ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

# СВОЙСТВА СТАБИЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ[1]

**А. Л. Багно, А. М. Тарасьев**

В статье исследуется функция цены в задаче оптимального управления на бесконечном горизонте с подынтегральным индексом, входящим в функционал качества с дисконтирующим множителем. Проведен анализ ее свойств для случая, когда функционал платы управляемой системы содержит индекс качества, который представлен неограниченной функцией. Дана верхняя оценка роста функции цены. Получены необходимые и достаточные условия, при которых функция цены обладает свойствами стабильности в инфинитезимальной форме. Рассмотрен вопрос о совпадении функции цены с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса. Показана единственность соответствующего минимаксного решения. Дано описание асимптотики роста функции цены для функционалов качества логарифмического, степенного и экспоненциального видов, встречающихся в экономическом и финансовом моделировании. Полученные результаты могут быть использованы для построения сеточных методов апроксимации функции цены как обобщенного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса. Эти методы являются эффективными средствами в моделировании процессов экономического роста.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, бесконечный горизонт, функция цены, свойства стабильности.

A. L. Bagno, A. M. Tarasyev. Stability properties of the value function in an infinite horizon optimal control problem.

Properties of the value function are examined in an infinite horizon optimal control problem with an integrand index appearing in the quality functional with a discount factor. The properties are analyzed in the case when the payoff functional of the control system includes a quality index represented by an unbounded function. An upper estimate is given for the growth rate of the value function. Necessary and sufficient conditions are obtained to ensure that the value function satisfies the infinitesimal stability properties. The question of coincidence of the value function with the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation is discussed. The uniqueness of the corresponding minimax solution is shown. The growth asymptotic behavior of the value function is described for the logarithmic, power, and exponential quality functionals, which arise in economic and financial modeling. The obtained results can be used to construct grid approximation methods for the value function as the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation. These methods are effective tools in the modeling of economic growth processes.

Keywords: optimal control, Hamilton–Jacobi equation, minimax solution, infinite horizon, value function, stability properties.

**MSC:** 49K15, 49L25

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56

## Введение

Начало изучения свойств стабильности в теории оптимального управления было положено Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным в монографии [9] для решения задачи преследования и убегания. Их исследование было продолжено в работе А. И. Субботина [13], в которой были сформулированы свойства стабильности в инфинитезимальной форме, введено понятие минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби и доказаны теоремы существования, единственности и корректности. В дальнейшем эти свойства были перенесены Н. Н. Субботиной на обобщенный метод характеристик [11]. Вопросам построения вычислительных методов

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

на основе свойств стабильности в инфинитезимальной форме посвящены работы В. Н. Ушакова и его сотрудников [15].

В настоящей статье свойства стабильности используются при решении важной задачи управления на бесконечном горизонте. Ее история восходит к созданию фундаментальных моделей экономического роста Рамсея [2] и Солоу [3]. Однако математическая постановка этой задачи впервые была дана в терминах теории оптимального управления в статье И. Ц. Капуццо Дольчетта и Х. Ишии [1]. Их идеи развили Р. А. Адиатулина и А. М. Тарасьев в работе [4], где они исследовали некоторые свойства функции цены для этой задачи. Следует сказать, что систематический характер изучения задач управления с бесконечным горизонтом на основе принципа максимума Понтрягина был заложен в монографии С. М. Асеева и А. В. Кряжимского [5].

В упомянутых работах процесс описывался как управляемая система на бесконечном горизонте с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель, а также индекс качества, который представлен ограниченной функцией. Долгое время без рассмотрения оставался случай, когда индекс качества является неограниченной функцией. Этому вопросу посвящена статья М. С. Никольского [12], в которой рассматривались проблемы существования функций цены.

Далее изучение таких задач получило развитие в предыдущей статье авторов [6], в которой были изучены свойства асимптотического роста функции цены, исследована непрерывность функции цены и построены оценки для гёльдеровских параметров непрерывности. В настоящей статье эта работа продолжена в направлении анализа свойств стабильности функций цены.

В разд. 1 найдены необходимые и достаточные условия, при которых функция цены обладает свойствами стабильности, и рассматриваются важные частные случаи для функционалов качества логарифмического, степенного и экспоненциального вида, встречающихся в моделях экономического роста и финансовой математике (см. [7; 10]). В разд. 2 показано, что функция цены является единственным минимаксным решением уравнения Беллмана — Айзекса, классического для теории оптимального управления, частного случая уравнения Гамильтона — Якоби.

## 1. Свойства стабильности функции цены

В этой статье рассматривается следующая управляемая система:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ ($P$ — компакт). Функционал качества задается равенством

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия.

1. Функции $f$ и $h$ непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ при любом $p$ справедливы соотношения Липшица по аргументу $x$:

$$\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.3}$$

$$|h(x_1, p) - h(x_2, p)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.4}$$

где $L$ — константа.

3. Также для любых $x$, $p$ выполняется условие подлинейного роста по аргументу $x$:

$$\|f(x,p)\| \leqslant \varkappa(1+\|x\|), \tag{1.5}$$

$$|h(x,p)| \leqslant \varkappa(1+\|x\|), \tag{1.6}$$

где $\varkappa$ — положительная константа.

Для исследования системы будет удобно ввести переменную

$$\widetilde{y} = e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)).$$

Пусть $u(\cdot)$ — измеримое по Лебегу программное управление на конечном интервале $[t_0, T]$. Множество управлений $u(\cdot)$ на интервале $[t_0, T]$ обозначим символом $U_T$.

Определение 1. *Функцией цены в задаче с конечным горизонтом* для начальной позиции $(t_0, z_0)$, где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется величина

$$w_T(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U} \left( \widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right),$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет условию $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, $\tau$ пробегает значения внутри отрезка $[t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$.

Также нам потребуется определение функции цены в задаче с бесконечным горизонтом. Символом $U$ обозначим множество всех программных измеримых по Лебегу управлений $u(\cdot)$ на интервале $[t_0, +\infty]$.

Определение 2. *Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной позиции $(t_0, z_0)$, где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется величина

$$w(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left( \widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right), \tag{1.7}$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет условию $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, $\tau$ пробегает значения внутри отрезка $[t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$.

Заметим, что

$$w_T(t_0, z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U} \left( -\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right) = \widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \left( \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right).$$

Если мы обозначим $g(x, u) = -h(x, u)$, $y = -\widetilde{y}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, то сможем записать

$$w_T(t_0, z_0) = -\widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \left( \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right) = -\omega_T(t_0, z_0)$$

и также считать функцию $\omega_T(t_0, z_0)$ функцией цены. Отметим, что $h$ удовлетворяет свойствам (1.4) и (1.6), а для параметра $y$ справедливо

$$y = -\widetilde{y} = -e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) = e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)).$$

Таким же образом для функции цены $w(t_0, z_0)$ введем ее аналог:

$$w(t_0, z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Big( -\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \Big)$$

$$= -\, y_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Big( \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (g(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \Big) = -\omega(t_0, z_0).$$

В дальнейшем будем исследовать свойства именно функции $\omega(t_0, z_0)$.

Определим множества, которые нам потребуются дальше. Пусть $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $u \in P$, $S = \{s \in \mathbb{R}^m \colon \|s\| = 1\}$, $t \in [0, +\infty)$. Положим

$$F_1(t, x) = \mathrm{co}\{(f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)) \colon u \in P\}, \tag{1.8}$$

$$F_2(t, x, u) = (f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)).$$

Здесь символом $\mathrm{co}\{x : x \in X\}$ обозначена выпуклая оболочка множества $X$.

Определим гамильтониан задачи управления соотношением

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u\in P} (\langle s, f(x, u)\rangle + g(x, u)). \tag{1.9}$$

Нетрудно увидеть, что функция $H(x, s)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу $x$ с константой $L$ из условий (1.3), (1.4):

$$|H(x_1, s) - H(x_2, s)| \leqslant L|x_1 - x_2|. \tag{1.10}$$

Символом $Z_1(t, z)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду на каждом конечном интервале времени дифференциальному включению

$$\dot z(\tau) \in F_1(\tau, x(\tau)), \tag{1.11}$$

где $\tau \in [t, +\infty]$, и начальному условию $z(t) = z_0$.

Символом $Z_2(t, z, u)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду на каждом конечном интервале времени дифференциальному включению $\dot z(\tau) = F_2(\tau, x(\tau), u)$, $u \in P$, где $\tau \in [t, +\infty]$, и начальному условию $z(t) = z_0$.

Будем следовать терминологии [9], где движения из множеств $Z_1(t, z)$, $Z_2(t, z, u)$ называются *обобщенными движениями*. Для обобщенных движений справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть* $t_0 \in [0, +\infty)$, $z_0 = (x_0, y_0)$, $u \in P$ *и движение* $z(t) = (x(t), y(t))$, *где* $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, *лежит во множестве* $Z_1(0, (x_0, 0))$, *тогда в этом множестве* $Z_1(0, (x_0, 0))$ *также лежит и движение* $z_*(t) = (x(t - t_0), e^{-\lambda t_0} y(t - t_0) + y_0)$, *где* $t \in [t_0, +\infty)$.

Доказательство. По определению множества $Z_1(0, (x_0, 0))$

$$\dot z(\tau - t_0) \in \mathrm{co}\{f(x(\tau - t_0), u), e^{-\lambda(\tau - t_0)} g(x(\tau - t_0), u) \colon u \in P\}$$

для почти всех $\tau > t_0$. Поэтому для функции $z_*(t)$, определенной как

$$z_*(t) = (x(t - t_0), e^{-\lambda t_0} y(t - t_0) + y_0),$$

выполняется соотношение $\dot z_*(\tau) \in \mathrm{co}\{f(x_*(\tau), u), e^{-\lambda(\tau)} g(x_*(\tau), u)) \colon u \in P\}$. Так как выполнено $z_*(t_0) = (x(0), e^{-\lambda t_0} y(0) + y_0) = (x_0, y_0)$, то получаем, что $z_*(\cdot)$ лежит во множестве $Z_1(0, (x_0, 0))$.

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda > \varkappa$. Тогда для функции цены в задаче с бесконечным горизонтом справедлива оценка*

$$|\omega(t_0, z_0)| \leqslant A + B\|x_0\|, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

*где*

$$A = |y_0| + \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\lambda t_0}, \tag{1.13}$$

$$B = \frac{1}{\lambda - \varkappa} e^{-\lambda t_0}. \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\omega(t_0, z_0)$ — функция цены в задаче с бесконечным горизонтом. Покажем справедливость оценки (1.12).

По определению функции цены (1.7)

$$|\omega(t_0, z_0)| = |w(t_0, z_0)| \leqslant \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \left| y_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))|\, d\tau = |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |-h(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau$$

$$= |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |g(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau \leqslant |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{t_0}^{T} \varkappa e^{-\lambda\tau}(1 + \|x(\tau)\|)\, d\tau$$

$$\leqslant |y_0| + \lim_{T \to \infty} \int\limits_{t_0}^{T} \varkappa e^{-\lambda\tau}(1 + \|x_0\| e^{\varkappa(\tau - t_0)})\, d\tau = |y_0| + \int\limits_{t_0}^{+\infty} \varkappa e^{-\lambda\tau}\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} \varkappa \|x_0\| e^{-\lambda\tau + \varkappa(\tau - t_0)}\, d\tau$$

$$= |y_0| + \frac{\varkappa}{-\lambda} e^{-\lambda\tau} \Big|_{t_0}^{+\infty} + \frac{\|x_0\|}{-\lambda + \varkappa} e^{-\lambda\tau + \varkappa(\tau - t_0)} \Big|_{t_0}^{+\infty} = |y_0| + \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\lambda t_0} + \frac{\|x_0\|}{\lambda - \varkappa} e^{-\lambda t_0} = A + B\|x_0\|.$$

Мы получили оценку (1.12). Отметим, что условие $\lambda > \varkappa$ обеспечивает сходимость интегралов.

Теорема доказана.

Особый интерес представляют частные случаи, встречающиеся в моделях экономического роста (см., например, [7, с. 167] и [10, с. 109]), когда подынтегральный индекс $-h(x, u) = g(x, u)$ принимает одно из следующих выражений — во всех этих случаях управляющий параметр максимизируется: $G(x) = \max\limits_{u \in P} |g(x, u)|$.

1. $$G(x) = \max\{0, -ke^{-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i} + k\}, \text{ где } k > 0, \quad a_i > 0, \quad t \in [0, T]. \tag{1.15}$$

$$|\omega(t_0, z_0)| = |w(t_0, z_0)| \leqslant \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \left| y_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |g(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \| \max\{0, -ke^{-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i} + k\} \|\, d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \max\{0, -ke^{-\|x_0\| e^{\varkappa(\tau - t_0)}} + k\}\, d\tau.$$

Легко увидеть, что теперь выражение внутри максимума стало положительно. Тогда получаем

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\max\{0, -ke^{-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}+k\}\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{+\infty} -ke^{-\lambda\tau}e^{-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}+ke^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} -k\|x_0\|e^{-\lambda\tau-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} ke^{-\lambda\tau}\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} -k\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} ke^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

$$= ke^{-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}\Big|_{t_0}^{+\infty} + \frac{k}{-\lambda}e^{-\lambda\tau}\Big|_{t_0}^{+\infty} = 0 - ke^{-\|x_0\|} + \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda t_0}.$$

Итак, оценка функции цены для этого случая имеет вид

$$|\omega(t_0, z_0)| \leqslant 0 - ke^{-\|x_0\|} + \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda t_0}. \tag{1.16}$$

При $t_0 = 0$ эта оценка равна

$$-ke^{-\|x_0\|} + \frac{k}{\lambda}.$$

2.
$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}x_i^{1-b_i}, \text{ где } 0 < b_i < 1, \quad a_i > 0, \quad t \in [0, T]. \tag{1.17}$$

$$|\omega(t_0, z_0)| = |w(t_0, z_0)| \leqslant \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))\,d\tau\right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{t_0}^{T}|e^{-\lambda\tau}|\cdot|g(x(\tau), u(\tau))|\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-b_i}x_i^{1-b_i}\right\|d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{\alpha\varkappa(\tau-t_0)}\,d\tau = \beta\|x_0\|^{\alpha}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau+\alpha\varkappa\tau-\alpha\varkappa t_0}\,d\tau$$

$$= \beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau+\alpha\varkappa\tau}\,d\tau = \frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}}{\alpha\varkappa-\lambda}e^{(\alpha\varkappa-\lambda)t_0}\Big|_{t_0}^{+\infty} = \frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}}{\alpha\varkappa-\lambda}(-e^{(\alpha\varkappa-\lambda)t_0}).$$

Здесь $\beta = \max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\dfrac{a_i}{1-b_i}\right\}$; $\alpha = \max\limits_{i=1,\dots,n}\{1-b_i\}$ в случае если $\|x_0\| \geq 1$; $\alpha = \min\limits_{i=1,\dots,n}\{1-b_i\}$ в случае если $\|x_0\| < 1$.

Функция цены ограничена сверху:

$$|\omega(t_0, z_0)| \leqslant \frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}}{\alpha\varkappa-\lambda}(-e^{(\alpha\varkappa-\lambda)t_0}). \tag{1.18}$$

При $t_0 = 0$ эта оценка равна

$$\frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}}{\alpha\varkappa-\lambda}.$$

3.
$$G(x) = \max\Big\{0, \sum_{i=1}^{n} a_i\ln x_i\Big\}, \text{ где } a_i > 0, \quad t \in [0, T]. \tag{1.19}$$

$$|\omega(t_0, z_0)| = |w(t_0, z_0)| \leqslant \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))\,d\tau\right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u\in U} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |g(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \Big\| \max\Big\{0, \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i\Big\}\Big\|\, d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \max\Big\{0, \ln\|x_0\| + (\tau - t_0)\varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i\Big\}\, d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \max\{0, \ln\|x_0\|\}\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \max\Big\{0, (\tau - t_0)\varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i\Big\}\, d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \max\{0, \ln\|x_0\|\}\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} (\tau - t_0)\varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i\, d\tau$$

$$= \max\{0, \ln\|x_0\|\} \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\, d\tau - \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \varkappa t_0 \sum_{i=1}^{n} a_i\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \tau\varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i\, d\tau$$

$$= \max\{0, \ln\|x_0\|\} \frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} - \varkappa t_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} + \varkappa\tau \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} - \varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\, d\tau$$

$$\leqslant \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda} \max\{0, \ln\|x_0\|\} + \varkappa t_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda t_0}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} + \varkappa t_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda} - \varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda^2}\Big|_{t_0}^{+\infty}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda} \max\{0, \ln\|x_0\|\} + \varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda^2}.$$

Таким образом, имеем

$$|\omega(t_0, z_0)| \leqslant \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda} \max\{0, \ln\|x_0\|\} + \varkappa \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda^2}. \tag{1.20}$$

При $t_0 = 0$ эта оценка равна

$$\frac{1}{\lambda} \max\{0, \ln\|x_0\|\} + \frac{\varkappa \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\lambda^2}.$$

Отметим, что во всех трех случаях условие $\lambda > \varkappa$ не используется.

В статье [6, лемма 4] было показано, что функция цены $\omega(t, z)$ представима в виде

$$\omega(t, z) = y + e^{-\lambda t}\omega(0, x, 0).$$

Используя этот факт, мы докажем следующую теорему. Для удобства дальнейших выкладок обозначим $v(x) = \omega(0, (x, 0))$ и будем называть эту функцию *стационарной функцией цены.*

**Теорема 2.** *Пусть* $\lambda > \varkappa$. *Функция* $v\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *является функцией цены задачи оптимального управления* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.*

1. *Функция* $v$ *непрерывна и для любого момента времени* $t \in [0, +\infty)$ *она ограничена:*

$$|v(x)| \leqslant A + B\|x\|,$$

*где параметры $A$ и $B$ удовлетворяют соотношениям* (1.13), (1.14).

2. *Для всех $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ существуют движения $z(t) = (x(t), y(t))$, где $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, из множества $Z_1(0, (x, 0))$ (из множества решений дифференциального включения* (1.11)*, правая часть которого порождается выпуклой оболочкой* (1.8) *по управлениям $u \in P$) такие, что*

$$e^{-\lambda t} v(x(t)) + y(t) \leqslant v(x). \tag{1.21}$$

3. *Для всех $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ найдутся движения $z(t) = (x(t), y(t))$ из множества $Z_2(0, (x, 0), u)$, где $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, такие, что*

$$e^{-\lambda t} v(x(t)) + y(t) \geqslant v(x). \tag{1.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v$ — функция цены задачи (1.1) (1.2). Покажем, что выполняются условия 1–3. Начнем с первого условия. По теореме 1 имеем

$$|v(x)| = |\omega(0, (x, 0))| \leq A + B\|x\|, \quad \text{где} \quad A = \frac{\varkappa}{\lambda}, \quad B = \frac{1}{\lambda - \varkappa}.$$

Покажем справедливость условия 2. По определению цены игры для любого положительного $\varepsilon$ найдется стратегия $u$ такая, что

$$\lim_{\theta \to +\infty} y(\theta) \leqslant v(x_0) + \varepsilon$$

для всех $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$. Следовательно,

$$y_0(t) + e^{-\lambda t} v(x_0(t)) = \omega(t, z_0(t)) = \sup_u \lim_{\theta \to +\infty} y(\theta) \leqslant v(x_0) + \varepsilon.$$

Здесь $u \in U$, $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$. Итак, для любого положительного $\varepsilon$ нашлось движение $z_0$ такое, что выполняется условие 2. Условие 3 доказывается аналогично.

Теперь покажем справедливость утверждения в обратную сторону. Пусть некоторая функция $\varphi$ удовлетворяет условиям 1–3 и $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Покажем, что $\varphi(x_0) = v(x_0)$. По условию 2 найдется движение $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot)) \in Z_1(0, (x_0, 0))$ такое, что $e^{-\lambda(t-t_0)} \varphi(x(t-t_0)) + y(t-t_0) \leqslant \varphi(x_0)$. Дважды пользуясь условием 2, получаем

$$e^{-\lambda t} \varphi(x(t - t_0)) + e^{-\lambda t_0} y(t - t_0) + y_0 \leqslant e^{-\lambda t_0} \varphi(x_0) + y_0 \leqslant \varphi(x_0).$$

По лемме 1 движение $(x(\tau - t_0), e^{-\lambda t_0} y(\tau - t_0) + y)$, где $\tau \in [t_0, +\infty)$, лежит во множестве $Z_1(t_0, x_0)$, $z_0 = (x_0, y_0)$. Теперь можно воспользоваться леммой 15.1 из [9]. А именно для каждого числа $T \in (0, +\infty)$ найдется стратегия $u$ такая, что для любого движения $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ выполняется неравенство $e^{-\lambda T} \varphi(x(T)) + y(T) \leqslant \varphi(x_0)$. Пользуясь теоремой 1, можем записать

$$-e^{-\lambda T} (A + B\|x(T)\|) + y(T) \leqslant \varphi(x_0), \tag{1.23}$$

откуда по определению цены $\omega_T(0, (x_0, 0))$ получим

$$-e^{-\lambda T} (A + B\|x(T)\|) + w_T(0, (x_0, 0)) \leqslant \varphi(x_0), \quad T \in (0, +\infty).$$

Теперь воспользуемся неравенством Гроноулла:

$$-e^{-\lambda T} A - e^{-\lambda T} B\|x_0\| e^{\varkappa(\tau - t_0)} + w_T(0, (x_0, 0)) \leqslant \varphi(x_0), \quad T \in (0, +\infty).$$

Далее устремим $T$ к бесконечности. Первое слагаемое, очевидно, стремится к нулю, второе слагаемое также стремится к нулю, поскольку $\lambda > \varkappa$. В результате имеем $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$. Аналогично можно показать, что $v(x_0) \geqslant \varphi(x_0)$.

Теорема доказана.

Сделаем замечание относительно формулировки теоремы 2 для частных случаев (1.15), (1.17), (1.19). При выводе оценок для их функций цены условие $\lambda > \varkappa$ не требуется. В доказательстве теоремы 2 данное условие необходимо для выполнения оценки (1.23), являющейся аналогом оценок (1.16), (1.18), (1.20). Таким образом, для рассмотренных случаев условие $\lambda > \varkappa$ в формулировке теоремы 2 можно опустить.

## 2. Связь функции цены с минимаксными решениями уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса

В данном разделе мы будем рассматривать уравнение вида

$$-\varphi + \frac{1}{\lambda}\min_u(\langle \nabla\varphi, f(x,u)\rangle + g(x,u)) = 0. \tag{2.1}$$

Введем некоторые обозначения и определения, которые нам потребуются дальше:

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \|s\| = 1\}, \quad A(x) = \{f \in \mathbb{R}^n \colon \|f\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1+\|x\|)\},$$

$A_{\text{в}}(x,q) = \{f \in A(x) \colon \langle f,q\rangle \geqslant H(x,q)\}, \quad A_{\text{н}}(x,p) = \{f \in A(x) \colon \langle f,p\rangle \leqslant H(x,p)\}$, где $q,p \in \mathbb{R}^n$.

Будем считать, что выполнено условие $\lambda > \varkappa$.

Символом $X_{\text{в}}(x,q)$ ($X_{\text{н}}(x,p)$) обозначим множества абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих при почти всех $t$ дифференциальным включениям

$$\dot{x}(t) \in A_{\text{в}}(x,q) \quad (\dot{x}(t) \in A_{\text{н}}(x,p)).$$

Напомним основные определения [13].

*Верхним решением* уравнения (2.1) называется полунепрерывная снизу функция $\varphi$ такая, что $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $q \in S$ найдутся функции $z_{\text{в}} = (x_{\text{в}}(\cdot), y_{\text{в}}(\cdot))$ из множества $X_{\text{в}}(x,q)$, удовлетворяющие условию

$$e^{-\tau}\varphi(x_{\text{в}}(\tau)) + y_{\text{в}}(\tau) \leqslant \varphi(x). \tag{2.2}$$

*Нижним решением* уравнения (2.1) называется полунепрерывная сверху функция $\varphi$ такая, что $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $p \in S$ найдутся функции $z_{\text{н}} = (x_{\text{н}}(\cdot), y_{\text{н}}(\cdot))$ из множества $X_{\text{н}}(x,p)$, удовлетворяющие условию

$$e^{-\tau}\varphi(x_{\text{н}}(\tau)) + y_{\text{н}}(\tau) \geqslant \varphi(x). \tag{2.3}$$

Непрерывная функция $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, являющаяся одновременно верхним и нижним решениями уравнения (2.1), называется *минимаксным решением* этого уравнения.

*Нижней* (*верхней*) *производной Дини по направлению* $d$ называется функция

$$\partial_-\omega(x)|(d) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \inf_{(\delta,d')\in\Delta_\varepsilon(x,d)} \frac{\omega(x+\delta d') - \omega(x)}{\delta}$$

$$\Big(\partial_+\omega(x)|(d) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{(\delta,d')\in\Delta_\varepsilon(x,d)} \frac{\omega(x+\delta d') - \omega(x)}{\delta}\Big),$$

где $\Delta_\varepsilon(x,d) = \{(\delta,d') \in (0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^n \colon \|d-d'\| \leqslant \varepsilon\}$.

Для свойств стабильности (1.21), (1.22) известны следующие два утверждения (подробнее см. теоремы 5.4 и 5.5 в [14]).

**Утверждение 1.** *Пусть $\varphi$ — непрерывная функция. Тогда условия* (1.21), (1.22) *эквивалентны* (2.4), (2.5)*:*

$$\min_{d=(d_1,d_2)\in A_{в}(x,q)}\{d_2 + \partial_-\varphi(x)|(d_1)\} - \varphi(x) \leqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\max_{d=(d_1,d_2)\in A_{н}(x,p)}\{d_2 + \partial_+\varphi(x)|(d_1)\} - \varphi(x) \geqslant 0. \tag{2.5}$$

**Утверждение 2.** *Пусть $\varphi$ — непрерывная функция. Тогда условия* (2.4), (2.5) *эквивалентны* (2.6), (2.7)*:*

$$\sup_{d\in\mathbb{R}}\{\langle s,d\rangle - \partial_-\varphi(x)|(d)\} \geqslant -\varphi(x) + H(x,s), \tag{2.6}$$

$$\inf_{d\in\mathbb{R}}\{\langle s,d\rangle - \partial_+\varphi(x)|(d)\} \leqslant -\varphi(x) + H(x,s). \tag{2.7}$$

**Лемма 2.** *Любое нижнее решение уравнения* (2.1), *удовлетворяющее условиям подлинейного роста* (1.5), (1.6), *не превосходит любое верхнее решение, т. е.* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_{в}(x) \geqslant \varphi_{н}(x). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi_{\text{в}}(x)$, $\varphi_{\text{н}}(x)$ — верхнее и нижнее решения, удовлетворяющие условиям подлинейного роста (1.12). Возьмем $k \in \mathbb{N}$. Полагаем

$$N_k = 2^k, \quad T_k = k, \quad \delta_k = \frac{T_k}{N_k},$$

где $i \in \{0, 1, \cdots N_k\}$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x_{\text{в}}^k}(t) \in A_{\text{в}}(x_{\text{в}}^k(\tau_{ik}), \varphi(x_{\text{в}}^k(\tau_{ik}))), \quad \dot{x_{\text{н}}^k}(t) \in A_{\text{н}}(x_{\text{н}}^k(\tau_{ik}), \varphi(x_{\text{н}}^k(\tau_{ik}))),$$

где $t \in [\tau_{ik}, \tau_{i+1k})$, $i = \overline{0, N_k - 1}$, с начальными условиями $x_{\text{в}}^k(0) = x_{\text{н}}^k(0) = x_0$. Выберем решения включений так, чтобы они были непрерывны в точках $\tau_{ik}$ и выполнялись неравенства

$$\varphi_{\text{в}}(x_{\text{в}}^k(\tau_{i+1k})) \leqslant \varphi_{\text{в}}(x_{\text{в}}^k(\tau_{ik})), \quad \varphi_{\text{н}}(x_{\text{н}}^k(\tau_{i+1k})) \geqslant \varphi_{\text{н}}(x_{\text{н}}^k(\tau_{ik})).$$

Отсюда и из определений верхнего (2.2) и нижнего решения (2.3) следует, что

$$\varphi_{\text{в}}(x) \geqslant e^{-T_k}\varphi_{\text{в}}(x_{\text{в}}^k(T_k)) + y_{\text{в}}^k(T_k), \quad \varphi_{\text{н}}(x) \leqslant e^{-T_k}\varphi_{\text{н}}(x_{\text{н}}^k(T_k)) + y_{\text{н}}^k(T_k).$$

Теперь, если мы покажем, что $x_{\text{в}}(\cdot) = x_{\text{н}}(\cdot)$, то отсюда легко будет следовать, что нижнее решение не превосходит верхнее. Для этого докажем, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{\text{в}}^k(\cdot) - x_{\text{н}}^k(\cdot)\| = 0$. Обозначим

$$M = \max\{\sqrt{2}\varkappa(1 + \|x\|) \colon x \in A(x)\}.$$

Так как $\dot{x}_{\text{в}}^k(\cdot)$ и $\dot{x}_{\text{н}}^k(\cdot)$ содержатся во множестве $A(x)$, то

$$\|\dot{x}_{\text{в}}^k(t)\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x_{\text{в}}^k\|) \leqslant M, \quad \|\dot{x}_{\text{н}}^k(t)\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x_{\text{н}}^k\|) \leqslant M.$$

Отсюда следует $\|x_{\text{в}}^k(t) - x_{\text{в}}^k(\tau_{ik})\| \leqslant M\delta_k$, $\|x_{\text{н}}^k(t) - x_{\text{н}}^k(\tau_{ik})\| \leqslant M\delta_k$. Для упрощения дальнейших выкладок примем $s_k(t) = x_{\text{н}}^k(t) - x_{\text{в}}^k(t)$. По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\langle s_k(t) - s_k(\tau_{ik}), \dot{x}_{\text{н}}^k(t) - \dot{x}_{\text{в}}^k(t)\rangle$$
$$\leqslant \|x_{\text{в}}^k(t) - x_{\text{в}}^k(\tau_{ik})\|\|\dot{x}_{\text{н}}^k(t) - \dot{x}_{\text{в}}^k(t)\| + \|x_{\text{н}}^k(t) - x_{\text{н}}^k(\tau_{ik})\|\|\dot{x}_{\text{н}}^k(t) - \dot{x}_{\text{в}}^k(t)\| \leqslant 4M^2\delta_k. \tag{2.9}$$

По определению $x_{\text{в}}^k(t)$ и $x_{\text{в}}^k(\tau_{ik})$ и свойствам подлинейного роста (1.12) уравнения (2.1) выводим

$$x_{\text{в}}^k(t) \in A_{\text{в}}(x_{\text{в}}^k(t)) \subseteq A_{\text{в}}(x_{\text{н}}^k(t)) \subseteq A_{\text{в}}(x(t)), \quad x_{\text{н}}^k(t) \in A_{\text{н}}(x_{\text{н}}^k(t)) \subseteq A_{\text{н}}(x(t)).$$

По определению множеств $A_{\text{в}}(x)$ и $A_{\text{н}}(x)$ получаем

$$\langle s_k(\tau_{ik}), x_{\text{в}}^k(t)\rangle \geqslant H(x_{\text{в}}^k(t), \varphi_{\text{н}}(x(t))), \quad \langle s_k(\tau_{ik}), x_{\text{н}}^k(t)\rangle \leqslant H(x_{\text{в}}^k(t), \varphi_{\text{н}}(x(t))).$$

Благодаря липшицевости функции $H(x, s)$ (1.10) можем записать

$$\langle s_k(\tau_{ik}), \dot{x}_{\text{н}}^k(t) - \dot{x}_{\text{в}}^k(t)\rangle \leqslant L\|s_k(\tau_{ik})\| \cdot \|s_k(t)\|.$$

Заметим, что

$$\|s_k(\tau_{ik})\| - \|s_k(t)\| \leqslant \|s_k(\tau_{ik}) - s_k(t)\| \leqslant 2M\delta_k, \quad \|s_k(t)\| \leqslant \|x_{\text{н}}^k(t) - x\| + \|x_{\text{в}}^k(t) - x\| \leqslant 2MT_k.$$

Отсюда следует, что $\langle s_k(\tau_{ik}), \dot{s}^k_{\text{н}}(t)\rangle \leqslant L\|s_k(t)\|^2 + 4LM^2\delta_k T_k$. Преобразуя левую часть и пользуясь оценкой (2.9), получаем

$$\frac{d\|s_k(t)\|^2}{dt} = 2\langle s_k(t), \dot{s}_k(t)\rangle = 2\langle s_k(\tau_{ik}), \dot{s}_k(t)\rangle + 2\langle s_k(t) - s_k(\tau_{ik}), \dot{s}_k(t)\rangle$$

$$\leqslant 2L\|s_k(t)\|^2 + 8M^2\delta_k(LT_k + 1).$$

Учитывая это и соотношение $\|s_k(0)\|^2 = 0$, имеем

$$\|s_k(t)\|^2 = \int\limits_0^t \frac{d\|s_k(\tau)\|^2}{dt} d\tau \leqslant 2L\int\limits_0^t \|s_k(t)\|^2 d\tau + 8M^2\delta_k(LT_k+1)T_k.$$

По неравенству Гронуолла можем записать

$$\|s_k(t)\|^2 \leqslant 8M^2\delta_k(LT_k+1)T + e^{2LT_k} 8M^2\delta_k L(LT_k+1)T_k^2.$$

Устремив $k \to +\infty$, получаем $\lim\limits_{k\to+\infty}\|s^k(T_k)\| = \lim\limits_{k\to+\infty}\|x^k_{\text{в}}(T_k) - x^k_{\text{н}}(T_k)\| = 0$. Отсюда, из определений верхнего (2.2) и нижнего решения (2.3), выбора $\{T_k\}_1^\infty$ и условий подлинейного роста (1.12) следует, что

$$\varphi_{\text{в}}(x) \geqslant \varphi_{\text{н}}(x).$$

Лемма доказана.

**Теорема 3.** *Существует единственное минимаксное решение уравнения* (2.1)*, удовлетворяющее условию подлинейного роста* (1.12)*.*

Доказательство. По определению минимаксного решения оно одновременно является и верхним, и нижним решением. Другими словами, для него справедливо равенство

$$\varphi_{\text{в}}(x) = \varphi_{\text{н}}(x). \tag{2.10}$$

Предположим, что уравнение (2.1) имеет другое минимаксное решение, для которого

$$\varphi_{\text{в}}(x) = \varphi_{\text{н}}(x). \tag{2.11}$$

По лемме 2 $\varphi_{\text{н}}(x) \leqslant \varphi_{\text{в}}(x)$. Отсюда, из (2.10) и (2.11) следует $\varphi_{\text{в}}(x) \leqslant \varphi_{\text{н}}(x)$. Однако строгое неравенство противоречит условию (2.8) леммы 2. Таким образом,

$$\varphi_{\text{н}}(x) = \varphi_{\text{в}}(x) = \varphi_{\text{н}}(x) = \varphi_{\text{в}}(x),$$

т. е. оба минимаксных решения совпадают.

Теорема доказана.

Перед доказательством следующей теоремы напомним, что функция $v(x) = \omega(0,(x,0))$ — стационарная функция цены.

**Теорема 4.** *Функция цены $v$ задачи* (1.1), (1.2) *является минимаксным решением уравнения* (2.1)

$$-\varphi + \frac{1}{\lambda}\min_u(\langle\nabla\varphi, f(x,u)\rangle + g(x,u)) = 0,$$

*которое удовлетворяет условию подлинейного роста*

$$|\omega(t,x)| \leqslant A + B\|x\|, \tag{2.12}$$

*где параметры $A$ и $B$ удовлетворяют соотношениям* (1.13), (1.14)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что выполняется неравенство

$$\min\{d_2 + \partial_- v(x)|(d_1)\colon d = (d_1, d_2) \in F_1(0,x)\} \leqslant \lambda v(x). \tag{2.13}$$

Рассмотрим разбиение временной оси $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда по условию 2 из теоремы 2 найдется движение $z_k(\cdot) = (x_k(\cdot), y_k(\cdot))$ из множества $Z_1(0,(x,0))$ такое, что

$$v(x) \geqslant e^{-\lambda\tau_k} v(x_k(\tau_k)) + y_k(\tau_k).$$

Добавим в обе части слагаемое $-e^{-\lambda\tau_k}v(x)$ и поделим на $\tau_k$:

$$\frac{v(x) - e^{-\lambda\tau_k}v(x)}{\tau_k} \geqslant e^{-\lambda\tau_k}\frac{v(x_k(\tau_k)) - v(x)}{\tau_k} + \frac{y_k(\tau_k)}{\tau_k}.$$

Отметим, что функции $z_k(\cdot)$ локально липшицевы, так как функции $f$ и $g$ ограничены на каждом компактном множестве. Для локально липшицевых функций справедлива теорема о среднем [8, с. 12], по которой

$$z_k(\tau_k) = (x,0) + d_k\tau_k,$$

здесь $d_k \in F_1(\theta_k\tau_k, x_k(\theta_k\tau_k))$, $\theta_k \in (0,1)$, $k = 1,2,\ldots$. Поскольку многозначное отображение $F_1(t,x)$ непрерывно, то $F_1(\theta_k\tau_k, x_k(\theta_k\tau_k))$ сходится к компакту $F_1(0,x)$ при $k \to \infty$. Поэтому найдется вектор $d = (d_1,d_2) \in F_1(0,x)$, являющийся пределом некоторой последовательности из $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{z_k(\tau_k) - (x,0)}{\tau_k} = d = (d_1,d_2).$$

По определению нижней производной Дини по направлению

$$\partial_- v(x)|(d_1) \leqslant \frac{v(x_k(\tau_k)) - v(x)}{\tau_k}.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, получаем $\lambda v(x) \geqslant \partial_- v(x)|(d_1) + d_2$, т. е. выполняется неравенство (2.13). Очевидно, что

$$\sup\{\langle s,d\rangle - \partial_- v(x)|(d)\colon d \in \mathbb{R}^m\} \geqslant \langle s,d_1\rangle - \partial_- v(x)|(d_1) \geqslant \langle s,d_1\rangle + d_2 - \lambda v(x)$$

$$\geqslant \min\{\langle s,d_1\rangle + d_2\colon d = (d_1,d_2) \in F_1(0,x)\} - \lambda v(x).$$

Отсюда, из определений множества $F_1(0,x)$ (1.8) и уравнения $H(x,s)$ (1.9) следует

$$\sup\{\langle s,d\rangle - \partial_- v(x)|(d)\colon d \in \mathbb{R}^m\} \geqslant -\lambda v(x) + \min_u(\langle s, f(x,u)\rangle + g(x,u)),$$

где $u \in P$. Аналогично получаем второе неравенство

$$\inf\{\langle s,d\rangle - \partial_+ v(x)|(d)\colon d \in \mathbb{R}^m\} \leqslant -\lambda v(x) + \min_u(\langle s, f(x,u)\rangle + g(x,u))$$

для всех $x, s \in \mathbb{R}^m$, где $u \in P$. Из последних двух оценок, определения минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса вида $-\varphi + H(x,\nabla\varphi) = 0$, утверждений 1 и 2 следует, что функция $v$ является удовлетворяющим условию подлинейного роста (2.12) минимаксным решением уравнения

$$-\lambda\varphi + \min_u(\langle\nabla\varphi, f(x,u)\rangle + g(x,u)) = 0. \tag{2.14}$$

Согласно теореме 3 функция $v$ — единственное минимаксное решение уравнения (2.14). Поделив (2.14) на $\lambda$, получим уравнение (2.1).

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H.** Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11, no. 2. P. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176 .
2. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December 1928. P. 543–559. doi: 10.2307/2224098 .
3. **Solow R.M.** Technical change and the aggregate production function // The Review of Economics and Statistics. 1957. Vol. 39, no. 3. P. 312–320. doi: 10.2307/1926047 .
4. **Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.** Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 531–537.
5. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.
6. **Багно А.Л., Тарасьев А.М.** Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 3–14. doi: 10.20537/vm160101 .
7. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ. Г.И.Жуковой, Ф.Я.Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.
8. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
9. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. **Крушвиц Л.** Финансирование и инвестиции / пер. с нем.; под ред. В.В.Ковалев, З.А.Сабов. СПб.: Питер, 2000. 381 с.
11. Метод характеристик для уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова / УрО РАН. Екатеринбург, 2013. 244 с.
12. **Никольский М.С.** О локальной липшицевости функции Беллмана в одной оптимизационной задаче // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, no. 2. С. 106–115.
13. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
14. **Султанова Р.А.** Минимаксные решения уравнений в частных производных: дис. ... канд. физ.-матем. наук / Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького. Екатеринбург, 1995. 192 с.
15. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Успенский А.А.** Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.


Поступила 1.11.2016

Багно Александр Леонидович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН,
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: tam@imm.uran.ru

## REFERENCES


1. Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optimiz*, 1984, vol. 11, no. 2, pp. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176 .
2. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, December 1928, pp. 543–559. doi: 10.2307/2224098 .
3. Solow R.M. Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, 1957, August, Vol. 39, no. 3, pp. 312–320. doi: 10.2307/1926047 .
4. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M. A differential game of unlimited duration. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 415–420. doi: 10.1016/0021-8928(87)90077-3 .

5. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/s0081543807020010 .
6. Bagno A.L.,Tarasyev A.M. Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3–14 (in Russian).
7. Intriligator M. *Mathematical Optimization and Economic Theory.* Philadelphia: SIAM, 2002, Ser. Classics Appl. Math., 499 p. Translated under the title *Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaya teoriya.* Moscow, AIRIS PRESS, 2002, 576 p. doi: 10.1137/1.9780898719215 .
8. Clarke F. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* New York: Wiley Interscience, 1983, 308 p. doi: 10.1137/1.9781611971309 . Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
10. L. Kruschwitz. *Finanzierung und Investition.* München/Wien: Oldenbourg Verlag, 1999, 408 S. Translated under the title *Finansirovanie i investitsii.* St. Petersburg, Piter Publ., 2000, 381 p. doi: 10.1524/9783486716078 .
11. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi– Bellmana* [The method of characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation]. Yekaterinburg, 2013, 244 p.
12. Nikol'skii M.S. On the local Lipschitz property of the Bellman function in an optimization problem. Proc. Steklov Inst. Math, 2004, suppl. 2, pp. S115–S125.
13. Subbotin A.I. *Minimaxnye neravenstva i uravneniya Gamiltona — Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p. (in Russian).
14. Sultanova R.A. *Minimaksnye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Minimax solutions of partial differential equations]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Yekaterinburg, 1995, 192 p. (in Russian).
15. Tarasyev A.M., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Approximation schemes and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Izv. Akad. Sci. Tekhn. Kibernet*, 1994, no. 3, pp. 173–185 (in Russian).

*A. L. Bagno*, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: bagno.alexander@gmail.com .

*A. M. Taras'ev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: tam@imm.uran.ru .