ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 519.6

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ С УСЛОВИЯМИ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ[1]

А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов

Рассматривается задача последовательного обхода замкнутых множеств в компактном метрическом пространстве, осложненная ограничениями в виде условий предшествования и возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий. Исследуется вариант аппроксимативной реализации экстремума посредством применения моделей, использующих задачи последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств). Данный вариант естественным образом вкладывается в более общую конструкцию, связанную с последовательным посещением конечной системы непустых замкнутых множеств (НЗМ) в метризуемом компакте. Само же пространство НЗМ оснащается метрикой Хаусдорфа, в терминах которой оценивается (при соответствующем условии непрерывности сечений функций стоимости) близость экстремумов упомянутой задачи последовательного обхода для двух любых систем НЗМ (подразумевается, что количество НЗМ в каждой системе одно и то же). При этом ограничения в виде условий предшествования сохраняются.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov. A discrete–continuous routing problem with precedence conditions.

We consider the problem of visiting closed sets in a compact metric space complicated by constraints in the form of precedence conditions and a possible dependence of the cost function on a list of tasks. We study a variant of the approximate realization of the extremum by applying models that involve problems of sequential visits to megalopolises (nonempty finite sets). This variant is naturally embedded into a more general construction that implements sequential visits to nonempty closed sets (NCSs) from a finite system in a metrizable compactum. The space of NCSs is equipped with the Hausdorff metric, which is used to estimate (under the corresponding condition that the sections of the cost functions are continuous) the proximity of the extrema in the problem of sequential visits for any two systems of NCSs (it is assumed that the numbers or NCSs in the systems are the same). The constraints in the form of precedence conditions are preserved.

Keywords: route, path, precedence conditions.

MSC: 49L20, 90C39

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-275-292

Введение

В исследованиях свердловской школы Н. Н. Красовского по теории управления большое внимание уделялось решению конкретных задач и разработке соответствующих численных методов. Данное направление занимает важное место в работах Н. Н. Субботиной, связанных с построением обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби, и в работах В. Н. Ушакова, касающихся построения множеств достижимости и стабильных мостов, используемых при решении дифференциальных игр. Упомянутые стабильные мосты играют важную роль в связи с фундаментальной теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина.

В предлагаемой статье методы вычислений рассматриваются для других задач, которые, однако, объективно также связаны с процессами управления и возникают во многих приложениях, включающих элементы маршрутизации перемещений при выполнении совокупности заданий. В исследованиях такого рода применяется динамическое программирование (ДП), которое активно используется и в традиционных задачах управления.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 15-01-07909, 16-01-00505, 16-01-00649) и комплексной программы УрО РАН (проект 15-16-1-8).

В известной [1–3] инженерной задаче управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ предполагается обычно, что возле контуров вырезаемых деталей намечены некоторые упорядоченные пары (УП) точек, одна из которых принимается как возможная точка врезки (ВТВ), а вторая — как соответствующая ей точка выключения инструмента. Получающиеся (конечные) множества, связанные с контурами, рассматриваются как своеобразные мегаполисы, которые должны последовательно посещаться инструментом с целью осуществления резки упомянутых контуров (см. [1–3] и др.). Сам процесс резки осложнен ограничениями различных типов, среди которых выделим сейчас так называемые условия предшествования (условия типа "одно после другого"). Так, в частности, у каждой детали внутренние контуры должны вырезаться раньше внешнего.

Точки врезки и (соответствующие им) точки выключения инструмента обычно (при резке по замкнутому контуру) близки и на этапе качественного исследования могут отождествляться. Дополнительные затраты, связанные с врезкой (пробивкой материала), могут быть включены в стоимости внешних перемещений. Возникают, однако, вопросы: где именно следует располагать ВТВ и сколько их должно быть? В частности, возникает и понятная идеализация: с каждым контуром можно связывать континуум ВТВ, располагаемых уже на "непрерывной" эквидистанте. Во всяком случае, данную возможность следует рассматривать как своеобразный ориентир, приближение к которому осложнено, однако, трудностями вычислительной реализации.

Из приводимых ниже построений вытекает (при естественных для приложений условиях на функции стоимости) возможность приближения по результату вышеупомянутой "непрерывной" (а точнее, дискретно-непрерывной) задачи соответствующими задачами с дискретизацией множества ВТВ.

Отметим, что подобные проблемы имеют место и в других прикладных задачах. В частности, это касается важной инженерной задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации (см., например, [4]). Полезно отметить, что в данной задаче стоимости перемещений (дозы радиации) зависят от списка заданий, не выполненных на момент перемещения: "светят" те и только те фрагменты оборудования, которые не были демонтированы. Как результат, суммарная доза радиации, полученная работником, существенно зависит от маршрута и конкретной траектории движения.

Имея в виду возможность различных применений, в статье рассматривается достаточно общая постановка дискретно-непрерывной задачи маршрутизации с ограничениями, для которой изучаются возможности, связанные с аппроксимацией в классе моделей, использующих задачи дискретной оптимизации (ДО), подобные [5–7]. Применяемая логика исследования допускает аналогию с [8], где рассматривался частный случай постановки настоящей работы.

Следует заметить, что сами потенциально реализуемые задачи ДО имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК) [9–13], но обладают целым рядом особенностей качественного характера. Нас интересуют сейчас задачи с "большими" мегаполисами. Решение таких задач сопряжено с серьезными трудностями в части вычислений; речь идет о затруднениях, обусловленных ограничениями. В [5–7] разработаны методы решения задач ДО упомянутого типа, восходящие к [14] и базирующиеся на идеях широко понимаемого ДП. В этой связи отметим работы [15; 16], посвященные применению ДП для решения ЗК. В процедурах [5–7; 14] используется схема ДП, учитывающая эффект ограничений различных типов (см., кроме того, [17; 18] в случае аддитивного агрегирования затрат, а также [19; 20] в случае маршрутной задачи "на узкие места").

В настоящей статье упомянутый вариант ДП предлагается использовать при решении задач ДО, аппроксимирующих в нужном смысле исходную дискретно-непрерывную маршрутную задачу. При этом реализуется приближение по результату (экстремумы задач ДО, применяемых для целей аппроксимации, близки к экстремуму исходной дискретно-непрерывной задачи), а оптимальные решения упомянутых задач ДО, являющихся маршрутными задачами о посещении "больших" мегаполисов, соблюдают все ограничения этой исходной задачи.

Таким образом, схема решения на основе варианта ДП, используемого в [5–7; 14] и ряде других работ, определяет потенциально реализуемую возможность приближенного построения оптимального решения исходной задачи (условия, налагаемые на параметры последней, не являются обременительными и учитывают особенности многих прикладных задач упомянутого типа).

1. Общие сведения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, пропозициональные связки. В дальнейшем $\varnothing$ обозначает пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу “по определению”. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Если a и b — объекты, то через $\{a; b\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее в виде своих элементов a, b и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта s в виде $\{s\} \triangleq \{s; s\}$ имеем синглетон, содержащий s: $s \in \{s\}$. Всякое множество — объект. Поэтому для любых двух объектов x и y определена [21, с. 87] УП $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ упомянутых объектов (в [21, с. 87] для аналогичной цели использовалось обозначение $\langle x, y\rangle$); x есть первый, y — второй элементы УП (x, y)). Во многих случаях УП удобно рассматривать как целое и обозначать одной буквой. Тогда если z есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H)\setminus\{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H); $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую; $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$. Если $p \in \mathbb{N}_o$ и $q \in \mathbb{N}_o$, то

$$\overline{p, q} \triangleq \{t \in \mathbb{N}_o \mid (p \leqslant t) \,\&\, (t \leqslant q)\}$$

(при $q < p$ имеем $\overline{p, q} = \varnothing$; $\overline{1, k} = \{t \in \mathbb{N} \mid t \leqslant k\}$ при $k \in \mathbb{N}$). Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$, а также непустое множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [22, с. 87] интервала $\overline{1, |K|}$ на K. Как обычно, $|\varnothing| \triangleq 0$. Перестановка непустого множества Λ есть биекция Λ на себя (см. [22, с. 87]).

Если A и B — непустые множества, то через B^A обозначаем (непустое) множество всех отображений из A в B (см. [21, с. 77]). При $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a. Условимся, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами. С учетом этого для любых множества T и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $T^{\overline{1,n}}$ используем, как обычно, обозначение T^n. При этом, конечно,

$$T^n = \underbrace{T \times \cdots \times T}_{n},$$

а элементами T^n являются кортежи “длины” n (строго говоря, это отображения из $\overline{1, n}$ в T).

Если S — непустое множество, то полагаем, что $\mathcal{R}_+[S]$ есть def множество всех функций из S в $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$; $\mathcal{R}_+[S]$ — множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S.

Наряду с УП используем триплеты, также определяемые посредством УП: если a, b и c — объекты, то [23, с. 17] $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$ есть УП с первым элементом (a, b) и вторым элементом c. Для любых трех непустых множеств A, B и C, как обычно [23, с. 17], $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. Если, кроме того, D — непустое множество, $\varphi \in D^{A\times B\times C}$, $x \in A \times B$ и $y \in C$, то для $\varphi(x, y) \in D$ используем также обозначение $\varphi(x_1, x_2, y)$, где $x_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(x)$ и $x_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(x)$.

Далее используются простейшие свойства метризуемых топологических пространств (ТП) и непрерывных в/з функций на упомянутых пространствах (см. [24, гл. 4]).

2. Обсуждение задачи

Рассмотрим сначала некоторые специальные понятия и обозначения, фиксируя в дальнейшем компактное метрическое пространство (X, ρ), $X \neq \varnothing$. Итак, $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ есть метрика (на X), порождающая топологию τ на множестве X. Следовательно, (X, τ) — непустой метризуемый компакт. Через $\mathcal{F}$ обозначаем семейство всех непустых замкнутых (в (X, τ)) п/м X; множества из $\mathcal{F}$ компактны в (X, τ), $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}'(X)$.

Фиксируем далее $x^o \in X$ в качестве базы рассматриваемых процессов, а также $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. Кортежи $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, являющиеся каждый отображением

$$(F_i)_{i \in \overline{1,N}}\colon \overline{1,N} \longrightarrow \mathcal{F},$$

играют роль совокупностей целевых множеств (ЦМ) в определяемых далее “аддитивных” задачах маршрутизации: полагая (здесь и далее) $\mathbb{P} \overset{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, рассматриваем процессы

$$(x_o \overset{\triangle}{=} x^o) \to (x_1 \in F_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_N \in F_{\alpha(N)}), \tag{2.1}$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$ подлежит выбору исследователем наряду с $(x_1, \ldots, x_N)$. Перестановку α в (2.1) именуем *маршрутом*, а кортеж точек, выбираемых из ЦМ, — *трассой* или *траекторией процесса*. Через $\mathfrak{X}$ обозначаем множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0,N}}\colon \overline{0,N} \longrightarrow X.$$

Среди кортежей из $\mathfrak{X}$ выделяем трассы, согласованные с тем или иным маршрутом: при $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ полагаем, что

$$\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}] \overset{\triangle}{=} \{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X} \mid (x_o = x^o) \,\&\, (x_t \in F_{\alpha(t)} \ \forall\, t \in \overline{1,N})\}, \tag{2.2}$$

получая непустое множество. Сам же выбор $\alpha \in \mathbb{P}$ может быть стеснен ограничениями.

Условия предшествования. Фиксируем $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$. Итак, $\mathbf{K}$ есть п/м $\overline{1,N} \times \overline{1,N}$. При $z \in \mathbf{K}$ имеем $\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$. Постулируем в дальнейшем, что

$$\forall\, \mathbf{K}_o \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \ \exists\, z_o \in \mathbf{K}_o\colon \mathrm{pr}_1(z_o) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall\, z \in \mathbf{K}_o \tag{2.3}$$

(в [14, ч. 2] указаны легко проверяемые конкретные условия, которые гарантируют справедливость (2.3) и типичны для задач, рассматриваемых в [1–3]). Тогда (см. (2.3), [14, ч. 2])

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \overset{\triangle}{=} &\big\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \forall\, z \in \mathbf{K} \ \ \forall\, t_1 \in \overline{1,N} \ \ \forall\, t_2 \in \overline{1,N} \ \ (z = (\alpha(t_1), \alpha(t_2))) \Rightarrow (t_1 < t_2)\big\} \\ &= \big\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \ \forall\, z \in \mathbf{K}\big\}\end{aligned}$$

есть непустое (и конечное) множество всех $\mathbf{K}$-допустимых (допустимых по предшествованию) маршрутов. Соответственно при $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$

$$\mathbf{D}[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}] \overset{\triangle}{=} \big\{(\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{X} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}]\big\} \neq \varnothing$$

есть множество всех допустимых решений (ДР) в смысле реализации (2.1).

Функции стоимости. Пусть $\mathfrak{N} \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$; элементы $\mathfrak{N}$ (а это — непустые множества индексов) называем *списками*. Фиксируем

$$(\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[X \times X \times \mathfrak{N}]) \,\&\, (f \in \mathcal{R}_+[X]). \tag{2.4}$$

Функцию $\mathbf{c}$ применяем для оценивания перемещений (см. (2.1)), а f — для оценивания терминального состояния. Используем ниже аддитивное агрегирование стоимостей. Для этого при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ полагаем, что

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \overset{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{N} \mathbf{c}(\mathbf{x}(t-1), \mathbf{x}(t), \{\alpha(j) \colon j \in \overline{t, N}\}) + f(\mathbf{x}(N)). \tag{2.5}$$

В частности, (2.5) определено при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}]$, где $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$. Предметом дальнейшего исследования являются задачи

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}], \tag{2.6}$$

где $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$. Так, задачи (2.6) определены, конечно, при $F_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, F_N \in \mathrm{Fin}(X)$. Задачи этого типа относятся, строго говоря, к сфере ДО. Каждой задаче (2.6) сопоставляется значение (экстремум)

$$V[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}] \overset{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] = \inf_{(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbf{D}[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}_+. \tag{2.7}$$

В следующем разделе будут введены условия на функции (2.4), достаточные для существования в задачах (2.6) оптимальных ДР.

3. Некоторые свойства топологического характера и их следствия

Компакту (X, τ) сопоставляем “квадрат” в виде ТП

$$(X \times X, \tau \otimes \tau), \tag{3.1}$$

определяемый стандартным произведением двух экземпляров (X, τ) (см. [24, гл. 2]). Разумеется, (3.1) — непустой метризуемый компакт. Метрика $\tilde{\rho}$ на множестве $X \times X$, порождающая топологию $\tau \otimes \tau$, может быть, в частности, определена в виде отображения

$$((x_1, x_2), (x^{(1)}, x^{(2)})) \longmapsto \sup(\{\rho(x_1, x^{(1)}); \rho(x_2, x^{(2)})\}) \colon (X \times X) \times (X \times X) \longrightarrow \mathbb{R}_+. \tag{3.2}$$

Данная метрика $\tilde{\rho}$ (3.2) превращает $X \times X$ в метрическое пространство. Кроме того, непустое множество X^N оснащаем топологией $\otimes^N(\tau)$ N-й степени (X, τ), т. е. топологией произведения N экземпляров (X, τ). По теореме Тихонова [24, 3.2.4]

$$\big(X^N, \otimes^N(\tau)\big) \tag{3.3}$$

есть (метризуемый) компакт. Топология $\otimes^N(\tau)$ порождается метрикой $\rho^\natural$ вида

$$((u'_t)_{t\in\overline{1,N}}, (u''_t)_{t\in\overline{1,N}}) \longmapsto \max_{1\leqslant t\leqslant N} \rho(u'_t, u''_t) \colon X^N \times X^N \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

Отметим, что при $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ в виде

$$\prod_{i=1}^{N} F_{\alpha(i)} = \{(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in X^N \mid x_j \in F_{\alpha(j)} \ \forall\, j \in \overline{1,N}\} \in \mathcal{P}'(X^N) \tag{3.4}$$

имеем замкнутое (а стало быть, и компактное в ТП (3.3)) п/м X^N. Условимся о следующем соглашении: если $x \in X$ и $\mathbf{x} \in X^N$, то склеенное “движение” $x \,\square\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ def таково, что

$$((x \,\square\, \mathbf{x})(0) \overset{\triangle}{=} x) \,\&\, ((x \,\square\, \mathbf{x})(t) \overset{\triangle}{=} \mathbf{x}(t) \ \forall\, t \in \overline{1,N});$$

в качестве x может использоваться x^o. Легко видеть, что при $(F_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathcal{F}^N$ и $\alpha\in\mathbb{P}$ справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]=\Big\{x^o\,\square\,\mathbf{x}\colon \mathbf{x}\in\prod_{t=1}^{N}F_{\alpha(t)}\Big\}. \tag{3.5}$$

Свойство (3.5) существенно в связи с компактностью множеств вида (3.4). Полагаем далее, что $\mathfrak{C}^*_\alpha[\mathbf{x}]\stackrel{\triangle}{=}\mathfrak{C}_\alpha[x^o\,\square\,\mathbf{x}]\ \forall\,\alpha\in\mathbb{P}\ \forall\,\mathbf{x}\in X^N$. Тогда (см. (3.5)), как легко видеть,

$$V[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]=\min_{\alpha\in\mathbf{A}}\ \inf_{\mathbf{x}\in\prod\limits_{t=1}^{N}F_{\alpha(i)}}\mathfrak{C}^*_\alpha[\mathbf{x}].$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее условие.

Условие непрерывности функций стоимости. Функция f непрерывна как отображение из (X,τ) в $\mathbb{R}_+$. Кроме того, при всяком выборе $K\in\mathfrak{N}$ функция

$$\mathbf{c}(\cdot,K)\stackrel{\triangle}{=}(\mathbf{c}(z,K))_{z\in X\times X}\in\mathcal{R}_+[X\times X]$$

непрерывна как отображение из $(X\times X,\tau\otimes\tau)$ в $\mathbb{R}_+$ (см. (3.1)).

З а м е ч а н и е 3.1. Разумеется, с учетом метризуемости топологий τ и $\tau\otimes\tau$ вышеупомянутое предположение эквивалентно требованию секвенциальной непрерывности функций f и $\mathbf{c}(\cdot,K)$, $K\in\mathfrak{N}$, которое, в свою очередь, может быть дано в терминах метрик ρ и $\tilde\rho$ соответственно. Далее, в силу компактности метризуемых ТП (X,τ) и (3.1) имеем (при упомянутом условии непрерывности) факт равномерной непрерывности функций f и $\mathbf{c}(\cdot,K)$, $K\in\mathfrak{N}$.

Предложение 3.1. *Если $\alpha\in\mathbb{P}$, то $\mathfrak{C}^*_\alpha[\cdot]\stackrel{\triangle}{=}(\mathfrak{C}^*_\alpha[\mathbf{x}])_{\mathbf{x}\in X^N}$ есть непрерывный функционал на компакте* (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из определений (см., в частности, (2.5)). С учетом компактности множеств (3.4) и (3.5) получаем, что $\forall\,(F_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathcal{F}^N\ \forall\,\alpha\in\mathbf{A}\ \exists\,\mathbf{x}_o\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]$:

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}_o]\leqslant\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}]\quad\forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{3.6}$$

Поэтому (см. (2.7), (3.6)) имеем полезное следствие:

$$V[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]=\min_{\alpha\in\mathbf{A}}\ \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]}\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}]=\min_{(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbf{D}[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]}\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}]\in\mathbb{R}_+\quad\forall\,(F_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathcal{F}^N. \tag{3.7}$$

4. Непрерывная зависимость значения задачи при изменении целевых множеств

В настоящем разделе исследуются вопросы, связанные с зависимостью значения дискретно-непрерывной задачи маршрутизации от ЦМ. Рассматриваем при этом (3.7) как зависимость от N переменных, принимающих значения в семействе $\mathcal{F}$. В этой связи заметим, что при $F\in\mathcal{F}$ и $x\in X$

$$\rho(x;F)\stackrel{\triangle}{=}\min_{y\in F}\rho(x,y)\in\mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

есть обычное расстояние от точки x до множества F. При фиксации F зависимость $\rho(x;F)$ от $x\in X$ обладает свойством непрерывности как в/з функция на компакте (X,τ), достигающая максимума на любом множестве из $\mathcal{F}$. Это позволяет ввести метрику Хаусдорфа [24, с. 441] $\mathbb{H}\in\mathcal{R}_+[\mathcal{F}\times\mathcal{F}]$: при $F_1\in\mathcal{F}$ и $F_2\in\mathcal{F}$

$$\mathbb{H}(F_1,F_2)\stackrel{\triangle}{=}\sup\big(\big\{\max_{x\in F_1}\rho(x;F_2);\max_{x\in F_2}\rho(x;F_1)\big\}\big)\in\mathbb{R}_+.$$

Итак, $(\mathcal{F}, \mathbb{H})$ — (непустое) метрическое пространство. Возвращаясь к (2.4), отметим, что с учетом равномерной непрерывности функций f и $\mathbf{c}(\cdot, K)$, $K \in \mathfrak{N}$, могут быть введены их модули непрерывности.

С учетом этого при $K \in \mathfrak{N}$ полагаем, что $\omega_K \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+]$ определяется условием

$$\omega_K(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|\mathbf{c}(z', K) - \mathbf{c}(z'', K)| \colon (z', z'') \in (X \times X) \times (X \times X),\ \tilde{\rho}(z', z'') \leqslant \delta\}) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{4.2}$$

Аналогичным образом функции f сопоставляется $\Omega \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+]$ посредством правила

$$\Omega(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|f(x') - f(x'')| \colon (x', x'') \in X \times X,\ \rho(x', x'') \leqslant \delta\}) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{4.3}$$

Из (4.2), (4.3) при $K \in \mathfrak{N}$ имеем, конечно, что $\omega_K(0) = 0$ и $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, \delta \in]0, \infty[\colon \omega_K(\zeta) < \varepsilon$ $\forall\, \zeta \in [0, \delta]$. Кроме того, $\Omega(0) = 0$ и $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, \delta \in]0, \infty[\colon \Omega(\zeta) < \varepsilon\ \ \forall\, \zeta \in [0, \delta]$. Функции ω_K, $K \in \mathfrak{N}$, и Ω изотонны (см. (4.2), (4.3)). Поскольку $\mathfrak{N}$ — непустое конечное семейство, определена функция

$$\omega \stackrel{\triangle}{=} \big(\max_{K \in \mathfrak{N}} \omega_K(\delta)\big)_{\delta \in \mathbb{R}_+} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+] \tag{4.4}$$

("совокупный" модуль непрерывности) с аналогичными свойствами ($\omega(0) = 0$, функция ω изотонна и непрерывна в нуле). Отметим, что при $F_1 \in \mathcal{F}$ и $F_2 \in \mathcal{F}$ определены значения $\omega(\mathbb{H}(F_1, F_2)) \in \mathbb{R}_+$ и $\Omega(\mathbb{H}(F_1, F_2)) \in \mathbb{R}_+$.

Предложение 4.1. *Если* $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $\alpha \in \mathbb{P}$ *и* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}]$, *то* $\exists\, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_\alpha[(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]$:

$$|\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] - \mathfrak{C}_\alpha[\tilde{\mathbf{x}}]| \leqslant \omega(\mathbb{H}(F_{\alpha(1)}, \widetilde{F}_{\alpha(1)})) + \sum_{t=2}^{N} \omega\big(\sup(\{\mathbb{H}(F_{\alpha(t-1)}, \widetilde{F}_{\alpha(t-1)}); \mathbb{H}(F_{\alpha(t)}, \widetilde{F}_{\alpha(t)})\})\big) + \Omega(\mathbb{H}(F_{\alpha(N)}, \widetilde{F}_{\alpha(N)})).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к непосредственной комбинации (2.5), (4.1)–(4.4). □

Следствие 4.1. *Если* $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $\delta \in]0, \infty[$ *и при этом* $\mathbb{H}(F_j, \widetilde{F}_j) \leqslant \delta$ $\forall\, j \in \overline{1,N}$, *то справедливо неравенство*

$$|V[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}] - V[(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]| \leqslant N\omega(\delta) + \Omega(\delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. Итак, установлено свойство "непрерывности по результату" семейства задач (2.6) при изменении кортежа ЦМ.

5. Вопросы аппроксимативной реализации, 1

В настоящем разделе следствие 4.1 применяется для построения аппроксимативных моделей, оперирующих с задачами ДО. В интересах упрощения обозначений фиксируем далее

$$(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N, \tag{5.1}$$

получая в качестве основной следующую дискретно-непрерывную версию задачи (2.6):

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{5.2}$$

Из (3.7), (5.1) получаем, что определено значение задачи (5.2):

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} V[\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] = \min_{(\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}_+. \tag{5.3}$$

При этом (см. (5.1)) $\mathbb{F}_1 \in \mathcal{F}, \ldots, \mathbb{F}_N \in \mathcal{F}$. Задача (5.2) не является, вообще говоря, задачей ДО, и определение экстремума (5.3), а также ДР, точно или приближенно реализующих (5.3), представляет серьезную проблему. Мы учитываем, что $\mathrm{Fin}(X) \subset \mathcal{F}$. Тогда, в частности, $\mathrm{Fin}(\mathbf{F}) \subset \mathcal{F}$ при $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ и

$$(\varepsilon - \mathrm{Fin})[\mathbf{F}] \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{F}) \mid \rho(x;K) \leqslant \varepsilon \ \ \forall x \in \mathbf{F}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathrm{Fin}(\mathbf{F})\big) \quad \forall \varepsilon \in [0,\infty[\tag{5.4}$$

(простое следствие компактности $\mathbf{F}$), причем, как легко видеть,

$$\mathbb{H}(\mathbf{F}, \mathbb{K}) \leqslant \varepsilon \quad \forall \mathbb{K} \in (\varepsilon - \mathrm{Fin})[\mathbf{F}]. \tag{5.5}$$

С учетом (5.4) получаем, в частности, что

$$\prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$$
$$= \{(K_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathrm{Fin}(X)^N \mid K_t \in (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_t] \ \ \forall t \in \overline{1,N}\} \in \mathcal{P}'(\mathrm{Fin}(X)^N) \quad \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{5.6}$$

Предложение 5.1. *Если* $\delta \in]0,\infty[$ *и* $(M_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$, *то*

$$V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leqslant V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] + N\omega(\delta) + \Omega(\delta). \tag{5.7}$$

Доказательство. В силу (5.4)–(5.6) и следствия 4.1 имеем неравенство

$$|V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] - V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}]| \leqslant N\omega(\delta) + \Omega(\delta). \tag{5.8}$$

При этом (см. (5.4), (5.6)) $M_t \subset \mathbb{F}_t \ \ \forall t \in \overline{1,N}$. Значит, согласно (2.2)

$$\mathcal{X}_\alpha[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] \subset \mathcal{X}_\alpha[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] \quad \forall \alpha \in \mathbf{A}. \tag{5.9}$$

С учетом (3.7) и (5.9) получаем, что $V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}]$, откуда (см. (5.8)) вытекает (5.7). □

Из предложения 5.1 следует, что $\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \ \exists \delta \in]0,\infty[\ \ \forall (M_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$

$$V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] < V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] + \varepsilon. \tag{5.10}$$

Согласно (5.6), (5.10) исходная дискретно-непрерывная задача (5.2) допускает аппроксимативную реализацию в классе задач ДО, а точнее, в классе моделей, использующих “большие” мегаполисы. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\Big(x^o \notin \bigcup_{i=1}^{N} \mathbb{F}_i\Big) \,\&\, (\mathbb{F}_p \cap \mathbb{F}_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{5.11}$$

6. Вопросы аппроксимативной реализации, 2

С учетом предложения 5.1 обсудим совсем кратко частный случай задачи, рассматриваемой в [5–7] (имеется в виду развитие схемы [14, § 4.9]). Итак, фиксируем $M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X)$, получая кортеж $(M_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathrm{Fin}(X)^N$. Для наших целей естественно полагать, что $(M_i)_{i \in \overline{1,N}}$ есть элемент множества (5.6) при некотором $\delta > 0$. Учитывая (5.4), (5.6) и (5.11), будем ограничиваться тем естественным случаем, когда

$$\Big(x^o \notin \bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \,\&\, (M_p \cap M_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}),$$

что соответствует [5–7;14] (см. также [17;18]). Множества $M_1, \ldots, M_N$ называем *мегаполисами*. Рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}], \tag{6.1}$$

для которой значение (экстремум) совпадает с $V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] \in \mathbb{R}_+$. Поскольку $\mathbf{D}[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ непусто и конечно, в задаче (6.1) существует оптимальное решение в виде УП маршрут-трасса. Для построения данного решения воспользуемся вариантом ДП [18, разд. 9], ограничиваясь изложением соответствующего алгоритма на функциональном уровне. Прежде всего напомним определение [14, § 4.9] семейства

$$\mathcal{G} \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall\, z \in \mathbf{K}\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \implies (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \tag{6.2}$$

существенных списков (заданий). Пусть, кроме того, $\mathcal{G}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\}\ \ \forall\, s \in \overline{1,N}$. При этом (см. [5; 14, § 4.9]) $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ и $\mathcal{G}_1 = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где (здесь и ниже) $\mathbf{K}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbf{K}\}$. Наконец (см. [5]),

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\}\colon K \in \mathcal{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\} \quad \forall\, s \in \overline{2,N}. \tag{6.3}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — отображение, действующее в $\mathfrak{N}$ по правилу

$$\mathbf{I}(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Xi[K]\}, \tag{6.4}$$

где $\Xi[K] \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\,\&\,(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$, $K \in \mathfrak{N}$.

Посредством (6.3) определена рекуррентная процедура построения всего семейства (6.2): $\mathcal{G}_N$ известно, цепочка $\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1$ реализуется на основе (6.3).

Следующий этап реализации ДП — создание слоев D_o, $D_1, \ldots, D_N$ пространства позиций— ориентирован на то, чтобы избежать насчитывания всего массива значений функции Беллмана и также ограничиться системой слоев данной функции, что существенно с точки зрения расходования памяти вычислителя. В виде

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^o\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X)$$

определяем фазовое пространство дискретной модели. Полагаем $D_o \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \varnothing)\colon x \in \mathfrak{M}\}$, где $\mathfrak{M}$ есть объединение всех множеств M_i, $i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$, и $D_N \stackrel{\triangle}{=} \{(x^o, \overline{1,N})\}$. При $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ определяем последовательно

$$J_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j\in J_s(K)} M_j, \quad \mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x, K)\colon x \in \mathcal{M}_s[K]\},$$

получая всякий раз непустые конечные множества. Тогда

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K\in\mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s) \quad \forall\, s \in \overline{1,N-1}.$$

Итак, в виде $D_1, \ldots, D_N$ имеем набор непустых п/м конечного множества $\mathbf{X} \times \mathcal{G}$. Важно следующее свойство (см. [5–7; 17; 18]) построенных слоев:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall\, s \in \overline{1,N} \quad \forall\, K \in \mathcal{G}_s \quad \forall\, k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall\, y \in M_k. \tag{6.5}$$

Отображение $\mathbf{I}$ (6.4) играет важную роль в конструкции, связанной с реализацией слоев пространства позиций. Данные слои порождают, в свою очередь, слои функции Беллмана, которые введем сразу посредством следующей рекуррентной процедуры:

1) Полагаем, что $v_o \in \mathcal{R}_+[D_o]$ определяется условием $v_o(x,\varnothing) \overset{\triangle}{=} f(x) \ \forall\, x \in \mathfrak{M}$.

2) Если $s \in \overline{1,N}$ и функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена, то в силу (6.5) определено при $(x,K) \in D_s$ выражение

$$\min_{j\in\mathbf{I}(K)} \ \min_{y\in M_j} [\mathbf{c}(x,y,K) + v_{s-1}(y, K\setminus\{j\})] \in \mathbb{R}_+.$$

С учетом этого полагаем, что функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ такова, что

$$v_s(x,K) \overset{\triangle}{=} \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \ \min_{y\in M_j} [\mathbf{c}(x,y,K) + v_{s-1}(y, K\setminus\{j\})] \quad \forall\,(x,K)\in D_s. \tag{6.6}$$

Итак, (6.6) определяет трансформацию функции v_{s-1} в v_s.

3) Процедура завершается построением функции $v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$, определяемой единственным значением $v_N(x^o,\overline{1,N}) \in \mathbb{R}_+$. Более того,

$$V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] = v_N(x^o,\overline{1,N}). \tag{6.7}$$

З а м е ч а н и е 6.1. В настоящем кратком изложении мы опустили ряд важных положений [5–7; 18], из которых следует (см., например, [18, разд. 6, 9]), в частности, что каждая из функций v_o, $v_1 \ldots, v_N$ является сужением "единой" функции Беллмана для задачи (6.1), откуда и вытекает равенство (6.7).

Таким образом, (6.6) определяет рекуррентную процедуру

$$v_o \to v_1 \to \ldots \to v_N, \tag{6.8}$$

доставляющую, в частности, значение (экстремум) задачи (6.1) посредством (6.7). Если ограничиться определением величины (6.7), то представляется естественным с точки зрения экономии ресурсов памяти вычислителя следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения экстремума задачи (6.1). Из (6.6) следует, что

$$V[M_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \ \min_{y\in M_j} [\mathbf{c}(x^o,y,\overline{1,N}) + v_{N-1}(y,\overline{1,N}\setminus\{j\})]. \tag{6.9}$$

Из (6.9) видно, что для нахождения (6.7) достаточно располагать функцией v_{N-1}; аналогичное суждение справедливо по отношению к любой функции v_s, $s \in \overline{1,N}$, цепочки (6.8). Тогда можно наметить следующие этапы работы алгоритма:

1′) Располагаем функцией v_o, определяемой в 1).

2′) Пусть $s \in \overline{1,N}$ и нам известна функция v_{s-1}. Используя (6.6), находим функцию v_s, после чего заменяем массив значений v_{s-1} (он уничтожается) массивом значений v_s.

3′) Значение $V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ выводим посредством (6.7), (6.9). □

На всех этапах реализации данного алгоритма в памяти вычислителя находится массив значений только одной функции, участвующей в (6.8).

Построение оптимального решения задачи (6.1). Для данного построения необходимо сохранять в памяти все функции $v_1,\ldots,v_N$, которые сейчас мы предполагаем полученными на основе преобразований, подобных (6.6).

Пусть $\mathbf{x}_o \overset{\triangle}{=} x^o$. Далее, используя (6.9), выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{x}_1 \in M_{\eta_1}$ так, что при этом

$$V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \mathbf{c}(x^o,\mathbf{x}_1,\overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathbf{x}_1,\overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}) \tag{6.10}$$

(решаем локальную задачу оптимизации, связанную с (6.9)). В силу (6.5) имеем: $(\mathbf{x}_1,\overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}) \in D_{N-1}$. При этом согласно (6.6)

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1,\overline{1,N}\setminus\{\eta_1\} = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\eta_1\})} \ \min_{y\in M_j} [\mathbf{c}(\mathbf{x}_1,y,\overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}) + v_{N-2}(y,\overline{1,N}\setminus\{\eta_1;j\})]. \tag{6.11}$$

С учетом (6.11) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{x}_2 \in M_{\eta_2}$ так, что

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}); \tag{6.12}$$

при этом определяем в силу (6.5), что $(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{N-2}$. Отметим, кстати, что из (6.10) и (6.12) вытекает равенство

$$V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \mathbf{c}(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \tag{6.13}$$

З а м е ч а н и е 6.2. Если $N = 2$, то из (6.13) по определению v_o выводим сразу, что $(\eta_j)_{j\in\overline{1,2}}$ и $(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,2}}$ позволяют получить оптимальное решение задачи (6.1) (см. в этой связи (2.5) и установленное в [14, теорема 2.2.1, (2.2.32)] представление $\mathbf{A}$).

При $N > 2$ построение на основе соотношений, подобных (6.10), (6.12), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1,N}$. Точнее, после исполнения N однотипных шагов, подобных (6.10), (6.12), будут построены маршрут $\eta \triangleq (\eta_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $\mathbf{x} \triangleq (\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\eta[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$, для которых $\mathfrak{C}_\eta[\mathbf{x}] = V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$; УП $(\eta, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ является, следовательно, оптимальным решением задачи (6.1).

З а м е ч а н и е 6.3. Если $(M_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod\limits_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$, где $\delta \in]0, \infty[$, то справедливо (5.7), $(\eta, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ и при этом $\mathfrak{C}_\eta[\mathbf{x}] \leqslant V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] + N\omega(\delta) + \Omega(\delta)$.

7. Конкретизация общих положений для задачи управления режущим инструментом

В настоящем разделе кратко обсудим одно из возможных применений аппроксимативных конструкций двух предыдущих разделов: рассматриваем вопрос о реализации раскройного плана (см. [1–3]), полагая, что X есть достаточно большой прямоугольник на плоскости, т. е. лист, на котором намечены детали, подлежащие резке. В качестве ρ используем обычную евклидову метрику данного плоского множества, получая вариант компакта (X, ρ) разд. 2. Рассматриваем процедуру резки по замкнутому контуру. В этом случае с каждым контуром связывается эквидистанта, по которой и осуществляется резка (создание некоторого “отступа” от контура необходимо по технологическим условиям). В принципе любая точка эквидистанты может выбираться в качестве ВТВ (некоторые сопутствующие обстоятельства, связанные с врезкой, сейчас опускаем, отсылая к [1–3; 25; 26]), если игнорировать ограничения на жесткость листа и деталей, тепловые допуски. Некоторые из этих (динамических) ограничений можно учесть посредством введения соответствующей зависимости стоимостей перемещений от списка заданий (см. (2.4)), т. е., по сути, за счет введения штрафов. Мы не будем, однако, сейчас (в данном разделе) на этом останавливаться, привлекая упрощенную модель резки. Итак, логично допускать выбор любой точки эквидистанты в качестве ВТВ. В этом случае возникает многомерная задача нелинейного программирования [27, гл. 5], осложненная ограничениями в виде условий предшествования (в частности, внутренние контуры каждой детали должны вырезаться раньше внешнего). Решение этой задачи сопряжено с большими трудностями, даже если функции (2.4) определяются евклидовыми расстояниями и зависимость от списка заданий в функции $\mathbf{c}$ отсутствует.

Подход, изложенный в разд. 5, 6 и связанный с применением моделей на основе задач ДО, можно рассматривать как способ решения исходной дискретно-непрерывной маршрутной задачи с любой наперед заданной точностью. В рамках данного подхода предлагается дискретизировать эквидистанты контуров, создавая тем самым мегаполисы и сохраняя условия предшествования исходной задачи (последние касаются таких макрообъектов, как эквидистанты и мегаполисы). При этом (5.7) определяет потребную мощность мегаполисов в модельной задаче.

В этой связи полезно отметить следующий простейший случай: функция $\mathbf{c}$ в (2.4) не зависит от списка заданий и определяется евклидовой метрикой ρ, а функция f в (2.4) есть евклидово расстояние до заданной точки $x^{oo} \in X$. Здесь полагаем, что

$$\mathbf{c}(x', x'', K) \stackrel{\triangle}{=} \rho(x', x'') \quad \forall x' \in X \quad \forall x'' \in X \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{7.1}$$

Пусть также $f(x) \stackrel{\triangle}{=} \rho(x, x^{oo})$ $\forall x \in X$. Тогда $\mathbf{c}(z, K) = \rho(z) = \rho(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$ при $z \in X \times X$ и $K \in \mathfrak{N}$. Примем теперь, что $\omega^o \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+]$ определяется условиями

$$\omega^o(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|\rho(z') - \rho(z'')| \colon (z', z'') \in (X \times X) \times (X \times X),\ \tilde{\rho}(z', z'') \leqslant \delta\}) \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{7.2}$$

Тогда в силу (4.2), (7.1) имеем $\omega_K = \omega^o$ $\forall K \in \mathfrak{N}$. С учетом (4.4) выводим теперь, что $\omega = \omega^o$. Отметим, что, как легко видеть,

$$|\rho(x', y) - \rho(x'', y)| \leqslant \rho(x', x'') \quad \forall x' \in X \quad \forall x'' \in X \quad \forall y \in X, \tag{7.3}$$

$$|\rho(x, y') - \rho(x, y'')| \leqslant \rho(y', y'') \quad \forall x \in X \quad \forall y' \in X \quad \forall y'' \in X. \tag{7.4}$$

Если $z' \in X \times X$, $z'' \in X \times X$, $x' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(z')$, $y' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(z')$, $x'' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(z'')$ и $y'' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(z'')$, то при $K \in \mathfrak{N}$

$$|\mathbf{c}(z', K) - \mathbf{c}(z'', K)| = |\rho(x', y') - \rho(x'', y'')|$$
$$\leq |\rho(x', y') - \rho(x'', y')| + |\rho(x'', y') - \rho(x'', y'')| \leq \rho(x', x'') + \rho(y', y'')$$

(мы учли (7.3), (7.4)), а потому согласно (3.2)

$$|\mathbf{c}(z', K) - \mathbf{c}(z'', K)| \leqslant 2\tilde{\rho}(z', z''), \tag{7.5}$$

где $\mathbf{c}(z', K) = \rho(z')$ и $\mathbf{c}(z'', K) = \rho(z'')$. Подобно (7.5) имеем неравенство $|\rho(z') - \rho(z'')| \leqslant 2\tilde{\rho}(z', z'')$. Как следствие получаем с учетом (7.2), что

$$\omega^o(\delta) \leqslant 2\delta \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{7.6}$$

Далее, при $x' \in X$ и $x'' \in X$ имеем (см. (7.3)), что

$$|f(x') - f(x'')| = |\rho(x', x^{oo}) - \rho(x'', x^{oo})| \leqslant \rho(x', x''). \tag{7.7}$$

Поэтому согласно (4.3) в нашем случае

$$\Omega(\delta) \leqslant \delta \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{7.8}$$

Отметим, что согласно (7.1) (см. также определение f в терминах ρ) имеем в силу (7.5) и (7.7), что наши конкретные функции $\mathbf{c}(\cdot, K)$, $K \in \mathfrak{N}$, и f непрерывны.

Предложение 7.1. *Если* $\delta \in]0, \infty[$ *и* $(M_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$, *то*

$$V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leq V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] + 2N\delta + \delta.$$

Доказательство следует из предложения 5.1 с учетом (7.6), (7.8) и равенства $\omega = \omega^o$. Таким образом, по заданному ε, $\varepsilon > 0$, можно подобрать параметр δ, $\delta > 0$, так, что при любом выборе кортежа мегаполисов $(M_i)_{i \in \overline{1,N}}$ из множества (5.6) в виде $V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}]$ будет получено ε-приближение экстремума $V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]$ (напомним, что условие (5.11) предполагается выполненным). $\square$

В силу предложения 7.1 ключевым становится вопрос решения задачи о посещении "больших" мегаполисов, т. е. мегаполисов $M_1, \ldots, M_N$, для которых при "малых" δ, $\delta > 0$, оказывается возможным реализовать включения

$$M_1 \in (\delta\text{–}\mathrm{Fin})[\mathbb{F}_1], \ldots, M_N \in (\delta\text{–}\mathrm{Fin})[\mathbb{F}_N]. \tag{7.9}$$

Вопрос о размещении мегаполиса M_j в $\mathbb{F}_j$ при $j \in \overline{1, N}$ затруднений не представляет (обычно речь идет о равномерных сетках). Более принципиальным является (см. (7.9)) вопрос об обеспечении достаточно больших значений $|M_1|, \ldots, |M_N|$. В этой связи заметим, что при условии $|M_j| \equiv \mu$, где $\mu \in \mathbb{N}$, общее количество возможных решений (пар маршрут-трасса) есть $\mu^N \cdot N!$.

Приведенные в настоящей работе алгоритмические конструкции были реализованы в виде программы для ПЭВМ (использован язык программирования C++), работающей под управлением 64-разрядной операционной системы семейства Windows, начиная с Windows 7. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случаев решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения, отдельные участки графика могут быть увеличены, а все изображение может быть сохранено в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты работы программы хранятся в текстовом файле специальной структуры. Вычислительный эксперимент проводился на компьютере с центральным процессором Intel Core i7 объемом ОЗУ 64 гБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная Sp1.

Рассматривались конкретные варианты решения задачи управления инструментом, различающиеся размерностью мегаполисов. Предполагалось, что $x^o = (0, 0)$, $N = 33$, $|\mathbf{K}| = 63$. Опуская по соображениям объема описание мегаполисов, приведем результаты экспериментов, характеризующие качество решения, обозначая через μ мощность каждого из множеств $M_1, \ldots, M_{33}$ (предполагается их равномощность). Следуя построениям разд. 5 и 6, полагаем, что данные мегаполисы получены дискретизацией континуальных множеств $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_N$ (границы прямоугольников, окружности), описание которых опустим по соображениям объема (см. рис. 1, 2). Условия предшествования типичны для задач такого типа: внутренние контуры деталей должны вырезаться раньше внешних; при размещении одних деталей в других раньше должна осуществляться резка внутренних деталей.

Ниже рассматриваются конкретные примеры применения вышеупомянутых аппроксимативных конструкций для исследования маршрутных задач с “непрерывными”, а точнее, континуальными множествами на плоскости. Исследуются модельные задачи, ориентированные на проблему, связанную с листовой резкой на машинах с ЧПУ.

Итак, мы рассматриваем достаточно простые детали, у которых, однако, имеется несколько контуров, подлежащих резке; представлены также вложенные системы деталей. Эти обстоятельства приводят к вышеупомянутым условиям предшествования. По самому смыслу задачи процедуры резки контуров могут и должны осуществляться по “непрерывным” эквидистантам, т. е. с некоторым запасом, обеспечивающим сохранность вырезаемых деталей. В этой связи уместно (см. введение) полагать, что данные эквидистанты образуют в своей совокупности кортеж (5.1). На рис. 1, 2 упомянутые “непрерывные” эквидистанты специально не выделяются, но легко угадываются по их дискретизациям, образующим соответствующие мегаполисы; мощности последних предполагаются совпадающими и достаточно большими. Так, на рисунках приведены варианты мегаполисов, возникающих из соображений дискретизации “непрерывных” эквидистант; каждый мегаполис состоит из 120 “городов”. По этой причине, кстати, мегаполисы, отвечающие “малым” эквидистантам (в смысле длины), воспринимаются зрительно как “непрерывные” (сплошные) замкнутые кривые. В случае протяженных эквидистант (на рисунках — прямоугольники) дискретизация уже заметна. Таким образом, на рис. 1, 2 можно увидеть и фрагменты, в большей степени отражающие конечную цель (посещение “непрерывных” эквидистант), и фрагменты, на которых проявляется аппроксимативная схема решения (приближение к цели посредством дискретизаций упомянутых эквидистант). Предложение 7.1 определяет “вилку” для значений аппроксимирующих задач ДО. Что же касается ДР для “непрерывной” задачи, доставляющих оптимум последней с высокой, но все же конечной степенью точности, то в их качестве можно использовать оптимальные ДР аппроксимирующих задач ДО. В предложении 7.1 (для более общего случая — в замечании 6.3) указаны соответствующие оценки близости по результату.

1) Вариант “незамкнутой” (и неосновной) задачи: функция f полагается тождественно равной нулю (функция $\mathbf{c}$ определялась при этом посредством (7.1)). При $\mu = 60$ и $\delta = 6,67$ получено $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 411,57$ и время счета — 5 ч 10 мин 58 с; при $\mu = 80$ и $\delta = 3,89$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 411,02$ и время счета — 5 ч 33 мин 59 с; при $\mu = 100$ и $\delta = 3,04$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 410,97$ и время счета — 6 ч 0 мин 39 с; при $\mu = 120$ и $\delta = 2,59$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 410,91$ и время счета — 6 ч 33 мин 5 с. В данном случае верхняя оценка в цепочке неравенств предложения 7.1 естественным образом улучшается за счет отбрасывания последнего слагаемого δ в связи с “занулением” терминальной функции f. График маршрута и трассы для $\mu = 120$ приведен на рис. 1.

2) Вариант “замкнутой” задачи (основной) при $x^{oo} = x^o = (0,0)$: функции $\mathbf{c}$ и f определены выше. При $\mu = 60$ и $\delta = 6,67$ получено значение $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,44$ и время счета — 5 ч 14 мин 24 с; при $\mu = 80$ и $\delta = 3,89$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,23$ и время счета — 5 ч 35 мин 15 с; при $\mu = 100$ и $\delta = 3,04$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,22$ и время счета — 6 ч 1 мин 51 с; при $\mu = 120$ и $\delta = 2,59$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,04$ и время счета — 6 ч 34 мин 44 с. Для данного варианта оценочное свойство определяется предложением 7.1. График маршрута и трассы для $\mu = 120$ приведен на рис. 2.

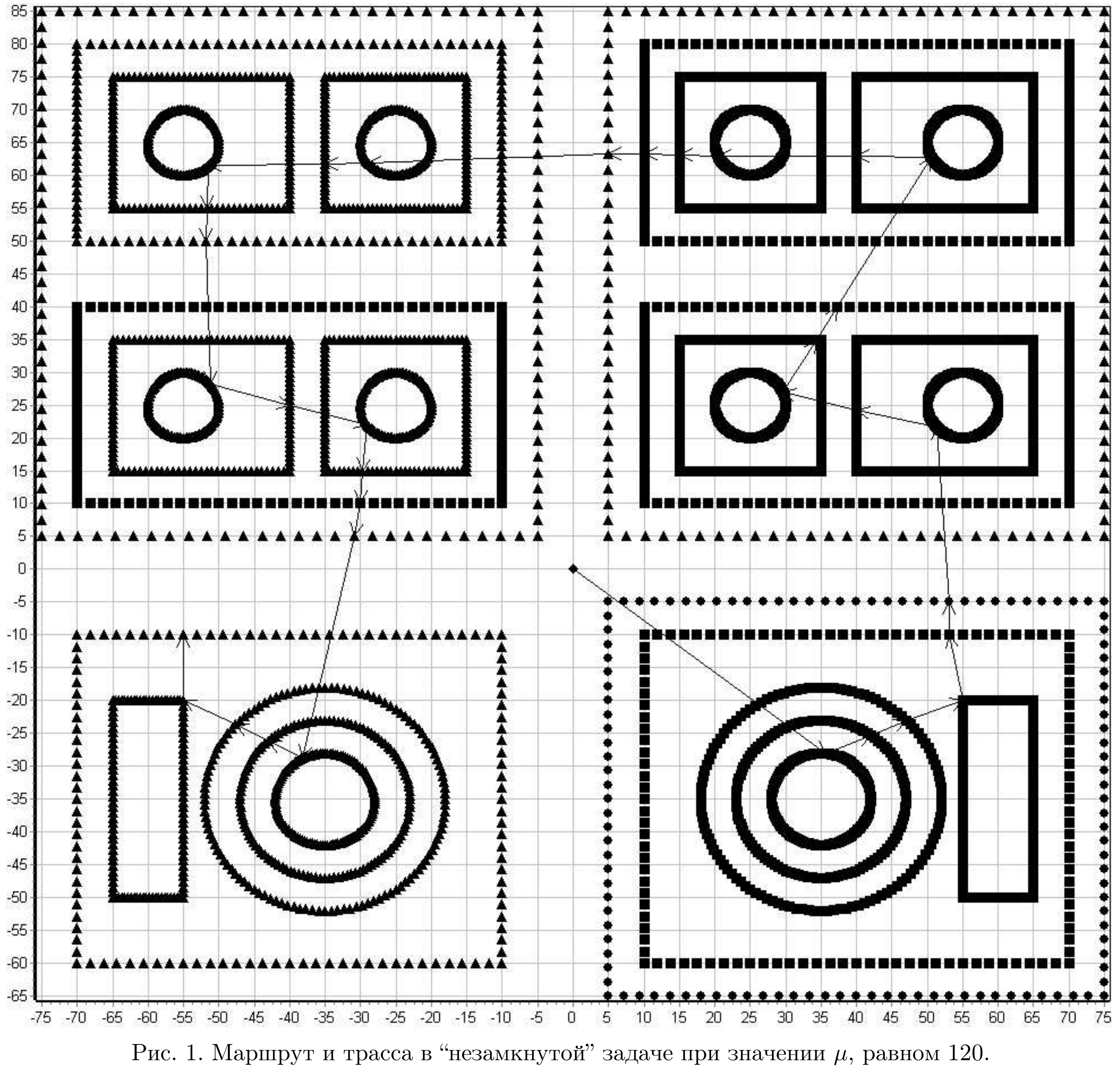

Рис. 1. Маршрут и трасса в “незамкнутой” задаче при значении μ, равном 120.

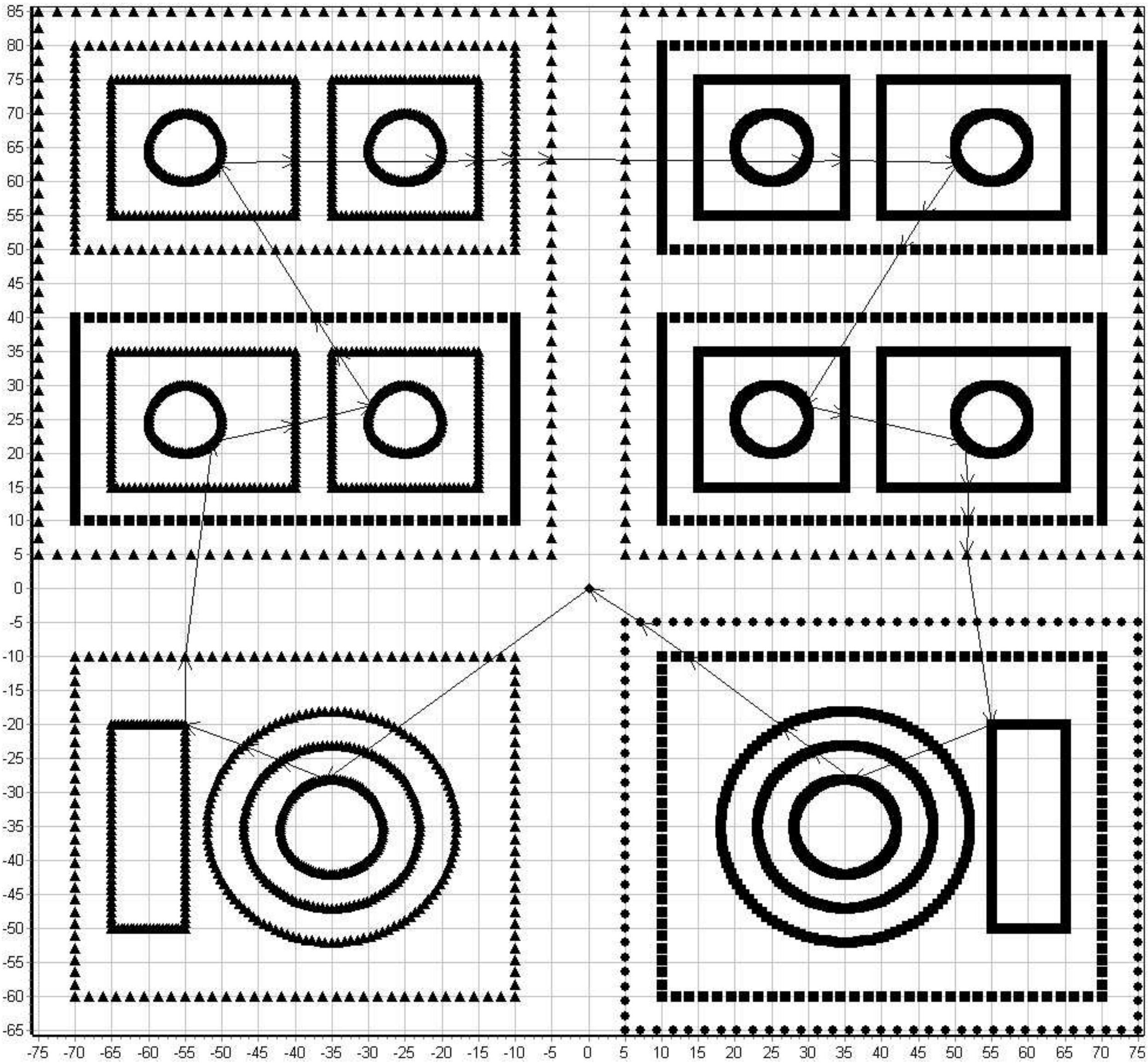

Рис. 2. Маршрут и трасса в “замкнутой” задаче при значении μ, равном 120.

Отметим, что как в случае 1), так и в случае 2) при увеличении мощности мегаполисов (параметр μ) неуклонно улучшался достигаемый результат (значение $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}]$) за счет лучшего приближения к гипотетическим континуальным множествам (множества $\mathbb{F}_1,\dots,\mathbb{F}_{33}$, которые мы в связи с экспериментом не обсуждали, могут быть легко восстановлены; это границы прямоугольников и окружности) при соответствующем увеличении времени счета. Такое поведение результатов является вполне логичным с точки зрения проблем вычислительной реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петунин А.А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестн. УГАТУ. 2009. Т. 13, № 2 (35). С. 280–286. (Управление, вычислительная техника и информатика.)
2. **Фроловский В.Д.** Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информ. технологии в проектир. и произв. 2005. № 4. С. 63–66.
3. **Верхотуров М.А., Тарасенко П.Ю.** Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки // Вестн. УГАТУ. 2008. Т. 10, № 2 (27). С 123–130. (Управление, вычислительная техника и информатика.)

4. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / В.В. Коробкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, А.Г. Ченцов. М.: Новые технологии, 2012, 234 с.
5. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
6. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 1. С. 20–23.
7. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации // Проблемы управления. 2013. № 5. С. 12–21.
8. **Chentsov A.A., Chentsov A.G.** Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem: the influence of inexact calculations // Math. Comput. Modelling. 2001. Vol. 33. P. 801–819.
9. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
10. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
11. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
12. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 850 p.
13. **Cook William J.** In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012. 228 p.
14. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 238 с.
15. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
16. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
17. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Докл. РАН. 2015. Т. 465, № 2. С. 154–158.
18. **Кошелева М.С., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** О задаче маршрутизации с ограничениями, включающими зависимость от списка заданий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 178–195.
19. **Chentsov A.G., Salii J.V.** A model of "nonadditive" routing problem where the costs depend on the set of pending tasks // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. 2015. Т. 8, № 1. С. 24–45. (Мат. моделирование и программирование.)
20. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача "на узкие места" // Вестн. Удмурт. ун-та. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 121–140. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
21. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
22. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. 960 с.
23. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
24. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
25. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // НТВ СПбГПУ. 2013. № 2 (169). С. 103–111.
26. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Об одной задаче маршрутизации перемещений инструмента при листовой резке деталей // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 2. С. 278–294.
27. **Мину М.** Математическое программирование. М.: Наука, 1990. 488 с.

Ченцов Александр Георгиевич
член-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 21.06.2016

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: chentsov@binsys.ru

REFERENCES

1. Petunin A.A. On some strategies of forming tool routes at developing the control programs for the thermal machine cutting. *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta.*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), Ser. Upravlenie, Vychisl. Mat., Inform., pp. 280–286 (in Russian).
2. Frolovskii V.D. Computer-aided design of the control programs for thermal metal cutting on NPC machines. *Informatsionnye Tekhnologii v Proektirovanii i Proizvodstve*, 2005, 4, pp. 63–66 (in Russian).
3. Verkhoturov M.A., Tarasenko P.Yu. Mathematical provision of problem of tool path optimization at flat shape nesting based on "chained" cutting. *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2008, vol. 10, no. 2 (27), Ser. Upravlenie, Vychisl. Mat., Inform., pp. 123–130 (in Russian).
4. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* [Routing Methods and Their Applications to the Enhancement of Safety and Efficiency of Nuclear Plant Operation]. Moscow: Novye Tekhnologii Publ., 2012, 234 p.
5. Chentsov A.G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 4, pp. 728–744. doi:10.1134/S0005117914040122 .
6. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Dynamic programming in the routing problem with constraints and costs depending on a list of tasks. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 637–640. doi:10.1134/S1064562413060021 .
7. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Elements of dynamic programming in extremal route problems. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 3, pp. 537–550. doi:10.1134/S0005117914030102 .
8. Chentsov A.A., Chentsov A.G Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem: the influence of inexact calculations // Math. Comput. Modelling. 2001. Vol. 33, no. 8-9. P. 801–819.
9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Issues in theory. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
10. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman's problem. Exact methods. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
11. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
12. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations.* Berlin: Springer-Verlag, 2002, 850 p.
13. Cook William J. In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012, 228 p.
14. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* [Extremal Problems of Routing and Distribution of Tasks: Questions of the Theory]. Moscow, Izhevsk: Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika Publ, 2008, 238 p.
15. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. doi: 10.1137/0110015 . Translated in *Kiberneticheskii sb.*, Moscow, Mir Publ., 1964, vol. 9, pp. 202–218.
16. Bellman R. Dynamic programming treatment of the traveling salesman problem. *J. Assoc. Comput. Machinery*, 1962, vol. 9, pp. 61–63. doi: 10.1145/321105.321111 . Translated in *Kiberneticheskii sb.*, Moscow, Mir Publ., 1964, vol. 9, pp. 219–228.
17. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, iss. 3, pp. 685–688. doi: 10.1134/S1064562415060083 .
18. Kosheleva M.S., Chentsov A.A., Chentsov A.G. On a routing problem with constraints that include dependence on a task list. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Uro RAN*, vol. 21, no. 4, 2015, pp. 178–195 (in Russian).

19. Chentsov A.G., Salii J.V. A model of “nonadditive” routing problem where the costs depend on the set of pending tasks. *Vestnik Yuzhno-Ural. Gosudarstvennogo Universiteta.*, 2015, vol. 8, no. 1, Ser. Mat. Modelirovanie i Programmirovanie, pp. 24–45 (in Russian).
20. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Routing of displacements with dynamic constraints: “bottleneck problem”. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta*, 2016, vol. 26, no. 1, Ser. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki, pp. 121–140 (in Russian).
21. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
22. Cormen T., Leiserson C., Rivest R. *Introduction to algorithms.* Cambridge, MIT press, 1990, 1028 p. Translated under the title *Algoritmy: postroenie i analiz*, Moscow, MTsNMO Publ., 1999, 960 p.
23. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* New York, Academic Press Inc, 1960, 361 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow, Mir Publ., 1964, 430 p.
24. Engelking R. *General topology.* Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
25. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of sheet cutting. *Nauchno-Tekhnicheskie Vedomosti SPbGPU*, 2013, no. 2 (169), Ser. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie, pp. 103–111 (in Russian).
26. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. About a routing problem of the tool motion on sheet cutting. *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 278–294.
27. Minoux M. *Mathematical Programming. Theory and Algorithms.* Wiley, New York, 1986, 489 p. Translated under the title *Matematicheskoe programmirovanie*, Moscow, Nauka Publ., 1990, 488 p.

A.G. Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

A.A. Chentsov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: chentsov@binsys.ru .