный оператор, для первого слагаемого в правой части равенства (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \langle B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle &= \alpha \langle B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ &+ \alpha \langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} \|u - u_\alpha\|^2 \\ - \alpha |\langle B^{-1}(u)(B(u^0) - B(u))B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle| &\geq \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{\alpha N_2 \|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

с учетом неравенства  $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$ . Для второго слагаемого в правой части (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \langle B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle &= \langle B^{-1}(u^0)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle \\ &+ \langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle \\ &= \left\langle B^{-1}(u^0) \int_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0)) d\theta (u - u_\alpha), u - u_\alpha \right\rangle + \langle B^{-1}(u^0) A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ &+ \langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle \geq -\frac{N_2}{\bar{\alpha}} \int_0^1 \|u_\alpha + \theta(u - u_\alpha) - u^0\| d\theta \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\bar{\alpha}^2} (\|A'(u) - A'(u^0)\| \cdot \|A(u) - A(u_\alpha)\| \cdot \|(u - u_\alpha)\|) \\ &\geq -\frac{N_2}{2\bar{\alpha}} (\|u_\alpha - u^0\| + \|u - u^0\|) \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u^0\| \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq -\frac{3N_2 r}{2\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{2r N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Объединяя (2.10), (2.11), выводим неравенство

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \geq \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2N_2 r \alpha}{\bar{\alpha}^2} - \frac{3N_2 r}{2\bar{\alpha}} - \frac{2r N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2,$$

откуда с учетом условий (2.7) на параметры  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$ , а также неравенства  $N_1 \geq N_0$ , приходим к оценке (2.8).  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда при

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2} \quad (2.12)$$

оператор шага  $T$  процесса (1.3) при

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1 \quad (2.13)$$

удовлетворяет неравенству (2.5), для итераций  $u^k$  справедливо соотношение (2.6) и имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0. \quad (2.14)$$

Если параметр  $\gamma$  принимает значение

$$\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2}, \quad (2.15)$$

то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}. \quad (2.16)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В условиях теоремы справедливо неравенство

$$\|F(u)\|^2 \leq \|B^{-1}(u)\|^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2, \quad (2.17)$$

которое вместе с (2.8) влечет соотношение

$$\|F(u)\|^2 \leq \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}} \langle F(u), u - u_\alpha \rangle. \quad (2.18)$$

Условие (2.5) на оператор шага  $T$  эквивалентно

$$\|F(u)\|^2 \leq \frac{2}{\gamma(1 + \nu)} \langle F(u), u - u_\alpha \rangle. \quad (2.19)$$

Сравнивая неравенства (2.18) и (2.19), получаем условие (2.12) для  $\gamma$  и выражение (2.13) для  $\nu$ .

При  $u = u^k$  из неравенства (2.5) вытекает (2.6) и соотношение

$$\|u^k - T(u^k)\| = \gamma \|F(u^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что вместе с (2.8) влечет сходимость (2.14). Принимая во внимание (2.8), (2.17), имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 &= \|u^k - u_\alpha\|^2 - 2\gamma \langle F(u^k), u^k - u_\alpha \rangle + \gamma^2 \|F(u^k)\|^2 \\ &\leq \left(1 - \gamma \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}} + \gamma^2 \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\right) \|u^k - u_\alpha\|^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

При значениях  $\gamma = \gamma_{opt}$  из (2.15) выражение в круглых скобках неравенства (2.20) достигает минимума, и при  $\gamma = \gamma_{opt}$  параметр  $q$  вычисляется по формуле, представленной в (2.16).  $\square$

### 3. Сходимость процессов (1.4)

Сначала опишем экстремальные принципы, которые используются при построении процессов (1.4) для нелинейного монотонного оператора  $A$ . Используя разложение Тейлора в точке  $u^k$  и удерживая лишь два члена, приходим к линейному уравнению

$$A(u^k) + A'(u^k)(u - u^k) = f_\delta.$$

Зададим итерационный процесс в следующем виде:  $u^{k+1} = u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta)$  — и найдем параметр  $\beta$  из условия

$$\min_{\beta} \|u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - z\|^2, \quad (3.1)$$

где  $z$  — решение уравнения  $A'(u^k)z = F^k$ ,  $F^k = f_\delta + A'(u^k)u^k - A(u^k)$ . Заменяя теперь оператор  $A(u)$  — на  $A(u) + \alpha(u - u^0)$ , а  $A'(u^k)$  на  $A'(u^k) + \bar{\alpha}I$ , получаем процесс (1.4) при  $\varkappa = -1$  и  $\gamma = 1$ , т. е. нелинейный регуляризованный вариант ММО. Если теперь вместо (3.1) использовать экстремальные принципы

$$\min_{\beta} \{ \langle A'(u^k)u^{k+1}, u^{k+1} \rangle - 2 \langle u^{k+1}, F(u^k) \rangle \}$$

либо

$$\min_{\beta} \{ \|A'(u^k)(u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - F(u^k))\|^2 \}, \quad (3.2)$$

то получаем после тех же замен нелинейный регуляризованный аналог МНС, т. е. (1.4) при  $\varkappa = 0$  и  $\gamma = 1$ , либо ММН, т. е. (1.4) при  $\varkappa = 1$ ,  $\gamma = 1$ , с учетом следующего замечания.

**З а м е ч а н и е 3.1.** Формула (1.4) при  $\varkappa = 1$  справедлива лишь для самосопряженного оператора  $A'(u)$ . В общем же случае знаменатель дроби при  $\varkappa = 1$  необходимо заменить на  $\|(A'(u) + \alpha I)S_\alpha(u)\|^2$ , как это следует из условия минимума задачи (3.2). Это обстоятельство будет учтено во всех выкладках в разд. 3, 4.

Установим сходимость процесса (1.4) при  $\varkappa = -1, 0, 1$  к решению уравнения (1.2). Как и прежде, используем обозначения  $B(u) = A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,  $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$ , а также введем новое

$$\beta^\varkappa = \frac{\langle B^\varkappa(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\langle B^{\varkappa+1}(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}, \quad F^\varkappa(u) = \beta^\varkappa S_\alpha(u),$$

где при  $\varkappa = 1$  в  $\beta^\varkappa$  следует заменить знаменатель на  $\|B(u)S_\alpha(u)\|^2$  (см. замечание 3.1).

**Теорема 3.1.** Пусть для монотонного оператора  $A$  выполнены условия (2.1)–(2.3) и  $A'(u^0)$  — самосопряженный оператор. Кроме того, для ММО параметры  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$ ,  $N_2$ ,  $N_0$  удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$\alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/8N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0. \quad (3.3)$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \leq \mu_\varkappa \langle F^\varkappa(u), u - u_\alpha \rangle, \quad \varkappa = -1, 0, 1, \quad (3.4)$$

где

$$\mu_{-1} = \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha \bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha \bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\alpha \bar{\alpha}^3} \quad (3.5)$$

соответственно для ММО, МНС, ММН.

Доказательство. Рассмотрим ММО, т.е. (1.4) при  $\varkappa = -1$ . Принимая во внимание монотонность оператора  $A$ , самосопряженность и неотрицательность  $A'(u^0)$  и условия на параметры (3.3), имеем (ниже  $F^{-1}(u)$ ,  $B^{-1}(u)$  означают  $F^\varkappa(u)$ ,  $B^\varkappa(u)$  при  $\varkappa = -1$ )

$$\begin{aligned} \langle F^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle &= \beta^{-1}(u) \langle A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \alpha \beta^{-1}(u) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \alpha \left( \frac{\langle B^{-1}(u^0) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} - \frac{|\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0)) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle|}{\|S_\alpha(u)\|^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \left( \frac{\alpha}{N_0 + \bar{\alpha}} - \alpha \|B^{-1}(u)\| \cdot \|B^{-1}(u^0)\| \|A'(u) - A'(u^0)\| \right) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \left( \frac{\alpha}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где учтено, что  $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$ . Кроме того, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|F^{-1}(u)\|^2 &= |\beta^{-1}(u)|^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \leq (N_1 + \alpha)^2 \|B^{-1}(u)\|^2 \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Объединяя (3.6) и (3.7), получаем

$$\|F^{-1}(u)\|^2 \leq \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha \bar{\alpha}} \langle F^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle. \quad (3.8)$$

Перейдем к оценке МНС ( $\varkappa = 0$ ). Из соотношений

$$\begin{aligned} \langle F^0(u), u - u_\alpha \rangle &= \beta^0(u) \langle A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \alpha \beta^0(u) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &= \alpha \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle A'(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha} \|S_\alpha(u)\|^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha}{N_1 + \bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \|F^0(u)\|^2 &= \|\beta^0(u)\|^2 \|S_\alpha(u) - S_\alpha(u_\alpha)\|^2 \\ &\leq \frac{(N_1 + \alpha)^2 \|S_\alpha(u)\|^4 \|u - u_\alpha\|^2}{|\langle A'(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha} \|S_\alpha(u)\|^2|^2} \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

приходим к неравенству

$$\|F^0(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha \bar{\alpha}^2} \langle F^0(u), u - u_\alpha \rangle.$$

Обратимся теперь к ММН (см. замечание (3.1)). Имеем неравенства

$$\begin{aligned} \langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle &\geq \alpha \beta^1(u) \|u - u_\alpha\|^2 = \alpha \frac{\langle (A'(u) + \bar{\alpha}I) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B(u) S_\alpha(u)\|^2} \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha \bar{\alpha}}{\|B(u)\|^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha \bar{\alpha}}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \|F^1(u)\| &\leq \frac{(N_1 + \alpha) \langle B(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B(u) S_\alpha(u)\|^2} \|u - u_\alpha\| \leq \frac{(N_1 + \alpha) \langle B(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\langle B(u) S_\alpha(u), B(u) S_\alpha(u) \rangle} \|u - u_\alpha\| \\ &= \frac{(N_1 + \alpha) \langle B(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle \|u - u_\alpha\|}{\|A'(u) S_\alpha(u)\|^2 + \bar{\alpha} \langle A'(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha} \langle B(u) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \leq \frac{N_1 + \alpha}{\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|, \end{aligned} \quad (3.12)$$

из которых вытекает оценка

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}{\alpha \bar{\alpha}^3} \langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle.$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства (3.4) при значениях  $\mu_\varkappa$  из (3.5).  $\square$

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия теоремы (3.1). Тогда при

$$\gamma_{\varkappa} < \frac{2}{\mu_{\varkappa}} \quad (\varkappa = -1, 0, 1) \quad (3.13)$$

для последовательности  $\{u^k\}$ , порождаемой процессом (1.4) при соответствующем  $\varkappa$ , имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_{\alpha}\| = 0,$$

а при

$$\gamma_{\varkappa}^{opt} = \frac{1}{\mu_{\varkappa}} \quad (3.14)$$

справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_{\alpha}\| \leq q_{\varkappa}^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}}, \quad q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^4}{(N_1 + \bar{\alpha})^4}}. \quad (3.15)$$

**Доказательство.** Сопоставляя неравенство (2.19) при  $F(u) = F^{\varkappa}(u)$  ( $\varkappa = -1, 0, 1$ ) с соотношением (3.4), находим, что при  $\gamma_{\varkappa}$ , удовлетворяющем (3.13), условие фейеровости выполняется для всех трех процессов. Поэтому сходимость итераций при выполнении условия (3.13) устанавливается аналогично теореме (2.3), касающейся метода Ньютона. Подставляя в (2.20)  $F^{\varkappa}(u^k)$  и используя оценки (3.7), (3.8) (при  $\varkappa = -1$ ), (3.9), (3.10) (при  $\varkappa = 0$ ), (3.11), (3.12) (при  $\varkappa = 1$ ), вычисляем выражение в круглых скобках в правой части неравенства (2.20) для каждого метода. Минимизируя это выражение по  $\gamma$ , получаем значение  $\gamma_{\varkappa}^{opt}$ , определяемое формулой (3.14), и вычисляем коэффициенты  $q_{\varkappa}$ , которые принимают вид из (3.15).  $\square$

#### 4. Операторные уравнения с положительным спектром

В предыдущих разделах для монотонного оператора  $A$  проведено полное исследование сходимости итерационных процессов (1.3), (1.4) и установлена оценка погрешности итераций. Следует, однако, отметить, что условие монотонности оператора  $A$  — очень сильное требование, которое не выполняется во многих важных прикладных задачах, например в задачах гравиметрии и магнитометрии.

Цель этого раздела — несколько ослабить условие монотонности и обосновать сходимость процессов (1.3), (1.4).

Рассмотрим конечномерный случай, когда оператор  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которого матрица  $A'(u)$  в некоторой окрестности решения имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений.

**Лемма 4.1.** Пусть  $n \times n$ -матрица  $A'(u)$  не имеет кратных собственных значений  $\lambda_i$  и числа  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) различны и неотрицательны. Тогда при  $\bar{\alpha} > 0$  матрица имеет представление  $A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda S^{-1}(u)$  и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{\min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \quad (4.1)$$

где столбцы матрицы  $S(u)$  составлены из собственных векторов матрицы  $A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,  $\Lambda$  — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы  $A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,  $\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|$ .

**Доказательство.** Из условия леммы следует, что матрица  $A'(u) + \bar{\alpha}I$  имеет  $n$  положительных различных собственных значений  $\lambda_i + \alpha$ . Тогда согласно [8, замечание 1] справедливо представление

$$A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda S^{-1}(u), \quad (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1} = S(u)\Lambda^{-1}S^{-1}(u) \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует оценка (4.1).  $\square$

**4.1.** Обратимся к регуляризованному методу Ньютона, для которого была доказана теорема (2.3) о сходимости итераций и оценке погрешности для монотонного оператора. Рассмотрим теперь вариант этой теоремы, когда оператор  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и его производная имеет неотрицательный спектр, удовлетворяющий условиям леммы 4.1, причем функция  $\mu(S(u))$  при фиксированном  $\alpha$  равномерно ограничена по  $u$  в шаре  $S_r(u_\alpha)$ , т.е.

$$\sup\{\mu(S(u)): u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty. \quad (4.3)$$

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия (4.3), (2.1)–(2.3),  $A'(u^0)$  – симметричная матрица и для параметров справедливы соотношения  $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 4N_0$ ,  $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$ ,  $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$ .

Тогда для метода (1.3) справедливо заключение теоремы 2.3, где соотношения (2.12), (2.13) для  $\gamma$  и выражение для  $q$  в (2.16) соответственно принимают вид

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}}.$$

**Доказательство.** С учетом оценки (4.1) доказательство с несущественными поправками проводится по схеме из теоремы 2.3.

**Замечание 4.1.** При доказательстве теоремы вместо условия (4.3) достаточно требовать ограниченность величины  $\sup\{\mu(S(u^k)): u^k \in S_r(u_\alpha)\}$ , где  $u^k$  – итерационные точки метода. Причем при регулярном правиле останова итераций  $k(\delta)$  супремум берется по конечному набору номеров  $k \leq k(\delta)$ , что автоматически влечет ограниченность супремума и выполнение оценки вида (2.16) при этих значениях  $k$ . Кроме того, для модифицированного метода Ньютона, в котором производная  $A'(u^0)$  вычисляется в фиксированной точке  $u^0$ , величина  $\mu(S(u^0)) = \|S(u^0)\| \cdot \|S^{-1}(u^0)\| = \bar{S} < \infty$ .

**4.2.** При тех же условиях на оператор, что и для метода Ньютона в п. 4.1, исследуем процессы (1.4).

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия (2.1)–(2.3). Пусть при  $u \in S_r(u_\alpha)$  матрица  $A'(u)$  имеет спектр, состоящий из неотрицательных различных собственных значений,  $A'(u^0)$  – симметричная неотрицательно определенная матрица. Пусть параметры удовлетворяют следующим условиям

$$\text{ММО: } 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/6\bar{S}N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0, \quad (4.4)$$

$$\text{МНС: } 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/3N_2, \quad (4.5)$$

$$\text{ММН: } 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/6N_2. \quad (4.6)$$

Тогда справедливы соотношения (3.4), где

$$\mu_{-1} = \frac{8\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{18(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{18(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^4}{\alpha\bar{\alpha}^5}. \quad (4.7)$$

**Доказательство.** При  $\varkappa = -1$  и тех же обозначениях, которые были приняты в разд. 3, имеем (верхний индекс  $(-1)$  соответствует методу (1.4) при  $\varkappa = -1$ ):

$$\langle F^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle = \beta^{-1}(u)[\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha\|u - u_\alpha\|^2].$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части равенства с учетом условий (4.4):

$$\begin{aligned} & \langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha \|u - u_\alpha\|^2 = \alpha \|u - u_\alpha\|^2 \\ & + \left\langle \int_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0))(u - u_\alpha) d\theta, u - u_\alpha \right\rangle + \langle A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ & \geq \alpha \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_2(\|u^0 - u_\alpha\| + \|u - u^0\|)^2}{2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \left(\alpha - \frac{3N_2r}{2}\right) \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{3\alpha}{4} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(u) &= \frac{\langle (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} \\ &+ \frac{\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{\bar{S}N_2\|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{2\bar{S}N_2r}{\bar{\alpha}^2} \geq \frac{1}{6\bar{\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где учтены условия (4.4) и соотношение  $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$ .

Кроме того, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|F^{-1}(u)\|^2 &\leq (\beta^{-1})^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \\ &\leq \|B^{-1}(u)\|^2 (N_1 + \alpha)^2 \|u - u_\alpha\|^2 \leq \frac{\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Объединяя (4.8)–(4.10), получаем, что в соотношении (3.4)  $\mu_{-1}$  выражается величиной из (4.7).

Исследуем теперь МНС, т. е. процесс (1.4) при  $\varkappa = 0$ . Аналогично предыдущему методу устанавливаем, что

$$\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha \|u - u_\alpha\|^2 \geq \left(\alpha - \frac{3N_2r}{2}\right) \|u - u_\alpha\|^2. \quad (4.11)$$

Кроме того, имеем  $\beta^0(u) = \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \geq \frac{1}{\|B(u)\|} \geq \frac{1}{\|A'(u) + \bar{\alpha}I\|} \geq \frac{1}{N_1 + \bar{\alpha}}$ . Объединяя последнее соотношение с (4.11), получаем оценку снизу

$$\langle F^0(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{1}{N_1 + \bar{\alpha}} \left(\alpha - \frac{3N_2r}{2}\right) \|u - u_\alpha\|^2. \quad (4.12)$$

Аналог оценки (4.10) для  $F^0(u)$  выводим из следующих неравенств:

$$\|F^0(u)\| \leq \beta^0(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha\|u - u_\alpha\|) \leq \beta^0(u)(N_1 + \alpha)\|u - u_\alpha\|, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \beta^0(u) &= \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2 + \langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \\ &\leq \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2 - |\langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle|} \leq \frac{1}{\bar{\alpha} - N_2\|u - u^0\|} \leq \frac{1}{\bar{\alpha} - 2N_2r}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.12)–(4.14) при значениях параметров из (4.5) получаем значения  $\mu_0$  в (4.7).

Наконец, рассмотрим процесс (1.4) при  $\varkappa = 1$  с учетом замечания 3.1. Как и в предыдущем методе, при оценке снизу величины  $\langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle$ , справедливо соотношение (4.11). Для параметра  $\beta^1(u)$  получаем

$$\begin{aligned} \beta^1(u) &= \frac{\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2} \\ &\geq \frac{\langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}\langle S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle - \|A'(u) - A'(u^0)\| \cdot \|S_\alpha(u)\|^2}{(N_1 + \bar{\alpha})^2\|S_\alpha(u)\|^2} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{\bar{\alpha} - N_2 \|u - u^0\|}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \geq \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2},$$

что при условиях на параметры (4.6) дает оценку

$$\langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle \geq \left( \alpha - \frac{3N_2 r}{2} \right) \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha \bar{\alpha}}{2(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2. \quad (4.15)$$

Поскольку  $\|F^1(u)\| \leq \beta^1(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha \|u - u_\alpha\|) \leq \beta^1(u)(N_1 + \alpha) \|u - u_\alpha\|$ , то

$$\begin{aligned} \|\beta^1(u)\| &\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha}) \|S_\alpha(u)\|^2}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + 2\bar{\alpha} \langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}^2 \|S_\alpha(u)\|^2}, \\ &\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha}) \|S_\alpha(u)\|^2}{2\bar{\alpha} \langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle - 2\bar{\alpha} | \langle A'(u) - A'(u^0) \rangle S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle | + \bar{\alpha}^2 \|S_\alpha(u)\|^2} \\ &\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha} N_2 \|u - u^0\|} \leq \frac{N_1 + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - 4N_2 r)} \leq \frac{3(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем для  $\|F^1(u)\|^2$  оценку сверху

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{3^2(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\bar{\alpha}^4} \|u - u_\alpha\|^2. \quad (4.16)$$

Объединяя соотношения (4.15) и (4.16) и условия (4.6), получаем значение  $\mu_1$ , представленное в (4.7).  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть выполнены условия 4.1. Тогда при  $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$ ,  $\varkappa = -1, 0, 1$ , где значения  $\mu_k$  определяются соотношениями (4.7), последовательности  $u^k$ , порождаемые процессом (1.4) при  $\varkappa = -1, 0, 1$ , сходятся к  $u_\alpha$ , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при  $\gamma_\varkappa^{opt} = 1/\mu_\varkappa$  справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r,$$

где

$$\begin{aligned} q_{-1} &= \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64S^2(N_1 + \alpha)^2}}, & q_0 &= \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}}, \\ q_1 &= \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

**Доказательство.** Подставляя в соотношение (2.20) вместо  $F(u^k)$  последовательность  $F^\varkappa(u^k)$  ( $\varkappa = -1, 0, 1$ ) и используя оценки (4.8), (4.9) ( $\varkappa = -1$ ), (4.9), (4.10) ( $\varkappa = 0$ ), (4.11), (4.12) ( $\varkappa = 1$ ), а также условия на параметры (4.4)–(4.6), получаем после минимизации по  $\gamma$  значения для  $q_\varkappa$ , представленные в (4.17). При выполнении условия  $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$  выражение в круглых скобках в правой части неравенства (2.20) принимает значение, которое меньше единицы, что влечет сходимость итераций для всех трех методов.  $\square$

**З а м е ч а н и е 4.2.** Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы  $A'(u^k)$ , состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть  $\lambda_1$  — отрицательное собственное значение

с наименьшим модулем  $|\lambda_1|$  и  $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$ . Тогда оценка (4.1) трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*} \quad (4.18)$$

Все утверждения, т. е. теоремы (4.1)–(4.3), остаются справедливыми при замене  $\bar{\alpha}$  на  $\bar{\alpha}^*$  во всех оценках, где используется (4.18).

**З а м е ч а н и е 4.3.** Если рассматривать модифицированные варианты методов (1.3), (1.4), когда вместо  $A'(u^k)$  в операторе шага используется  $A'(u^0)$  в процессе итераций, то при условиях на оператор, принятых в данном разделе, для получения аналогичных результатов о сходимости и оценке погрешности наряду с неотрицательностью спектра достаточно требовать симметричность матрицы  $A'(u^0)$  [3–5]. Заметим, что при исследовании основных методов (1.3), (1.4) существование симметричной матрицы для некоторого элемента  $u^0$  предполагается.

## 5. Оценка погрешности двухэтапного метода

**5.1.** Полученные в разд. 2, 3 оценки скорости сходимости для итерационных процессов (1.3), (1.4) и результаты по аппроксимации точного решения уравнения (1.1) семейством регуляризованных решений  $u_\alpha$  позволяют получить оценку погрешности двухэтапного метода.

Согласно [9, теоремы 3.1, 3.2], при условии монотонности оператора и истокообразной представимости решения  $\hat{u}$  уравнения (1.1)

$$u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v \quad (5.1)$$

справедлива оценка погрешности регуляризованного решения

$$\|u_\alpha^\delta - \hat{u}\| \leq \|u_\alpha^\delta - u_\alpha\| + \|u_\alpha - \hat{u}\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + k_0\alpha, \quad (5.2)$$

где  $k_0 = (1 + N_2\|v\|/2)\|v\|$ ,  $u_\alpha^\delta$ ,  $u_\alpha$  — решения уравнения (1.2) с возмущенной  $f_\delta$  и точной  $f$  правой частью уравнения (1.1) соответственно. Минимизируя правую часть соотношения (5.2) по  $\alpha$ , имеем  $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta/k_0}$ , что дает оценку

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - \hat{u}\| \leq 2\sqrt{\delta k_0}. \quad (5.3)$$

В разд. 2, 3 для итерационных процессов (1.3), (1.4) получены оценки вида

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^\delta\| \leq q^k(\delta)r. \quad (5.4)$$

Заметим, что вместо используемого ранее элемента  $u_\alpha$  в этом разделе введены переобозначения, а именно через  $u_\alpha^\delta$  теперь дается решение уравнения (1.2) с возмущенной правой частью  $f_\delta$ , а через  $u_\alpha$  — решение уравнения (1.2) с точной правой частью. Кроме того, вместо  $u^k$  используется  $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$ , чтобы подчеркнуть зависимость от параметров  $\delta$ ,  $\alpha$ .

Объединяя (5.3), (5.4), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 5.1.** Пусть для решения  $\hat{u}$  уравнения (1.1) с монотонным оператором справедливо условие (5.1) и для метода (1.4) выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при выборе числа итераций по правилу

$$k(\delta) = \left\lceil \frac{\ln(2\sqrt{k_0\delta}/r)}{\ln q(\delta)} \right\rceil \quad (5.5)$$

справедлива оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^\delta\| \leq 4\sqrt{k_0\delta}. \quad (5.6)$$

Доказательство. Объединяя (5.3), (5.4), получаем

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - \hat{u}\| \leq \|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| + \|u_{\alpha(\delta)}^{\delta} - \hat{u}\| \leq r q^k(\delta) + 2\sqrt{k_0\delta}. \quad (5.7)$$

Приравнивая слагаемые в правой части (5.7), получаем выражение для числа итераций (5.5) и оценку (5.6). Оптимальность по порядку оценки (5.6) устанавливается аналогично [10] с использованием методологии оценивания погрешности метода через модуль непрерывности обратного линейного оператора [11; 12].  $\square$

**5.2.** Для оператора  $A'(u)$  с положительным спектром так же, как и для случая монотонного оператора, в разд. 4 доказана линейная скорость сходимости, однако, в отличие от монотонного оператора здесь оценок типа (5.2) не существует, поэтому нельзя получить общую оценку для двухэтапного метода. Тем не менее в этой ситуации для двухэтапного алгоритма можно установить оценку для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными.

Предположим, что уравнение (1.2) разрешимо, тогда для его решения  $u_{\alpha(\delta)}^{\delta}$  справедливо соотношение

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_{\delta}\| = \alpha(\delta)\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta} - u^0\|. \quad (5.8)$$

Пусть для некоторой связи  $\alpha(\delta)$  ограничена величина  $\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta} - u^0\| \leq m < \infty$ , что влечет оценку

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_{\delta}\| \leq \alpha(\delta)m \quad (5.9)$$

и сходимость  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_{\delta}\| = 0$  при  $\alpha(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ . Пусть  $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$  — итерационные точки, полученные одним из методов (1.3), (1.4). Имеем

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - f_{\delta}\| \leq \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta})\| + \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_{\delta}\| \leq N_1 q^k(\delta) + \alpha(\delta)m. \quad (5.10)$$

Выбирая, например,  $\alpha(\delta) = \delta^p$  и приравнивая слагаемые в правой части (5.10), получаем правило выбора числа итерации  $k(\delta) = [\ln(m\delta^p/N)/\ln q(\delta)]$ , при котором справедлива оценка для невязки двухэтапного метода

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_{\delta}\| \leq 2m\delta^p. \quad (5.11)$$

**З а м е ч а н и е 5.1.** Соотношения (5.8)–(5.11) остаются справедливыми для случая, когда матрицы  $A'(u^k)$  содержат набор малых отрицательных собственных значений с тем лишь отличием, что в неравенстве (5.10) параметр  $q$  во всех методах теперь вычисляется по формулам из разд. 4, в которых параметр  $\bar{\alpha}$  заменен на  $\alpha^*$  (см. замечание 4.2).

## 6. Численные эксперименты для обратных задач гравиметрии и магнитометрии

### 6.1. Обратная задача гравиметрии

Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью  $z$ , направленной вниз

$$\gamma \Delta \sigma \left\{ \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' \right\} = \Delta g(x, y), \quad (6.1)$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  — скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией  $u(x, y)$  и подлежащей определению,  $f(x, y)$  — аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости  $z = H$  для искомого решения  $u(x, y)$ . Запишем (6.1) в виде операторного уравнения

$$[A(u)](x, y) = - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' = f(x, y), \quad (6.2)$$

где  $f(x, y) = \Delta g(x, y)/\gamma\Delta\sigma - A(H)$ . Тогда производная оператора  $A$  в точке  $u^0(x, y)$  определяется формулой  $[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{u^0(x', y')h(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}} dx' dy'$ . После дискретизации интегрального уравнения (6.2) двумерным аналогом формулы прямоугольников с равномерной сеткой по каждой переменной с шагом  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  получаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестного вектора  $u_{ji} = u(x_j, y_i)$  ( $j = 1, 2, \dots, m_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_2$ ), которая в векторно-матричном виде может быть записана следующим образом:

$$A_n(u_n) = f_n, \quad (6.3)$$

где  $u_n, f_n$  — векторы размерности  $n = m_1 \times m_2$ . Дискретный аналог производной  $A'(u^0)$  принимает форму

$$[A'_n(u_n)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \Delta x \Delta y \frac{u_{ji} h_{ji}}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + (u_{ji}^0)^2]^{3/2}}, \quad (6.4)$$

где при  $u_n = u_n^0 - \text{const}$   $A'_n(u_n^0)$  — симметричная матрица, компоненты которой вычисляются по формуле (6.4).

Рассматриваемая модель двухслойной среды, в которой поверхность раздела задается функцией  $u(x, y)$ , определяется формулой [13, с. 160]

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y) = & 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6 - (y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6 - (y/8.63-7.43)^6} \\ & + 3.13e^{-(x/9.89-4.82)^6 - (y/8.72-4.33)^6}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

заданной в области  $D = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 110\}$ . Была выбрана сетка с шагом  $\Delta x = \Delta y = 1$  (км), что приводит к размерности  $n = 11000$  для искомого вектора  $u_n$ , а также принято, что  $\Delta\sigma = 0.21$  (г/см<sup>3</sup>),  $H = 5$  (км) ( $z = H = 5$  — асимптотическая плоскость для  $\hat{u}(x, y)$ ).

Цель численного эксперимента — сравнить по экономичности (затратам машинного времени) методы (1.3), (1.4) с их модифицированными вариантами, когда производная  $A'(u^k)$ , входящая в оператор шага этих процессов, вычисляется в фиксированной точке  $u^0$  в течение всего процесса итераций, т. е.  $A'(u^k)$  в (1.3), (1.4) заменяется на  $A'(u^0)$  (см. [4; 5]). В результате численного эксперимента по восстановлению модельного решения (6.5) было установлено, что не только матрица  $A'_n(u^0)$  имеет  $n$  различных неотрицательных собственных значений, но это свойство имеет место и для  $A'(u_n^k)$ . Тем самым выполняются условия, при которых получены результаты в разд. 4, 5 по сходимости и оценке погрешности процессов (1.3), (1.4) для немонотонного оператора  $A$  с положительным спектром.

При анализе числа обусловленности  $\mu(A'_n(u_n^k))$  было установлено, что эта величина для всех четырех процессов незначительно колеблется около значений  $\mu = 10^{17}$ . Выход из процесса итераций каждого из методов осуществляется по правилу

$$\frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\tilde{u}_n\|_{\mathbb{R}^n}} \leq 10^{-2}, \quad (6.6)$$

где  $\hat{u}_n$  — точное решение системы уравнений (6.3), а  $\tilde{u}_n$  — восстановленное каждым из четырех итерационных методов. Таким образом, точность численного решения, полученного процессами (1.3), (1.4) и их модифицированными аналогами, гарантированно не превышала  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

Т а б л и ц а 1

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0048	0.0020	0.0024	0.0023
	0.0094	0.0019	0.0019	0.0021
N	17	21	20	16
	22	23	23	16
T, с	214	11	14	15
	328	7	7	7

Т а б л и ц а 2

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0636	0.0699	0.0802	0.0368
	0.0569	0.0575	0.0595	0.0369
N	4	4	4	5
	4	4	4	5
T, с	7	6	6	22
	5	3	3	3

П р и м е ч а н и е. В табл. 1 представлены результаты численных расчетов для обратной задачи гравиметрии, в табл. 2 — для обратной задачи магнитометрии. Здесь Δ — относительная величина невязки (6.7) для восстановленного решения; N — число итераций в процессе для достижения точности, определяемой неравенством (6.6); T — машинное время реализации метода. В позициях для Δ, N, T верхняя строка соответствует данным для основных (немодифицированных) процессов (1.3), (1.4), а нижняя — для модифицированных вариантов (1.3), (1.4).

При значениях параметров  $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 1$  в табл. 1 представлены результаты численных расчетов, где относительная регуляризованная невязка для восстановленного решения вычисляется как

$$\Delta = \frac{\|A_n(\tilde{u}_n) + \alpha(\tilde{u}_n - u^0) - f_n\|_{\mathbb{R}^n}}{\|f_n\|_{\mathbb{R}^n}}. \quad (6.7)$$

## 6.2. Обратная задача магнитометрии

Уравнение магнитометрии при тех же предположениях, что и в задаче 6.1, имеет вид

$$\Delta J \left\{ \iint_D \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' \right\} = \Delta G(x, y), \quad (6.8)$$

где  $\Delta J$  — усредненный скачок  $z$ -компоненты вектора намагниченности,  $z = H$  — асимптотическая плоскость,  $u(x, y)$  — функция, описывающая аномальное поле,  $z = u(x, y)$  — искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности. Уравнение (6.8) можно переписать в форме

$$[D(u)](x, y) = \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' = F(x, y), \quad (6.9)$$

где  $F(x, y) = D(H) - \Delta G(x, y)/\Delta J$ , тогда производная оператора  $D$  в точке  $u^0(x, y)$  определится формулой  $[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 - 2(u^0(x', y'))^2}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{5/2}} h(x', y') dx' dy'$ .

После дискретной аппроксимации, подобно задаче гравиметрии уравнения (6.9), приходим к системе нелинейных уравнений

$$D_n(u_n) = F_n \quad (6.10)$$

относительно вектора  $u_n$  ( $n = m_1 \times m_2$ ) с компонентами  $u_{ji}$  ( $j = 1, 2, \dots, m_1, i = 1, 2, \dots, m_2$ ), при этом компоненты производной оператора  $D_n$  в точке  $u_n^0$  вычисляются по формуле

$$[D'_n(u_n^0)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \Delta x \Delta y \frac{(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 - 2u_{ji}^2}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + u_{ji}^2]^{5/2}} h_{ji},$$

причем при  $u_n^0 = \{u^0(x'_j, y'_i), 1 \leq j \leq m_1, 1 \leq i \leq m_2\} = \text{const}$   $D'_n(u_n^0)$  — симметричная матрица.

Модельное решение уравнения (6.10), определяющее поверхность раздела сред, задается формулой [14, с. 6]

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6 - (y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6 - (y/10-4.5)^6} \quad (6.11)$$

на области  $D = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100\}$ . Сетка строилась с шагом  $\Delta x = \Delta y = 1$  (км), что влечет размерность  $n = 10000$  для искомого вектора  $u_n$ .

Для  $\Delta J = 0.4$  был выполнен численный эксперимент по восстановлению модельного решения задачи (6.8) процессами (1.3), (1.4) при  $\bar{\alpha} = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0001$ ,  $\beta = 1$ , а также их модифицированными аналогами, когда производная  $D'(u^k)$  вычисляется в фиксированной точке  $u_n^0 = H = 5$  (км). Число обусловленности  $\mu(D'_n(u_n^0)) = 1.8 \cdot 10^7$ . После вычисления спектра матрицы  $D'_n(u_n^k)$  выяснилось, что она имеет различные неотрицательные собственные значения; это с учетом данных разд. 4, 5 при подходящем выборе параметра  $\beta$  и начальном приближении  $u_n^0$  гарантирует сходимость итерационных схем и двухэтапного метода. Окончание итерационных процессов выполнялось по правилу (6.6).

Результаты численных расчетов для задачи (6.10) по восстановлению модельного решения (6.11) представлены в табл. 2.

Анализируя результаты численного эксперимента для задачи гравиметрии, можно отметить, что для достижения одной и той же точности приближенного решения в соответствии с правилом (6.6) число итераций для модифицированных методов, как правило, больше, чем немодифицированных процессов (1.3), (1.4). Однако затраты машинного времени при реализации модифицированных процессов, за исключением ММО, существенно меньше. Поэтому можно сделать вывод, что модифицированные МНС, ММН и РМН более экономичны и, следовательно, более предпочтительны для некоторых классов нелинейных задач большой размерности. Существенно более затратная по времени реализация ММО, по сравнению с МНС и ММН, связана прежде всего с тем, что в коэффициенте  $\beta^{-1}(u^k)$  необходимо не только вычислять скалярные произведения, но и обращать на каждом шаге оператор  $B_k = A'(u^k) + \alpha I$ . Следует сказать, что для уравнения (1.1) ММО обычно не используется. Его применение целесообразно для эквивалентного уравнения  $A'(u) * (A(u) - f) = 0$ , для которого ММО преобразуется к виду, где операция обращения отсутствует [7, формула (5.8)]. Заметим также, что в методе ММО и РМН вычисление элемента вида  $W = (A'(u^k) + \alpha I)^{-1}V$  заменялось приближенным решением системы  $(A'(u^k) + \alpha I)W = V$  с помощью метода минимальных невязок, т. е. в этом случае фактически реализуется гибридная схема градиентно-ньютоновского типа.

Как можно видеть из табл. 2, тенденция по затратам машинного времени для модифицированных вариантов процессов (1.3), (1.4) (включая ММО) также сохраняется и для обратной задачи магнитометрии.

Авторы признательны рецензенту за внимательное прочтение статьи и высказанные замечания, что позволило устранить многочисленные технические погрешности, допущенные авторами статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакушинский А.Б.** Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона-Канторовича для решения вариационных неравенств // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 6. С. 1397–1604.
2. **Bakushinsky A., Goncharsky A.** Ill-posed problems: Theory and applications. Berlin; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994. 258 p. (Math. and Its Appl.; vol. 301). doi: 10.1007/978-94-011-1026-6.
3. **Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф.** Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. 2013. Vol. 6, № 3. С. 26–37.

4. **Vasin V.V.** Modified Newton type processes generating Fejer approximations of regularized solutions to nonlinear equations // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2014. Vol. 284. Suppl. 1. P. S145–S158. doi:10.1134/S0081543814020138.
5. **Vasin V.V.** Regularized modified  $\alpha$ -processes for nonlinear equations with monotone operators // *Dokl. Math.* 2016. Vol. 94, no. 1. P. 361–364. doi:10.1134/S1064562416040062.
6. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 308 с.
7. **Vasin V.V., Eremin I.I.** Operators and iterative processes of Fejer Type. Theory and application. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p. (Inverse and Ill-Posed Problems Series 53). ISBN 978-3-11-021819-0.
8. **Стрэнг Г.** Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
9. **Tautenhahn U.** On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // *Inverse Problems*. 2002. Vol. 18, no. 1. P. 191–207.
10. **Vasin V.V.** Modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equation // *Dokl. Math.* 2015. Vol. 91, no. 3. P. 300–303. doi: 10.1134/S1064562415030187.
11. **Иванов В.К.** Об оценке устойчивости квазирешений на некомпактных множествах // *Известия вузов. Математика*. 1974. №5 (144). С. 97–103.
12. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Theory of linear Ill-posed problems and its applications. Utrecht: VSP, 2002. 296 p. (Inverse and Ill-Posed Problems; book 36). ISBN-10: 906764367X.
13. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” / Е.Н. Акимова, В.Е. Мисилов, А.Ф. Скурыдина, А.И. Третьяков // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. Vol. 16, № 1. С. 155–164.
14. **Акимова Е.Н., Мисилов В.Е., Дергачев Е.А.** Алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии // Тр. 41-й сессии Междунар. семинара им.Д.Г.Успенского / ИГФ УрО РАН. Екатеринбург, 2014. С. 4–6.

Васин Владимир Васильевич

Поступила 13.10.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН

гл. научный сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский Федеральный университет

e-mail: vasin@imm.uran.ru

Скурыдина Алия Фиргатовна

младший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

ассистент

Уральский Федеральный университет

e-mail: afinapal@gmail.com

## REFERENCES

1. Bakushinskii A.B. A regularizing algorithm on the basis of the Newton–Kantorovich method for the solution of variational inequalities. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1976, vol. 16, no. 6, pp. 16–23. doi: 10.1016/0041-5553(76)90037-9.
2. Bakushinsky A., Goncharsky A. *Ill-posed problems: Theory and applications*. Berlin, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1994, Ser. Math. and Its Appl., vol. 301, 258 p. doi: 10.1007/978-94-011-1026-6.
3. Vasin V.V., Akimova E.N., Miniakhmetova A.F. Iterative Newton type algorithms and its applications to inverse gravimetry problem. *Vestnik Yuzhno-Ural. Gos. Univ.*, 2013, vol. 6, no. 3, Ser. Mat. Modelirovanie i Programirovanie, pp. 26–37.
4. Vasin V.V. Modified Newton type processes generating Fejer approximations of regularized solutions to nonlinear equations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. S145–S158. doi:10.1134/S0081543814020138.
5. Vasin V.V. Regularized modified  $\alpha$ -processes for nonlinear equations with monotone operators. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 1, pp. 361–364. doi:10.1134/S1064562416040062.

6. Kufner A., Fučík S. *Nonlinear differential equations*. Amsterdam, New York, Elsevier, 1980, 359 p. Translated under the title *Nelinejnye differencial'nye uravnenija*, Moscow, Nauka, 1988, 308 p.
7. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and iterative processes of Fejer Type. Theory and application*. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2009, Inverse and Ill-Posed Probl. Ser. 53, 155 p. ISBN 978-3-11-021819-0.
8. Strang G. *Linear algebra and its applications*. New York, Acad. Press., 1976, 385 p. ISBN-10: 0126736502. Translated under the title *Linejnaja algebra i ee primenenija*, Moscow, Mir, 1980, 454 p.
9. Tautenhahn U. On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 191–207.
10. Vasin V.V. Modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equation. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 300–303. doi: 10.1134/S1064562415030187.
11. Ivanov V.K. The estimation of the stability of quasisolutions on noncompact sets. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij*, 1974, no. 5, pp. 97–103 (in Russian).
12. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear Ill-posed problems and its applications*. Utrecht: VSP, 2002, 296 p, Ser. Inverse and Ill-Posed Problems, book 36. ISBN-10: 906764367X.
13. Akimova E.N., Misilov V.E., Skurydina A.F., Tret'yakov A.I. Gradient methods for solving inverse gravimetry and magnetometry problems on the Uran supercomputer. *Vychislitel'nye metody i programirovanie*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 155–164 (in Russian).
14. Akimova E.N., Misilov V.E., Dergachev E.A. Algorithms for solving structural inverse magnetometry problem. *Trudy 41 sessii Mezhdunarodnogo seminara im. D.G. Uspenskogo* [Proceedings of the 41st session of the International seminar named D.G. Uspenskii]. Ekaterinburg, 2014, pp. 4–6 (in Russian).

V. V. Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: vasin@imm.uran.ru .

A. F. Skurydina, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: afinapal@gmail.com .