ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ВНЕШНИЕ ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ И КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

Т. Ф. Филиппова

Рассматривается задача оценивания трубок траекторий нелинейной управляемой динамической системы с неопределенностью по начальным данным. Предполагается, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены определяются квадратичными формами по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Матрица линейных слагаемых в фазовых скоростях системы также точно не известна, но принадлежит известному компакту в соответствующем пространстве, т. е. динамика системы осложнена наличием билинейных составляющих в правых частях дифференциальных уравнений системы. В работе рассмотрен сложный случай, обобщающий ранее полученные автором результаты, когда предполагается одновременное наличие в динамике системы билинейных функций и квадратичных форм (без предположения об их положительной определенности), а также учитываются неопределенность по начальным данным и влияние управляющих воздействий, которые также могут трактоваться здесь как неопределенные аддитивные возмущения. Присутствие всех указанных факторов существенно усложняет исследование проблемы и требует адекватного анализа, что и составляет основную цель данного исследования. В работе приводятся алгоритмы оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы указанного типа, результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, оценивание состояний, неопределенность.

T. F. Filippova. External estimates for reachable sets of a control system with uncertainty and combined nonlinearity.

The problem of estimating the trajectory tubes of a nonlinear control dynamic system with uncertainty in the initial data is studied. It is assumed that the dynamic system has a special structure in which the nonlinear terms are defined by quadratic forms in the state coordinates and the values of uncertain initial states and admissible controls are subject to ellipsoidal constraints. The matrix of the linear terms in the velocities of the system is not known exactly; it belongs to a given compact set in the corresponding space. Thus, the dynamics of the system is complicated by the presence of bilinear components in the right-hand sides of the differential equations of the system. We consider a complex case and generalize the author's earlier results. More exactly, we assume the simultaneous presence in the dynamics of the system of bilinear functions and quadratic forms (without the assumption of their positive definiteness), and we also take into account the uncertainty in the initial data and the impact of the control actions, which may also be treated here as undefined additive disturbances. The presence of all these factors greatly complicates the study of the problem and requires an adequate analysis, which constitutes the main purpose of this study. The paper presents algorithms for estimating the reachable sets of a nonlinear control system of this type. The results are illustrated by examples.

Keywords: control system, reachable set, state estimation, uncertainty.

MSC: 34A60, 49J53, 93B03, 93C41, 93C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-262-274

Введение

В работе рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости управляемой динамической системы, т. е. множеств состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Задачи, связанные с точным построением или приближенным оцениванием множеств достижимости управляемых систем, относятся к

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект РНФ № 16-11-10146).

фундаментальным проблемам теории управления и теории дифференциальных игр [1–3], их решение может быть использовано также в исследовании сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.). Отметим, что геометрия множеств достижимости нелинейных динамических систем может быть очень сложной [4–6]. В этих случаях представляет интерес построение аппроксимаций множеств достижимости и интегральных воронок динамических систем [7;8], а также приближение множеств достижимости областями определенной канонической формы [9; 10]. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие канонические множества.

В последние годы разработана полная теория построения эллипсоидальных оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем с неопределенностью, основанная на технике эллипсоидального исчисления [9–11]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. Отметим, однако, что в силу специфики аппарата исследования и общих предположений о структуре динамики системы этот подход не может быть в полной мере использован в нелинейном случае для описания и оценивания траекторных трубок неопределенных систем общего вида. Для некоторых классов нелинейных динамических систем с неопределенностью в динамике и начальных данных в работах [12–14] были намечены подходы к решению задач оценивания их состояний.

На основе указанных подходов в данной статье рассматривается задача внешнего оценивания множеств достижимости управляемой системы с комбинированной нелинейностью квадратичного и билинейного типов. В отличие от постановок работ [13; 14] мы исследуем здесь задачу оценивания состояний систем указанного класса без предположения о положительной определенности соответствующей квадратичной формы в нелинейных составляющих фазовых скоростей системы.Указанный сложный случай обобщает ранее полученные результаты [14; 15]; здесь мы предполагаем одновременное наличие в динамике системы билинейных функций и квадратичных форм (без добавочного требования их положительной определенности) и учитываем неопределенность по начальным данным и влияние управляющих воздействий, которые также могут трактоваться как неопределенные аддитивные возмущения. Присутствие всех указанных факторов существенно усложняет исследование проблемы, требует адекватного анализа и построения новых численных алгоритмов оценивания множеств достижимости таких систем, что и составляет цель данного исследования.

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство, $\mathrm{comp}\mathbb{R}^n$ — множество всех компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ — множество всех компактных выпуклых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Символ (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, символ $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма вектора x, $\;'$ — знак транспонирования, шар $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\| \ \le r\}$, символ $E(y, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (Y^{-1}(x - y), (x - y)) \le 1\}$ обозначает эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром y и симметрической положительно определенной $n \times n$-матрицей Y, $\mathrm{Tr}(Y)$ — след (сумма диагональных элементов) $n \times n$-матрицы Y, I — единичная $n \times n$-матрица.

Рассмотрим управляемую систему следующего вида:

$$\dot{x} = A(t)x + f(x)d + u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0), \tag{1.2}$$

и измеримым управлением $u(t)$, стесненным ограничением

$$u(t) \in E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

где $a, \hat{a}, d \in \mathbb{R}^n$; матрицы B и $\hat{Q}$ — симметрические и положительно определенные.

Будем предполагать, что нелинейная функция $f(x)$ в (1.1) является квадратичной формой:

$$f(x) = x'Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

где B — симметрическая $n \times n$-матрица.

Предположим, что матрица $A(t)$ (размерности $n \times n$) имеет вид $A(t) = A^0 + A^1(t)$. Здесь $n{\times}n$-матрица A^0 задана, а измеримая $n{\times}n$-матрица $A^1(t)$ с элементами $\{a_{ij}^{(1)}(t)\}$ $(i, j = 1, \ldots, n,$ $t \in [t_0, T])$ точно не известна, но дано ограничение на неизвестные элементы $\{a_{ij}^{(1)}(t)\}$,

$$A^1(t) \in \mathcal{A} = \bigl\{A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \colon |a_{ij}| \le c_{ij},\ i, j = 1, \ldots n\bigr\}, \tag{1.5}$$

где числа $c_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1, \ldots n)$ заданы.

Обозначим символом $\mathcal{U}$ класс всех допустимых измеримых управлений $u(\cdot)$ и символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), A^1(\cdot))$ — решение системы (1.1)–(1.5) на промежутке $[t_0, T]$ при $x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $A^1(\cdot) \in \mathcal{A}$. Трубку траекторий системы (1.1)–(1.5) при ограничении $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим $(t_0 \le t \le T)$

$$X(\cdot) = \bigcup \bigl\{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), A^1(\cdot)) \mid x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, A^1(\cdot) \in \mathcal{A}\bigr\}.$$

Отметим, что трубка всех возможных траекторий системы (1.1)–(1.5) из начального состояния $\{t_0, X_0\}$ совпадает с траекторной трубкой дифференциального включения [7]

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + f(x(t))d + U, \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \quad t_0 \le t \le T,$$

соответствующего системе (1.1)–(1.5).

Примем следующее предположение.

Предположение 1. *Все решения $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (1.1)–(1.5) определены на всем промежутке $[t_0, T]$ для любых допустимых x_0 и всех возможных $u(\cdot)$ и не выходят за пределы некоторой компактной области фазового пространства, т. е. существует $k > 0$ такое, что*

$$||x(\cdot)|| = ||x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))|| \le k \quad \forall x_0 \in X_0, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}.$$

Условия, при которых данное требование выполняется, детально обсуждаются в работе [15].

Цель работы состоит в построении итерационных алгоритмов внешнего оценивания траекторных трубок $X(\cdot)$ и соответствующих множеств достижимости $X(T)$ для рассматриваемой нелинейной управляемой системы (1.1)–(1.5) указанного выше класса.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью по начальным данным при известной матрице $A(t)$

Предположим в этом подразделе, что матрица $A(t) \equiv A$ в системе (1.1)–(1.5) известна и матрица B, определяющая нелинейную функцию f в (1.4), положительно определена.

Обозначим

$$(k_0^+)^2 = \max_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n \colon ||l|| = 1\}} l' B^{1/2} Q_0 B^{1/2} l, \tag{2.1}$$

$$(k_0^-)^2 = \min_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n \colon ||l|| = 1\}} l' B^{1/2} Q_0 B^{1/2} l. \tag{2.2}$$

Отметим, что в силу [13] числа k_0^- и k_0^+ в (2.1), (2.2) таковы, что справедливы включения

$$E(a_0, (k_0^-)^2 B^{-1}) \subseteq E(a_0, Q_0) \subseteq E(a_0, (k_0^+)^2 B^{-1}), \tag{2.3}$$

при этом число k_0^- является наибольшим, а k_0^+ — наименьшим из возможных чисел, для которых верны приведенные выше включения (2.3).

Тогда в соответствии с [13] справедлива следующая внешняя оценка множества достижимости $X(t) = X(t; t_0, X_0)$ системы (1.1)–(1.5) с квадратичной нелинейностью:

$$X(t; t_0, X_0) \subseteq E(a^+(t), Q^+(t)), \quad t_0 \le t \le T, \tag{2.4}$$

где $Q^+(t) = r^+(t)B^{-1}$ и функции $a^+(t)$, $r^+(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{da^+(t)}{dt} = Aa^+(t) + a^{+\prime}(t)Ba^+(t)d + r^+(t)d + \hat{a},\\ \frac{dr^+(t)}{dt} = \max_{\|l\|=1}\{l^{'}(2r^+(t)\tilde{B}_+(t) + q_+^{-1}(t)B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})l\} + q_+(t)r^+(t),\\ q_+(t) = \{(nr^+(t))^{-1}\operatorname{Tr}(B\hat{Q})\}^{1/2}, \quad \tilde{B}_+(t) = B^{1/2}(A + 2da^{+\prime}(t)B)B^{-1/2},\end{gathered} \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$a^+(t_0) = a_0, \quad r^+(t_0) = (k_0^+)^2. \tag{2.6}$$

В рассматриваемом случае удается получить и внутреннюю по включению множеств эллипсоидальную оценку (см. [13]) множества достижимости $X(t)$ $(t_0 \le t \le T)$ системы (1.1)–(1.5):

$$E(a^-(t), Q^-(t)) \subseteq X(t; t_0, X_0), \tag{2.7}$$

где $Q^-(t) = r^-(t)B^{-1}$, функции $a^-(t)$, $r^-(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{da^-(t)}{dt} = Aa^-(t) + a^{-\prime}(t)Ba^-(t)d + r^-(t)d + \hat{a},\\ \frac{dr^-(t)}{dt} = \min_{\|l\|=1}\{l^{'}(r^-(t)(\tilde{B}_-(t) + \tilde{B}_-'(t)) + 2(r^-(t))^{1/2}(B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})^{1/2})l\},\\ \tilde{B}_-(t) = B^{1/2}(A + 2da^{-\prime}(t)B)B^{-1/2},\end{gathered} \tag{2.8}$$

с начальными условиями

$$a^-(t_0) = a_0, \quad r^-(t_0) = (k_0^-)^2. \tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е 1. Формулы, определяющие оценки (2.4)–(2.9), удобны для расчетов в конкретных примерах (соответствующие результаты численного моделирования можно найти в [13; 16–18]). Однако данный подход не удается распространить на более сложные ситуации, когда в динамической системе присутствует неопределенность в коэффициентах матрицы A, или если матрица B квадратичной формы (1.4) не является положительно определенной, или если присутствуют оба указанных усложняющих фактора.

2.2. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости систем с билинейной структурой

Рассмотрим в данном подразделе следующую вспомогательную динамическую систему:

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t_0 \le t \le T, \quad x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0), \quad x, a_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Будем предполагать, как и ранее, что матричная функция $A(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{2.11}$$

где матрица A^0 задана, а матричная функция $A^1(t)$ не известна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ $(t \in [t_0, T])$,

$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad \mathcal{A}^1 = \big\{A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n} \colon |a_{ij}|{\le}c_{ij}, \quad i,j{=}1,\ldots n\big\}, \tag{2.12}$$

числа $c_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots n)$ в (2.11), (2.12) предполагаются заданными.

Тогда внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости $\mathcal{X}(T)$ системы (2.10)–(2.12) можно найти, применив следующий результат.

Теорема 1 [19]. *Пусть функции $a^+(t)$ и $Q^+(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\dot{a}^+ = A^0 a^+, \quad a^+(t_0) = a_0, \tag{2.13}$$

$$\dot{Q}^+ = A^0 Q^+ + Q^+ A^{0\prime} + qQ^+ + q^{-1}G, \quad Q^+(t_0) = Q_0, \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{2.14}$$

$$q = \big(n^{-1}\,\mathrm{tr}\,((Q^+)^{-1}G)\big)^{1/2},$$

$$G = \mathrm{diag}\,\Big\{(n-v)\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ji}|a_i^+| + \big(\max_{\sigma=\{\sigma_{ij}\}} \sum_{p,q=1}^{n} Q_{pq}^+ c_{jp} c_{jq} \sigma_{jp}\sigma_{jq}\big)^{1/2}\Big)^2\Big\}, \tag{2.15}$$

максимум в (2.15) вычисляется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$, $i, j = 1, \ldots, n$, таким, что $c_{ij} \neq 0$, и v равно числу индексов i, для которых $c_{ij} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда верна оценка

$$\mathcal{X}(t) \subseteq E(a^+(t), Q^+(t)), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Следствие. *Имеет место следующее включение:*

$$\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq (I+\sigma\mathcal{A})\,\mathcal{X}_0 + o_1(\sigma)B(0,1) \subseteq E(a^+(t_0+\sigma), Q^+(t_0+\sigma)) + o_2(\sigma)B(0,1),$$

где $\sigma^{-1}o_i(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to +0$ $(i = 1, 2)$ и $(I+\sigma\mathcal{A})\,\mathcal{X}_0 = \bigcup_{x\in\mathcal{X}_0}\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\{x+\sigma Ax\}$.

З а м е ч а н и е 2. Отдельные подходы к решению задачи оценивания многозначных состояний систем с квадратичными нелинейностями общего вида (без ограничительного предположения о положительной определенности соответствующих квадратичных форм) были намечены в [20], однако в данном исследовании рассматривался более простой случай, когда управляющих функций в динамической системе (1.1)–(1.5) нет (решалась задача оценивания неопределенной динамики); последнее предположение упрощало анализ. Близкие вопросы оценивания состояний неопределенных систем, в том числе с использованием теоремы 1, изучались также в [21; 22], однако в указанных работах предполагалась положительная определенность квадратичной формы (1.4), присутствующей в правых частях динамической системы (1.1)–(1.5). В данной статье рассмотрен более общий случай, когда все отмеченные выше факторы, осложняющие анализ динамических свойств системы, присутствуют.

2.3. Пример

Примеры и результаты численного моделирования, иллюстрирующие указанные оценки, приведены в работах [13; 14; 22]. Заметим, что отказ от требования положительной определенности матрицы B в форме (1.4) существенно усложняет анализ, а также значительно ухудшает геометрические свойства множеств достижимости $\mathcal{X}(t)$ для таких систем.

П р и м е р 1. Рассмотрим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 & = & c(t)x_1 + x_1^2 - x_2^2 + u_2, \end{array}\right. \qquad x_0 \in X_0, \quad t_0 \leq t \leq T. \tag{2.16}$$

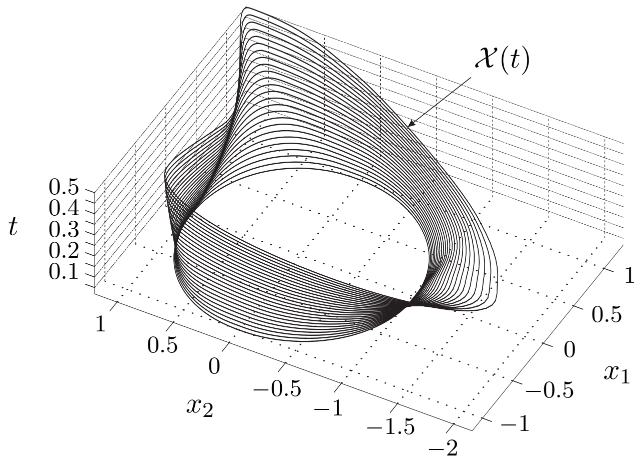

Рис. 1. Траекторная трубка $\mathcal{X}(t)$ системы (2.16).

Здесь $t_0 = 0$, $T = 0.5$, $X_0 = B(0,1)$, $U = B(0, 0.15)$, точно не известная измеримая функция $c(t)$ удовлетворяет априорному ограничению $|c(t)| \leq 1$ $(t_0 \leq t \leq T)$. Множества достижимости системы $\mathcal{X}(t)$ показаны на рис. 1 при различных значениях времени t. Заметим, что множества $\mathcal{X}(t)$ даже на малых промежутках времени быстро теряют свойство выпуклости и приобретают достаточно сложную геометрическую форму.

3. Общий случай: алгоритм внешнего оценивания множества достижимости

3.1. Система с комбинированной нелинейностью и неопределенностью

В данном подразделе рассмотрим общий случай

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + x'Bxd + u(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0), \quad u(t) \in U = E(\hat{a}, \hat{Q}). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь матрицы B, $\hat{Q}$ and Q_0 предполагаются симметричными, причем матрицы $\hat{Q}$ and Q_0 положительно определены. Положительная определенность матрицы B в данном случае, в отличие от работы [22], не предполагается.

Будем считать, как и в предыдущем разделе, что матричная функция $A(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{3.2}$$

где матрица A^0 задана, а матричная функция $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ $(t \in [t_0, T])$,

$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad \mathcal{A}^1 = \left\{ A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n} \colon |a_{ij}|{\leq}c_{ij}, \ i,j{=}1,\dots n \right\}, \tag{3.3}$$

числа $c_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \dots n)$ предполагаются в (3.2), (3.3) заданными.

Используя классические процедуры матричной диагонализации, найдем невырожденное преобразование координат $z = Zx$ $(x, z \in \mathbb{R}^n)$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$, при котором исходная система примет вид

$$\begin{gathered} \dot{z} = A^*(t)\, z + z'B^*z\, d^* + w(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ z_0 \in Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*), \quad w(t) \in W = E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*), \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $B^* = \mathrm{diag}\{b_1^*, \dots b_n^*\}$ и b_i^* $(i = 1, \dots, n)$ — собственные значения матрицы B^*. Можно считать без потери общности, что $b_i^* = \alpha_i^2$ $(i = 1, \dots, s)$ and $b_i^* = -\beta_i^2$ $(i = i+1, \dots, n)$.

Обозначим

$$f^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 z_i^2, \quad f^{(2)}(z) = \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i^2 z_i^2, \tag{3.5}$$

$$d^{(1)} = d^*, \quad d^{(2)} = -d^* \tag{3.6}$$

и перепишем систему (3.4) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \dot z = A^*(t)z + f^{(1)}(z)d^{(1)} + f^{(2)}(z)d^{(2)} + w(t), \quad t_0 \le t \le T, \\ z_0 \in Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*), \quad w(t) \in W = E(\hat a^*, \hat Q^*), \\ A^*(t) = A^{0*} + A^*(t), \quad A^{0*} = ZA^0Z^{-1}, \quad A^*(t) = ZA(t)Z^{-1}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Таким образом, справедлив следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Система* (3.1) *может быть преобразована к каноническому виду* (3.7)*, где квадратичные формы $f^{(1)}(z)$ and $f^{(2)}(z)$ определены соотношениями* (3.5)*, а векторы $d^{(1)}$, $d^{(2)}$ — равенствами* (3.6).

З а м е ч а н и е 3. Функции $f^{(1)}(z)$ and $f^{(2)}(z)$ в системе (3.7), вообще говоря, могут оказаться лишь положительно полуопределенными формами, что соответствует случаю строгих неравенств $1 < s < n$ для индекса s в соотношениях (3.5). Для того, чтобы обойти неудобную для дальнейшего анализа ситуацию полуопределенности форм, модифицируем систему (3.7), введя малый параметр $\lambda > 0$ следующим образом:

$$f_\lambda^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 z_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=s+1}^{n} z_i^2, \quad f_\lambda^{(2)}(z) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{s} z_i^2 + \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i^2 z_i^2. \tag{3.8}$$

Мы можем считать также, что все числа α_i^2 $(i = 1, \dots, s)$ и β_i^2 $(i = s+1, \dots, n)$ положительны, в противном случае аналогичным образом вместо нулевых слагаемых добавим малые положительные члены требуемого вида. В итоге указанных малых модификаций (3.8), сделанных в соответствии с замечанием 3, вместо (3.7) будем иметь систему

$$\begin{gathered} \dot z = A^*(t)z + f_\lambda^{(1)}(z)\, d^{(1)} + f_\lambda^{(2)}(z)\, d^{(2)} + w(t), \\ z_0 \in Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*), \quad w(t) \in W = E(\hat a^*, \hat Q^*), \quad t_0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{3.9}$$

где $f_\lambda^{(i)}(z)$ $(i = 1, 2)$ — положительно определенные квадратичные формы.

Лемма 2. *Внешние* (*по отношению к операции включения множеств*) *оценки множеств достижимости системы* (3.9) *и системы* (3.4) (*и, следовательно,* (3.1)) *можно сделать сколь угодно близкими в метрике Хаусдорфа за счет выбора достаточно малого параметра $\lambda > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы непосредственно вытекает из результата работы [23]. □

Будем считать далее, что указанные выше модификации исходной системы сделаны, и, чтобы не усложнять обозначения, в дальнейшем параметр $\lambda > 0$ и символ $*$ опускаем. Таким образом, полагаем, что после необходимых преобразований система (3.1) имеет вид

$$\dot z = A(t)z + f^{(1)}(z)\, d^{(1)} + f^{(2)}(z)\, d^{(2)} + w(t), \quad z_0 \in Z_0 = E(a_0, Q_0), \tag{3.10}$$

$$w(t) \in W = E(\hat a, \hat Q), \quad t_0 \le t \le T. \tag{3.11}$$

Здесь функции $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$ — положительно определенные квадратичные формы,

$$f^{(i)}(z) = z'B^{(i)}z,\ B^{(i)} = \mathrm{diag}\{b_1^{(i)2}, \dots b_n^{(i)2}\}, \quad b_1^{(i)} \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

n-векторы $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ заданы, а матрица $A(t)$ известна неточно и удовлетворяет ограничению

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{3.12}$$

где матрица A^0 задана, а матричная функция $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ $(t \in [t_0, T])$,

$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad \mathcal{A}^1 = \left\{A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n} \colon |a_{ij}|{\le}c_{ij},\ i,j{=}1,\dots n\right\}, \tag{3.13}$$

числа $c_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \dots n)$ предполагаются заданными (здесь следует отметить, что при линейном преобразовании пространства, описанном выше, необходимо пересчитать также и коэффициенты c_{ij} (3.12), (3.13) ограничения на элементы неизвестной матрицы, оценив их сверху; для того чтобы не усложнять далее обозначения, будем считать, что это уже сделано).

Пусть для чисел $\alpha, \beta > 0$ и вектора $d \in \mathbb{R}^n$ символ $W(d, \alpha, \beta)$ означает минимальный по объему эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, содержащий алгебраическую сумму эллипсоида $E(\hat{a}, \hat{Q})$ из (1.3) (и, соответственно, (3.11)) и отрезка (вырожденного эллипсоида) $[\alpha, \beta]\, d$.

З а м е ч а н и е 4. Для вычисления центра и матрицы оценивающего эллипсоида $W(d, \alpha, \beta)$ можно использовать, например, метод, описанный в [19, с. 100–104].

Обозначим также, аналогично формуле (2.1),

$$(k_0^{i+})^2 = \max_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n \colon ||l||=1\}} l'B^{(i)1/2}Q_0B^{(i)1/2}l, \quad i = 1, 2.$$

Лемма 3. *Существуют $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}^1$ такие, что справедливы включения*

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{Q}) + \bigcup f^{(2)}(x)\, d^{(2)} \mid x \in E(a_0, (k_0^{2+})^2(B^{(2)})^{-1}) \subseteq W(d^{(2)}, \alpha_1, \beta_1),\\ E(\hat{a}, \hat{Q}) + \bigcup f^{(1)}(x)\, d^{(1)} \mid x \in E(a_0, (k_0^{1+})^2(B^{(1)})^{-1}) \subseteq W(d^{(1)}, \alpha_2, \beta_2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим вначале множество

$$Z_1 = \bigcup \{f^{(2)}(x)\, d^{(2)} \mid x \in E(a_0, (k_0^{2+})^2(B^{(2)})^{-1})\}.$$

Примем $z = x - a_0$, тогда, с учетом равенства $f^{(2)}(x) = x'B^{(2)}x$, получим

$$Z_1 = a_0'B^{(2)}a_0\, d^{(2)} + \bigcup \{z'B^{(2)}z + 2a_0'B^{(2)}z \mid z \in E(0, (k_0^{2+})^2(B^{(2)})^{-1})\}\, d^{(2)}$$

и далее, полагая $w = (B^{(2)})^{1/2}z$ (обозначение корректно, так как матрица $B^{(2)}$ положительно определена), имеем

$$Z_1 = a_0'B^{(2)}a_0\, d^{(2)} + \bigcup \{w'w + 2a_0'(B^{(2)})^{1/2}w \mid w \in B(0, k_0^{2+})\}\, d^{(2)}. \tag{3.15}$$

Обозначим

$$\beta_1 = a_0'B^{(2)}a_0 + k_0^{2+}(k_0^{2+} + 2\|a_0'(B^{(2)})^{1/2}\|),\ \alpha_1 = -2a_0'B^{(2)}a_0,$$

тогда из (3.15) нетрудно получить оценку $Z_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]d^{(2)}$, следовательно, верно первое включение в (3.14) с указанными параметрами α_1, β_1. Вторая оценка в (3.14) устанавливается аналогично, с той же схемой выбора α_2, β_2. □

Пусть $W(d^{(2)}, \alpha_1, \beta_1) = E(\hat{a}_{w1}, \hat{Q}_{w1})$ и $W(d^{(1)}, \alpha_2, \beta_2) = E(\hat{a}_{w2}, \hat{Q}_{w2})$ (см. также замечание 4).

Справедлив следующий результат, дающий возможность найти пошаговую (во времени) внешнюю оценку множеств достижимости системы (3.10) (а следовательно, в силу замечания 3, и системы (3.9)). Результат формулируется как оценка динамики системы при малых сдвигах во времени, что позволяет использовать указанные ниже новые соотношения в вычислительных схемах для анализа более общего, чем в иных работах, класса динамических систем с неопределенностью и нелинейностью.

Теорема 2. *Справедливо включение*

$$\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq E(a^{*1}(t_0+\sigma), Q^{*1}(t_0+\sigma)) \bigcap E(a^{*2}(t_0+\sigma), Q^{*2}(t_0+\sigma)) + o(\sigma)B(0,1), \tag{3.16}$$

где $\sigma^{-1}o(\sigma) \to 0$ *при* $\sigma \to +0$ *и*

$$a^{*i}(t_0+\sigma) = \tilde{a}^{*i}(t_0+\sigma) + \sigma(\hat{a}_{wi} + a_0' B^{(i)} a_0\, d^i + (k_0^{i+})^2 d^{(i)}), \tag{3.17}$$

$$Q^{*i}(t_0+\sigma) = (p^{-1}+1)\tilde{Q}^i(t_0+\sigma) + (p+1)\sigma^2 \hat{Q}_{wi}, \quad i=1,2, \tag{3.18}$$

здесь функции $\tilde{a}^{*i}(t)$, $\tilde{Q}^i(t)$ *вычисляются по формулам* (2.13)–(2.15) *при последовательной замене в этих уравнениях* (*при* $i=1,2$) *матрицы* A^0 *на матрицу* $\tilde{A}^{0*i} = A^0 + d^{(i)} a_0' B^{(i)}$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы вытекает из последовательного применения лемм 1–3 к анализу исходной системы общего вида (3.10), а также следует из результата теоремы 1. □

Приведем алгоритм построения внешней эллипсоидальной оценки множества достижимости (и соответствующей траекторной трубки) рассматриваемой системы.

А л г о р и т м внешнего оценивания.

1. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ таким образом, чтобы $t_i = t_0 + ih$ ($i = 1, \ldots, m$), $h = (T-t_0)/m$, $t_m = T$.
2. При данном начальном множестве $Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*)$ положим $\sigma = h$ и найдем два оценивающих эллипсоида $E(a^{(1)}(\sigma), Q^{(1)}(\sigma))$ и $E(a^{(2)}(\sigma), Q^{(2)}(\sigma))$ в соответствии с соотношениями (3.16)–(3.18) теоремы 2 так, чтобы выполнялось включение
$$Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*) \subseteq E(a^{(1)}(\sigma), Q^{(1)}(\sigma)) \bigcap E(a^{(2)}(\sigma), Q^{(2)}(\sigma)) + o(\sigma)B(0,1).$$
3. Найдем наименьший (по какому-либо критерию, например минимального объема [9;10]) эллипсоид $E(a^*, Q^*)$, содержащий пересечение
$$E(a^*, Q^*) \supseteq E(a^{(1)}(\sigma), Q^{(1)}(\sigma)) \bigcap E(a^{(2)}(\sigma), Q^{(2)}(\sigma)).$$
4. Построим эллипсоид $E(a_1, Q_1)$, оценивающий сверху по включению сумму двух эллипсоидов [9], $E(a^*, Q^*)$ и $\sigma E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*)$:
$$E(a^*, Q^*) + \sigma E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*) \subseteq E(a_1, Q_1).$$
5. Рассмотрим систему на следующем временном промежутке $[t_1, t_2]$ с эллипсоидом $E(a_1, Q_1)$, взятым в качестве начального в момент t_1.
6. Следующий шаг повторяют предыдущий, итерационный процесс продолжается до конца временного промежутка; при $m \to \infty$ получаются более точные результаты.

3.2. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - 0.1x_1^2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 + 0.8x_1^2 + x_2^2 + u_2, \end{cases} \qquad x_0 \in X_0, \quad t_0 \le t \le T.$$

Здесь $t_0 = 0$, $T = 0.4$, $X_0 = B(0,1)$, $U = B(0, 0.15)$, измеримая функция $c(t)$, известная неточно, удовлетворяет априорному ограничению $|c(t)| \le 1$ ($t_0 \le t \le T$). Множества достижимости системы $\mathcal{X}(t)$ и их внешние эллипсоидальные оценки $E(a^*(t), Q^*(t))$, найденные в соответствии с описанной выше процедурой оценивания, показаны на рис. 2 при различных значениях времени $t \in [0, 0.4]$.

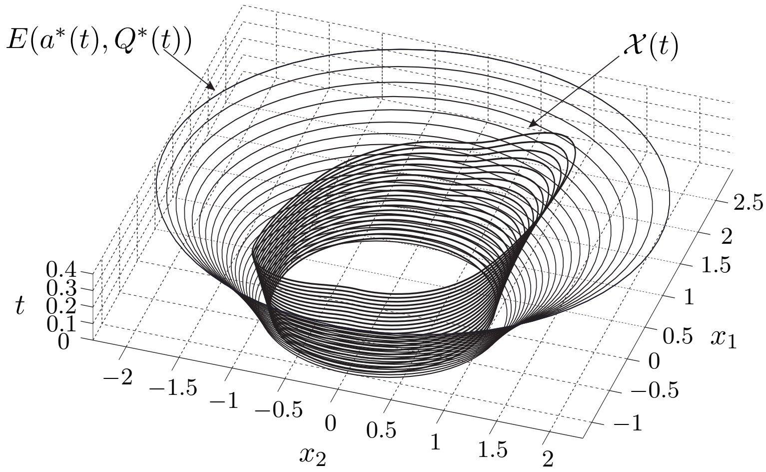

Рис. 2. Множества достижимости $\mathcal{X}(t)$ и их внешние эллипсоидальные оценки $E(a^*(t), Q^*(t))$.

4. Заключение

В данной работе исследованы проблемы оценивания состояний неопределенной динамической управляемой системы с неточно известным начальным состоянием и неточно известной матрицей, входящей в дифференциальные уравнения динамики системы. Предполагается, что указанные неизвестные параметры являются элементами заданных (известных) множеств.

Изучен случай, когда динамика управляемой системы нелинейна и определяется присутствием квадратичных функций (без предположения о положительной определенности соответствующих квадратичных форм) в фазовых скоростях системы, а также осложнена наличием билинейности из-за неопределенности в матричных коэффициентах в динамических уравнениях.

В работе предложены новые модели и алгоритмы оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы с указанной комбинированной нелинейностью билинейного и квадратичного типа, обобщающие ранее полученные в работах [18; 21; 22]. Результаты основаны на алгоритмах и методах теории эллипсоидального оценивания и теории дифференциальных уравнений и включений. Другие постановки и подходы к решению задач оценивания состояний управляемых динамических систем с неопределенностью обсуждались в работах [16; 21; 24–26]. Отметим, что вопрос о дифференциальных уравнениях, описывающих динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости динамических систем рассматриваемого здесь общего класса, остается на данный момент времени открытым, отдельные подходы к решению этой сложной проблемы при некоторых упрощающих предположениях были намечены в [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
3. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
5. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896.
6. **Subbotina N.N., Kolpakova E.A.** Connections between optimal control problems and generalized solutions of PDEs of the first order // IFAC Proc. Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. Vol. 19, iss. 3. P. 11381–11384. doi: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.01149.

7. **Kurzhanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control //Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia / ed. A.B. Kurzhanski. Boston: Birkhauser, 1993. P. 122–188. (Progress in Systems and Control Theory; vol. 17). doi: 10.1007/978-1-4612-0349-0_4.
8. **Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика, Механика, Компьют. науки. 2011. № 4. С. 23–39.
9. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
10. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
11. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
12. **Filippova T.F.** Trajectory tubes for impulsive control problems // 6th European Control Conference (ECC 2001). 2001. Article number 7076349. P. 2766–2769.
13. **Filippova T.** Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty // AIMS J. Discrete Contin. Dyn. Syst.: 8th AIMS Conf. on Dyn. Syst., Diff. Eq. and Appl. 2011. Suppl. Vol. I. P. 410–419.
14. **Filippova T.F.** Set-valued dynamics in problems of mathematical theory of control processes // International Journal of Modern Physics B. 2012. Vol. 26, no. 25. P. 1–8.
15. **Filippova T.F., Berezina E.V.** On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: Theory and computer simulations // Proc. of the International Conf. on Large-Scale Scientific Computing. Berlin: Springer, 2008. P. 326–333. doi: 10.1007/978-3-540-78827-0_36.
16. **Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.** Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 127–141.
17. **Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.** Задачи импульсного управления в условиях неопределенности // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014) / Институт проблем управления РАН. Москва, 2014. С. 1024–1032.
18. **Filippova T.F., Matviychuk O.G.** Algorithms of estimating reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty // Proc. of the 7th Chaotic Modeling and Simulation Internat. Conf.: Internat. Society for the Advancement of Science and Technology / ed. Ch. H. Skiadas. 2014. P. 115–124.
19. **Черноусько Ф.Л.** Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 940–950.
20. **Filippova T.F.** Differential equations of ellipsoidal state estimates for bilinear-quadratic control systems under uncertainty // 9th Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. (CHAOS 2016): Book Abstr. London, 2016. P. 32.
21. **Filippova T.F., Matviychuk O.G., Kostousova E.K.** Estimation techniques for uncertain dynamical systems with bilinear and quadratic nonlinearities // Dynamical Systems: Control and Stability. Proc. of the 13th Internat. Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications (DSTA-2015) / eds. J.M.J. Awrejcewicz, M. Karźmierczak and P. Olejnik. 2015. P. 185–196.
22. **Filippova T.F., Matviychuk O.G.** Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no 1. P. 45–54.
23. **Filippova T.F.** Asymptotic behavior of the ellipsoidal estimates of reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty // Proc. of the 8th European Nonlinear Dynamics Conf. (ENOC 2014) / eds. H. Ecker, A. Steindl, S. Jakubek 2014. CD-ROM vol. (ISBN: 978-3-200-03433-4). Paper-ID 149. P. 1–2.
24. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
25. **Kostousova E.K.** On tight polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems // AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1493. P. 579–586.
26. **Kostousova E.K.** State estimation for control systems with a multiplicative uncertainty through polyhedral techniques // IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT). 2013. Vol. 391. P. 165–176. doi: 10.1007/978-3-642-36062-6_17.

Филиппова Татьяна Федоровна
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ftf@imm.uran.ru

Поступила 08.11.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
4. Ushakov V.N. On the problem of stable bridges construction in the differential game of pursuit-evasion. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1980, no. 4, pp. 29–36 (in Russian).
5. Subbotina N.N. Universal optimal strategies in positional differential games. *Differentsial'nye uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896 (in Russian).
6. Subbotina N.N., Kolpakova E.A. Connections between optimal control problems and generalized solutions of PDEs of the first order. *IFAC Proc. Volumes* (IFAC-PapersOnline). 2014, vol. 19, iss. 3, pp. 11381–11384. http://dx.doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01149.
7. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control. *Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia*, ed. A.B. Kurzhanski, Boston: Birkhauser, 1993, Ser. Progress in Systems and Control Theory, vol. 17, pp. 122–188. doi: 10.1007/978-1-4612-0349-0_4.
8. Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Ushakov A.V. Approximations of attainability sets and of integral funnels of differential inclusions. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, no. 4, pp. 23–39 (in Russian).
9. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p.
10. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Estimation of phase state of dynamic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 320 p.
11. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation.* Basel: Birkhäuser, 2014, Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, vol. 85, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
12. Filippova T.F. Trajectory tubes for impulsive control problems. 6*th European Control Conference* (ECC 2001), 2001, Article number 7076349, pp. 2766–2769.
13. Filippova T.F. Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty. *AIMS J. Discrete Contin. Dyn. Syst.:* 8*th AIMS Conf. on Dyn. Syst., Diff. Equat. and Appl.*, 2011, Suppl. Vol. I, pp. 410–419.
14. Filippova T.F. Set-valued dynamics in problems of mathematical theory of control processes. *International Journal of Modern Physics B*, 2012, vol. 26, no. 25, pp. 1–8.
15. Filippova T.F., Berezina E.V. On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: Theory and computer simulations. *Proc. Internat. Conf. on Large-Scale Scientific Computing*, Berlin: Springer, 2008, pp. 326–333. doi: 10.1007/978-3-540-78827-0_36.
16. Filippova T.F., Matviichuk O.G. Algorithms to estimate the reachability sets of the pulse controlled systems with ellipsoidal phase constraints. *Automation and Remote Control*, 2011, Vol. 72, no. 9, pp. 1911–1924. doi: 10. 1134/S000511791109013X.
17. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Problems for impulse control under uncertainty. *Trudy* XII *Vserossiiskogo soveshchaniya po problemam upravleniya* (VSPU-2014) [Proc. of the XII Russian National Conf. on Control Problems (VSPU-2014)], Moscow, 2014, pp. 1024–1032.
18. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Algorithms of estimating reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty. *Proc. of the 7th Chaotic Modeling and Simulation Internat. Conf.* Published by ISAST: Internat. Society for the Advancement of Science and Technology, ed. Ch.H. Skiadas, 2014, pp. 115–124.
19. Chernous'ko F.L. Ellipsoidal approximation of attainability sets of a linear system with indeterminate matrix. *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, iss. 6, pp. 921–931. doi: 10.1016/S0021-8928(96)00114-1.
20. Filippova T.F. Differential equations of ellipsoidal state estimates for bilinear-quadratic control systems under uncertainty. 9*th Chaotic Modeling and Simulation Internat. Conf.* (CHAOS 2016): Book Abstr. London, 2016. P. 32.
21. Filippova T.F., Matviychuk O.G., Kostousova E.K. Estimation techniques for uncertain dynamical systems with bilinear and quadratic nonlinearities. *Dynamical Systems: Control and Stability. Proc. of the* 13*th Internat. Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications* (DSTA-2015), eds. J.M.J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak and P. Olejnik, 2015, pp. 185–196.

22. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities. *Ural Math. J.* 2015, vol. 1, no. 1, pp. 45–54.
23. Filippova T.F. Asymptotic behavior of the ellipsoidal estimates of reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty. *Proc. 8th European Nonlinear Dynamics Conf.* (ENOC 2014), eds. H. Ecker, A. Steindl, S. Jakubek, 2014, CD-ROM vol., ISBN: 978-3-200-03433-4, Paper-ID 149, pp. 1–2.
24. Gusev M.I. External estimates of the reachability sets of nonlinear controlled systems. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 450–461. doi: 10.1134/S0005117912030046 .
25. Kostousova E.K. On tight polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1493, pp. 579–586.
26. Kostousova E.K. State estimation for control systems with a multiplicative uncertainty through polyhedral techniques. *IFIP Advances in Information and Communication Technology* (IFIP AICT*)*, 2013, vol. 391, pp. 165–176. doi: 10.1007/978-3-642-36062-6_17.

T. F. Filippova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: ftf@imm.uran.ru .