ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 519.857

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ С ПЛАТОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

В. И. Ухоботов

Рассматривается линейная задача управления в $\mathbb{R}^m$ при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Управляемый процесс происходит на заданном промежутке времени $[t_0, p]$. Возможные значения помехи принадлежат компакту. Управление ищется в виде произведения скалярной функции $\phi(t) \in [\delta, \alpha]$ на векторную функцию $\xi(t, x) \in M$, $x \in \mathbb{R}^m$. Отрезок $[\delta, \alpha]$ и выпуклый симметричный компакт M заданы. Такое определение управления возникает в задачах управления механическими системами переменного состава. Возможен случай, когда закон изменения реактивной массы задается функцией времени t, а управлять можно направлением относительной скорости ее отделения. Терминальная часть платы зависит от модуля линейной функции от вектора $x(p)$. Задана функция $g(t, \phi) \geq 0$ при $t \in [t_0, p]$, $\phi \in [\delta, \alpha]$. Интегральная составляющая платы является интегралом на отрезке $[t_0, p]$ от функции $g(t, \phi(t))$. Задача управления рассматривается в рамках теории оптимизации гарантированного результата. Доказана теорема существования оптимального управления с достаточно широкими ограничениями на рассматриваемый класс задач. Найдены достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным. Рассмотрен пример, который иллюстрирует найденные достаточные условия.

Ключевые слова: управление, помеха, плата, дифференциальная игра.

V. I. Ukhobotov. A linear control problem under interference with a payoff depending on the modulus of a linear function.

We consider a linear control problem in $\mathbb{R}^m$ under the action of an uncontrolled interference. The control process occurs on a given time interval $[t_0, p]$. The possible values of the interference belong to a compact set. The control is sought as the product of a scalar function $\phi(t) \in [\delta, \alpha]$ and a vector function $\xi(t, x) \in M$, $x \in \mathbb{R}^m$. The interval $[\delta, \alpha]$ and the convex symmetric compact set M are given. This definition of the control arises in control problems for mechanical systems of variable composition. For example, the law of variation of a reaction mass is defined as a function of time t, and the control affects the direction of relative velocity in which the mass is separated. The terminal part of the payoff depends on the modulus of a linear function of the vector $x(p)$. The integral part of the payoff is the integral over the interval $[t_0, p]$ of a given function $g(t, \phi(t))$, where $g(t, \phi) \geq 0$ for $t \in [t_0, p]$ and $\phi \in [\delta, \alpha]$. The control problem is considered within the theory of guaranteed result optimization. An optimal control existence theorem is proved under rather wide constraints on the class of problems. Sufficient conditions are found under which an admissible control is optimal. An example that illustrates the sufficient conditions is considered.

Keywords: control, interference, payoff, differential game.

MSC: 91A23, 91A24, 91A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-251-261

Введение

Линейную задачу управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [1] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управления и помехи, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени. В случае, если в линейной задаче управления с помехой платой является значение в заданный момент времени модуля линейной функции, то линейная замена переменных приводит к однотипной задаче, когда множества значений управления и помехи являются отрезками, зависящими от времени. В более общем случае такие задачи характеризуются тем, что вектограммами управления и помехи являются шары, радиусы которых зависят от времени. Аналогичную динамику имеют после замены и известные дифференциальные игры “изотропные ракеты” [2], контрольный пример Л.С. Понтрягина [3]. Для таких дифференциальных игр в случае, когда терминальное множество является шаром заданного радиуса, в [3] построен альтернированный интеграл. В [4] построены оптимальные позиционные стратегии игроков, в работе [5] построен альтернированный интеграл для однотипных игр с произвольным выпуклым замкнутым терминальным множеством и построены оптимальные позиционные управления игроков, в [6] первый игрок, выводя фазовую точку на круг заданного радиуса, минимизирует интегральную плату, которая задается выпуклой функцией от нормы его управления.

В настоящей статье рассматривается однотипная задача управления с помехой, в которой управление строится из условия минимизации платы, являющейся суммой как терминальной, так и интегральной составляющих. Доказана теорема существования оптимального управления с достаточно широкими ограничениями на рассматриваемый класс задач. Найдены достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным. Рассмотрен пример, иллюстрирующий найденные достаточные условия.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + \phi B(t)\xi + \eta, \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \le p. \tag{1.1}$$

Здесь p — заданный момент окончания процесса управления, а t_0 — начальный момент времени; $\phi \in [\delta, \alpha]$ и $\xi \in M$ — управления, причем числа $0 \le \delta < \alpha$, а множество M является связным симметричным относительно начала координат компактом в $\mathbb{R}^s$; помеха η принадлежит связному компакту $Q \subset \mathbb{R}^m$; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные при $t_0 \le t \le p$ матрицы соответствующих размерностей.

Допустимым управлением являются измеримая функция $\phi\colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ и произвольная функция $\xi\colon [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to M$. Помеха реализуется в виде произвольной функции $\eta\colon [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to Q$.

З а м е ч а н и е. Такое определение допустимого управления продиктовано следующим соображением. В задачах управления механическими системами переменного состава, движение которых описывается уравнением Мещерского [7, с. 25], возможен случай, когда закон изменения реактивной массы нужно задавать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости ее отделения [6]. В этом случае приходим к сформулированному выше допустимому управлению.

Следуя [1], движения системы (1.1), порожденные допустимыми управлениями и помехой, определим с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω отрезка $[t_0, p]$ с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_q < t_{q+1} = p, \quad d(\omega) = \max_{1 \le i \le q}(t_{i+1} - t_i).$$

Положим $x_\omega(t_0) = x_0$ и при $t_i \le t \le t_{i+1}$, $i = \overline{0, q}$,

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + \phi(t)B(t)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \eta(t_i, x_\omega(t_i)). \tag{1.2}$$

Можно показать, что семейство ломаных (1.2), определенных на отрезке $[t_0, p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела [8, с. 104] из любой последовательности ломаных (1.2) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением, реализовавшимся при допустимых $\phi(t)$, $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$ из начального состояния $x(t_0) = x_0$, будем понимать любой равномерный предел последовательности ломаных (1.2), у которых диаметр разбиения $d(\omega)$ стремится к нулю.

Показателем качества управления является величина

$$G(|\langle \psi_0, x(p) \rangle - C|) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr. \tag{1.3}$$

Здесь $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ — заданный вектор; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$; C — заданное число; $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и $g\colon [t_0,p]\times[\delta,\alpha] \to \mathbb{R}$ — заданные функции.

Предположение 1. *Функция $g(t,\phi)$ измерима по $t \in [t_0,p]$ при каждом $\phi \in [\delta,\alpha]$ и непрерывна по ϕ при каждом $t \in [t_0,p]$; $0 \le g(t,\phi) \le D(t)$ при каждых $t \in [t_0,p]$ и $\phi \in [\delta,\alpha]$, где функция $D(t)$ суммируема на отрезке $[t_0,p]$.*

Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата [1] показателя качества (1.3).

2. Переход к одномерной однотипной задаче

Следуя [1, с. 160], перейдем к новой управляемой системе, в уравнениях движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши

$$\dot\psi = -A^*(t)\psi, \quad \psi(p) = \psi_0. \tag{2.1}$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица. Положим

$$b_-(t) = \min_{\eta\in Q}\langle\psi(t),\eta\rangle, \quad b_+(t) = \max_{\eta\in Q}\langle\psi(t),\eta\rangle. \tag{2.2}$$

Тогда из связности компакта Q вытекает [9, теорема 4], что

$$\langle\psi(t),\eta\rangle = \frac{1}{2}(b_+(t)+b_-(t)) + b(t)v, \quad |v|\le 1, \quad b(t) = \frac{1}{2}(b_+(t)-b_-(t)) \ge 0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$a(t) = \max_{\xi\in M}\langle\psi(t),B(t)\xi\rangle. \tag{2.4}$$

Из связности и из симметрии компакта M следует, что $a(t)\ge 0$ и

$$\langle\psi(t),B(t)\xi\rangle = -a(t)u, \quad |u|\le 1. \tag{2.5}$$

Отметим, что функции (2.2) и (2.4) являются непрерывными [10, лемма II. 3.5.]. Следовательно, непрерывной является и функция $b(t)$ (2.3).

Перейдем к новой переменной

$$z = \langle\psi(t),x\rangle + \frac{1}{2}\int_t^p (b_+(r)+b_-(r))dr - C. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.1) и (2.6) выводим, что $z(p) = \langle\psi_0, x(p)\rangle - C$, а ломаная $z_\omega(t)$, отвечающая ломаной (1.2), определяется равенствами

$$\dot z_\omega(t) = -\phi(t)a(t)u_i + b(t)v_i, \quad |u_i|\le 1, \quad |v_i|\le 1.$$

Таким образом, получили одномерную однотипную задачу управления

$$\dot z = -\phi a(t)u + b(t)v, \quad z(t_0) = z_0; \quad \phi\in[\delta,\alpha], \quad |u|\le 1, \quad |v|\le 1, \tag{2.7}$$

с критерием качества

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p g(r,\phi(r))dr \to \min_u \max_v. \tag{2.8}$$

В этой задаче допустимым управлением являются измеримая функция $\phi\colon [t_0,p] \to [\delta,\alpha]$ и произвольная функция $u(t,z)$ с $|u(t,z)| \le 1$. Допустимой помехой является произвольная функция $v(t,z)$ с $|v(t,z)| \le 1$. Движение $z(t)$ определяется как равномерный предел последовательности ломаных

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int\limits_{t_i}^{t} \phi(r)a(r)dr\ u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int\limits_{t_i}^{t} b(r)dr\ v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \le t \le t_{i+1},$$

с диаметром разбиения $d(\omega) \to 0$.

О п р е д е л е н и е. Решением задачи (2.7), (2.8) называется допустимое управление $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и число V_0 такие, что

1) для любой допустимой помехи $v(t,z)$ и любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi_0(r))dr \le V_0;$$

2) для любого допустимого управления $\phi(t)$, $u(t,z)$ и любого числа $V < V_0$ найдется допустимая помеха $v(t,z)$ такая, что для любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi(t)$, $u(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr > V.$$

3. Условия оптимальности в однотипной задаче

Рассмотрим задачу (2.7), (2.8) в общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем измеримую функцию $\phi\colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$, число $\varepsilon \ge 0$ и рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot z = -\phi(t)a(t)u + b(t)v, \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1 \tag{3.1}$$

с условием окончания

$$|z(p)| \le \varepsilon. \tag{3.2}$$

Для полноты изложения считаем, что функции $a(t) \ge 0$ и $b(t) \ge 0$ суммируемы на отрезке $[t_0, p]$.

Для такой однотипной игры Л. С. Понтрягин [3] построил альтернированный интеграл. Из его вида следует, что начальное положение $z(t_0)$ принадлежит значению альтернированного интеграла в момент времени t_0 тогда и только тогда, когда

$$f_1(\phi(\cdot)) = |z(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{p} (b(r) - \phi(r)a(r))dr \le \varepsilon, \tag{3.3}$$

$$f_2(\phi(\cdot)) = \max_{t_0 \le t \le p} \int\limits_{t}^{p} (b(r) - \phi(r)a(r))dr \le \varepsilon. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$f(\phi(\cdot)) = \max(f_1(\phi(\cdot)); f_2(\phi(\cdot))), \tag{3.5}$$

$$w(z) = \frac{z}{|z|} \text{ при } |z| > 0 \text{ и } w(0) \text{ — любое с ограничением } |w(0)| = 1. \tag{3.6}$$

Теорема 1 [4, теоремы 8.1 и 8.2]. *Для начального состояния* $t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ *в игре* (3.1) *управление* $u = w(z)$ *обеспечивает выполнение неравенства* $|z(p)| \le f(\phi(\cdot))$ *для любой функции* $|v(t,z)| \le 1$ *и любого реализовавшегося движения* $z(t)$. *Управление* $v(t,z) = w(z)$ *обеспечивает выполнение неравенства* $|z(p)| \ge f(\phi(\cdot))$ *для любой функции* $|u(t,z)| \le 1$ *и любого реализовавшегося движения* $z(t)$.

Из этой теоремы, используя формулу (3.5), получим, что если выполнены неравенства (3.3) и (3.4), то управление $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства (3.2) для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения $z(t)$. Если же одно из неравенств (3.3) и (3.4) не выполнено, то управление $v = w(z)$ обеспечивает выполнение противоположного неравенства $|z(p)| > \varepsilon$ для любой функции $|u(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения $z(t)$.

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 2. *Функция* $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *является непрерывной, строго возрастает и* $G(\varepsilon) \to +\infty$ *при* $\varepsilon \to +\infty$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(\varepsilon, \phi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr \to \min, \tag{3.7}$$

$$f_1(\phi(\cdot)) \le \varepsilon, \quad f_2(\phi(\cdot)) \le \varepsilon, \quad \varepsilon \ge 0, \quad \phi\colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]. \tag{3.8}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_0 \ge 0$ *и* $\phi_0(t)$ *— решение задачи* (3.7), (3.8). *Тогда решением задачи* (2.7), (2.8) *являются функции* $\phi_0(t)$, $u = w(z)$ *и число* $V_0 = f_0(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot))$.

Доказательство. При ε_0 и $\phi_0(t)$ выполнены неравенства (3.3) и (3.4). Поэтому управление $\phi_0(t)$ и $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \le \varepsilon_0$ для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Из условия возрастания функции G получим, что

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi_0(r))dr \le f_0(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot)) = V_0.$$

Допустим, что существуют число $V < V_0$ и допустимое управление $\phi(t)$ и $u(t,z)$, обеспечивающее выполнение неравенства

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr \le V$$

для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения. Тогда это допустимое управление обеспечивает неравенство

$$|z(p)| \le G^{-1}\left(V - \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr\right) = \varepsilon \tag{3.9}$$

для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения. Значит эти $\varepsilon \ge 0$ и $\phi(t)$ удовлетворяют неравенствам (3.3) и (3.4) и, следовательно, ограничениям в задаче (3.7), (3.8). Поэтому

$$V_0 \le G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr.$$

Отсюда и из правой части (3.9) получим противоречие $V_0 \le V$.

З а м е ч а н и е. Поскольку функция (3.6) удовлетворяет условию $|w(z)| = 1$, то теорема 2 остается справедливой и для случая, когда ограничения на управление u в задаче (2.7), (2.8) имеют вид равенства $|u| = 1$.

Теорема 3. *Пусть дополнительно к предположениям 1 и 2 функция $g(t,\phi)$ при каждом $t_0 \le t \le p$ является выпуклой по ϕ, а функция $G(\varepsilon)$ ограничена снизу. Тогда решение в задаче* (3.7), (3.8) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим вначале, что связи (3.8) являются совместными. Из ограниченности снизу функции G и из условия $g(t,\phi) \ge 0$ следует, что значения функционала $f_0(\varepsilon,\phi(\cdot))$ ограничены снизу. Обозначим через V_0 значение его нижней грани при ограничениях (3.8). Тогда существуют последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varepsilon_k \ge 0$ и $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие ограничениям (3.8), такие что $f_0(\varepsilon_k,\phi_k(\cdot)) \to V_0$. Из формулы (3.7) выводим, что $G(\varepsilon_k) \le f_0(\varepsilon_k,\phi_k(\cdot))$. Отсюда, используя условие $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$, получим, что последовательность чисел $\varepsilon_k \ge 0$ ограничена сверху. Считаем, что $\varepsilon_k \to \varepsilon_0$ (иначе перейдем к сходящейся подпоследовательности).

Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ последовательности функций

$$l_k(t) = \int\limits_t^p (b(r) - \phi_k(r)a(r))dr, \quad g_k(t) = \int\limits_t^p g(r,\phi_k(r))dr, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

При любых $t_0 \le t < \tau \le p$ и $k \ge 1$ выполнены неравенства

$$|l_k(\tau) - l_k(t)| \le \int\limits_t^\tau (b(r) + a(r)\alpha)dr, \quad |g_k(\tau) - g_k(t)| \le \int\limits_t^\tau D(r)dr, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Из этих неравенств и из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [8, с. 282] следует, что каждая из последовательностей функций (3.10) на отрезке $[t_0,p]$ удовлетворяет условию равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности. Применяя теорему Арцела, можно считать, что $l_k(t) \to l_0(t)$, $g_k(t) \to g_0(t)$ равномерно на отрезке $[t_0,p]$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Предельные функции удовлетворяют неравенствам (3.11). Поэтому они являются абсолютно непрерывными на отрезке $[t_0,p]$.

Далее, числа ε_k и функции $\phi_k(t)$ удовлетворяют связям (3.8). Поэтому, используя обозначения (3.3), (3.4) и (3.10), имеем, что

$$|z(t_0)| + l_k(t_0) \le \varepsilon_k, \quad \max_{t_0 \le t \le p} l_k(t) \le \varepsilon_k. \tag{3.12}$$

Переходя к пределу в этих неравенствах, получим, что они выполнены для ε_0 и $l_0(t)$.

Покажем, что производные $\dot{l}_0(t)$ и $\dot{g}_0(t)$ предельных функций почти всюду на отрезке $[t_0,p]$ удовлетворяют включению

$$(\dot{l}_0(t), \dot{g}_0(t)) \in \operatorname{co} Q(t), \tag{3.13}$$

где

$$Q(t) = \left\{(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2 \colon q_1 = \phi a(t) - b(t),\ q_2 = -g(t,\phi),\ \phi \in [\delta,\alpha]\right\}.$$

Из непрерывности по $\phi \in [\delta,\alpha]$ функции $g(t,\phi)$ следует, что множество $Q(t)$ является замкнутым. Далее, множество $Q(t)$ содержится в шаре радиуса $a(t)\alpha+b(t)+D(t)$. Из измеримости по $t \in [t_0,p]$ функции $g(t,\phi)$ и функций $a(t)$ и $b(t)$ следует, что многозначная функция $Q(t)$ измерима по $t \in [t_0,p]$ [11]. Следовательно, для любых $t_0 \le t < \tau \le p$ интеграл $\int_t^\tau Q(r)dr$ является выпуклым компактом [11].

Из формул (3.10) следует, что при $t_0 \le t < \tau \le p$ выполнено включение

$$(l_k(\tau) - l_k(t), g_k(\tau) - g_k(t)) \in \int\limits_t^\tau Q(r)dr.$$

Переходя в этом включении к пределу, получим, что ему удовлетворяют и предельные функции. Запишем данное включение в виде

$$(0,0) \in \int\limits_t^\tau \Big((-\dot{l}_0(r), -\dot{g}_0(r)) + Q(r)\Big)dr.$$

Зафиксируем вектор $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда из предыдущего включения получим, что

$$\int\limits_t^\tau \gamma(r)dr \ge 0 \quad \text{при} \quad t_0 \le t < \tau \le p, \quad \gamma(r) = -\dot{l}_0(r)y_1 - \dot{g}_0(r)y_2 + \beta(y_1, y_2; Q(r)).$$

Здесь

$$\beta(y_1, y_2; Q(r)) = \max_{(q_1,q_2)} (y_1 q_1 + y_2 q_2), \quad (q_1, q_2) \in Q(r)$$

является опорной функцией множества $Q(r)$. Функция $\gamma(r)$ является суммируемой на отрезке $[t_0, p]$. Поэтому для почти всех $t \in [t_0, p]$ выполнено

$$\gamma(t) = \lim_{\tau \to t+0} \frac{1}{\tau - t} \int\limits_t^\tau \gamma(r)dr \ge 0.$$

Итак, для каждого вектора $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ существует множество полной меры $I \subset [t_0, p]$ такое, что

$$\dot{l}_0(t)y_1 + \dot{g}_0(t)y_2 \le \beta(y_1, y_2; Q(t)), \quad t \in I. \tag{3.14}$$

Множество векторов $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ с рациональными координатами образует счетное множество. Занумеруем их $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$. Каждому из них соответствует множество полной меры $I_i \in [t_0, p]$ такое, что выполнено (3.14). Их пересечение I_0 является множеством полной меры. Для каждого $t \in I_0$ и для каждого вектора $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$ справедливо неравенство (3.14). Из непрерывности опорной функции по переменным y_1 и y_2 следует, что неравенство (3.14) будет выполняться при $t \in I_0$ для любого вектора $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Отсюда получим, что включение (3.13) выполняется для всех $t \in I_0$.

Из включения (3.13), применяя теорему Каратеодори [10, теорема I. 1.1] и лемму об измеримом выборе [12], подобно тому как это сделано в [6], получим, что существует измеримая функция $\phi_0 \colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ такая, что

$$\dot{l}_0(t) = \phi_0(t)a(t) - b(t), \quad \dot{g}_0(t) \le -g(t, \phi_0(t)). \tag{3.15}$$

Отметим, что при доказательстве второго неравенства в (3.15) используется выпуклость по ϕ функции $g(t, \phi)$.

Поскольку $l_k(p) = 0$, то $l_0(p) = 0$. Поэтому

$$l_0(t) = \int\limits_t^p (b(r) - \phi_0(r)a(r))dr.$$

Далее, ε_0 и $l_0(t)$ удовлетворяют неравенствам (3.12). Поэтому ε_0 и $\phi_0(t)$ удовлетворяют связям в задаче (3.7), (3.8).

Из второй формулы (3.10) следует, что $g_k(p)=0$ и $g_k(t_0)\to V_0-G(\varepsilon_0)$. Поэтому $g_0(p)=0$ и $g_0(t_0)=V_0-G(\varepsilon_0)$. Отсюда, интегрируя второе неравенство в (3.15), получим, что

$$G(\varepsilon_0)+\int\limits_{t_0}^{p} g(r,\phi_0(r))dr\le V_0.$$

Стало быть, ε_0 и $\phi_0(t)$ — решение задачи (3.7), (3.8).

З а м е ч а н и е. Если известно решение $\phi_0(t)$ в задаче (3.7) и (3.8), то, подставляя его в формулу (2.5) при $u=w(z)$, где z и $w(z)$ определяются формулами (2.6) и (3.6), найдем решение $\xi(t,x)$ в исходной задаче (1.1).

Приведем достаточные условия, при выполнении которых число $\varepsilon_0\ge 0$ и измеримая функция $\phi_0\colon[t_0,p]\to[\delta,\alpha]$ являются решением задачи (3.7), (3.8).

Теорема 4. *Пусть число* $\varepsilon_0\ge 0$ *и измеримая функция* $\phi_0\colon[t_0,p]\to[\delta,\alpha]$ *удовлетворяют неравенствам* (3.8). *Пусть существуют число* $\lambda\ge 0$ *и неубывающая на отрезке* $[t_0,p]$ *функция* $\theta(t)$ *такие, что* $\theta(t_0)=0$ *и*

$$\int\limits_{t_0}^{p}\theta(r)(b(r)-\phi_0(r)a(r))dr=\theta(p)\varepsilon_0, \tag{3.16}$$

$$\lambda\Bigg(\int\limits_{t_0}^{p}(b(r)-\phi_0(r)a(r))dr+|z(t_0)|-\varepsilon_0\Bigg)=0, \tag{3.17}$$

$$G(\varepsilon_0)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon_0\le G(\varepsilon)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon \text{ при любом } \varepsilon\ge 0, \tag{3.18}$$

$$g(r,\phi_0(r))-(\theta(r)+\lambda)\phi_0(r)a(r)\le g(r,\phi)-(\theta(r)+\lambda)\phi a(r),\quad \phi\in[\delta,\alpha],\quad r\in[t_0,p]. \tag{3.19}$$

Тогда число $\varepsilon_0\ge 0$ *и функция* $\phi_0(t)$ *являются решением задачи* (3.7), (3.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное число $\varepsilon\ge 0$ и измеримую функцию $\phi\colon[t_0,p]\to[\delta,\alpha]$ и запишем функцию Лагранжа

$$L(\varepsilon,\phi(\cdot))=G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}g(r,\phi(r))dr+\int\limits_{t_0}^{p}\theta(r)(b(r)-\phi(r)a(r))dr-\theta(p)\varepsilon$$

$$+\lambda\Bigg(\int\limits_{t_0}^{p}(b(r)-\phi(r)a(r))dr+|z(t_0)|-\varepsilon\Bigg)$$

$$=G(\varepsilon)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon+\int\limits_{t_0}^{p}\Big(g(r,\phi(r))-(\theta(r)+\lambda)\phi(r)a(r)+(\theta(r)+\lambda)b(r)\Big)dr+\lambda|z(t_0)|.$$

Из формул (3.16)–(3.19) видно, что

$$G(\varepsilon_0)+\int\limits_{t_0}^{p}g(r,\phi_0(r))dr=L(\varepsilon_0,\phi_0(\cdot))\le L(\varepsilon,\phi(\cdot)) \tag{3.20}$$

для любого числа $\varepsilon\ge 0$ и любой измеримой функции $\phi\colon[t_0,p]\to[\delta,\alpha]$. Пусть ε и $\phi(t)$ удовлетворяют неравенствам (3.8). Тогда, используя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стильтьеса [13, с. 134], получим, что

$$\int\limits_{t_0}^{p}\theta(r)(b(r)-\phi(r)a(r))dr-\theta(p)\varepsilon=\int\limits_{t_0}^{p}\Bigg(\int\limits_{t}^{p}(b(r)-\phi(r)a(r))dr-\varepsilon\Bigg)d\theta(r)\le 0.$$

Значит,

$$L(\varepsilon, \phi(\cdot)) \leq G(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr.$$

Отсюда и из (3.20) следует, что ε_0 и $\phi_0(t)$ являются решением задачи (3.7), (3.8).

4. Пример

Точка переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [7, с. 25]

$$\ddot{x} = \mu + \xi \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

преследует точку, движущуюся с ограниченной по величине скоростью $|\dot{y}| \leq b$, $b > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Здесь вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$ определяется постоянной внешней силой; величина $|\xi|$ относительной скорости отделяющихся частиц является постоянной; $m(t) = m_0 + m_1(t)$ — масса точки, причем m_0 — неизменяемая часть массы, $m_1(t)$ — реактивная масса. Считаем, что тяга ограничена числом $\gamma > 0$, т. е. $-|\xi|\dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)} \leq \gamma$.

Задан момент окончания $p > 0$. Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \frac{t}{p}, \quad z = \frac{1}{pb}\Big(y - x - (p-t)\dot{x} - \mu\frac{(p-t)^2}{2}\Big),$$

$$u = -\frac{\xi}{|\xi|}, \quad \phi = -\frac{p}{b}|\xi|\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad v = \frac{1}{b}\dot{y}, \quad \alpha = \frac{p}{b}\gamma.$$

Тогда

$$|y(p) - x(p)| = pb|z(1)|, \quad \int\limits_0^1 \phi(r)dr = \frac{|\xi|}{b}\ln\frac{m_0 + m_1(0)}{m_0},$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -(1-\tau)\phi u + v, \quad |u| = 1, \quad 0 \leq \phi \leq \alpha, \quad |v| \leq 1.$$

Управление ϕ и u строится исходя из минимизации гарантированного результата показателя качества

$$|z(1)| + \beta\int\limits_0^1 \phi(r)dr, \quad \beta \geq 0.$$

Этот показатель качества отражает тот факт, что минимизируются расстояние между точками в момент времени p и расход реактивной массы $m_1(0)$. Число β — весовой коэффициент. Управление v выступает в качестве помехи.

В рассматриваемом случае неравенства (3.3), (3.4) и условия оптимальности (3.16)–(3.19) принимают следующий вид:

$$\int\limits_0^1 (1 - \phi_0(r)(1-r))dr + |z(0)| - \varepsilon_0 \leq 0, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_\tau^1 (1 - \phi_0(r)(1-r))dr - \varepsilon_0 \leq 0 \text{ при всех } 0 \leq \tau \leq 1, \tag{4.2}$$

$$\lambda\Big(\int\limits_0^1(1-\phi_0(r)(1-r))dr+|z(0)|-\varepsilon_0\Big)=0, \tag{4.3}$$

$$\int\limits_0^1\theta(r)(1-\phi_0(r)(1-r))dr=\theta(1)\varepsilon_0, \tag{4.4}$$

$$(1-\lambda-\theta(1))\varepsilon_0\le(1-\lambda-\theta(1))\varepsilon\ \text{ при любых }\ \varepsilon\ge 0, \tag{4.5}$$

$$\Big(\beta-(\lambda+\theta(r))(1-r)\Big)\phi_0(r)=\min_{0\le\phi\le\alpha}\Big(\Big(\beta-(\lambda+\theta(r))(1-r)\Big)\phi\Big). \tag{4.6}$$

Из неравенства (4.5) следует, что $\lambda=1-\theta(1)$. Поскольку $\lambda\ge 0$ и $\theta(1)\ge 0$, то $0\le\theta(1)\le 1$. Подставляя это значение λ в формулу (4.6), получим, что

$$\phi_0(r)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \dfrac{\beta}{1-r}<\theta(r)-\theta(1)+1,\\ \text{любое из } [0,\alpha], & \text{если } \dfrac{\beta}{1-r}=\theta(r)-\theta(1)+1,\\ 0, & \text{если } \dfrac{\beta}{1-r}>\theta(r)-\theta(1)+1.\end{cases} \tag{4.7}$$

Рассмотрим случай, когда $\beta\ge 1$. Возьмем $\theta(r)=0$ при всех $0\le r\le 1$. Тогда из (4.7) имеем, что $\phi_0(r)=0$ при всех $0\le r\le 1$. Из формулы (4.3) при $\lambda=1$ получим, что $\varepsilon_0=1/2+|z(0)|$. Условия (4.1), (4.2) и (4.4) выполнены. Этот случай означает, что минимизация расхода топлива более предпочтительна минимизации расстояния $|z(1)|$.

Рассмотрим еще случай, когда $0<\beta<1$, $0<\alpha<1$. Возьмем $\theta(r)=0$ при всех $0\le r\le 1$. Тогда из формулы (4.7) получим, что

$$\phi_0(r)=\alpha\ \text{ при }\ 0\le r<1-\beta \text{ и } \phi_0(r)=0\ \text{ при }\ 1-\beta<r\le 1.$$

Для этой функции подынтегральное выражение в (4.3) больше нуля при любом $0\le r\le 1$. Поэтому из (4.3) при $\lambda=1$ найдем число $\varepsilon_0>0$. При этом числе ε_0 для $\tau=0$ неравенство (4.2) выполнено. Из положительности подынтегрального выражения следует, что оно выполнено при всех $0\le\tau\le 1$.

Таким образом, найденная оптимальная тяга $\phi_0(r)$ не зависит от начального состояния $|z(0)|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
4. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
5. **Ухоботов В.И.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204.
6. **Ухоботов В.И., Гущин Д.В.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 251–258.
7. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
8. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
9. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1. 687 с.
10. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

11. **Hermes H.** The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$ // Advances Math. 1970. Vol. 4, no. 9. P. 149–169. doi: 10.1016/0001-8708(70)90020-4.
12. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. 1959. Вып. 2. С. 25–32. (Математика, механика.)
13. **Рисс Ф., Секельфальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: ukh@csu.ru

Поступила 27.10.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Isaacs R. *Differential games.* New York: John Wiley and Sons, 1965, 408 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow, Mir Publ., 1974, 456 p.
3. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815.
4. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* [Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide]. Chelyabinsk: Chelyabinskiy Gos. Univer. Publ., 2005, 124 p.
5. Ukhobotov V.I. One type differential games with convex goal. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian).
6. Ukhobotov V.I., Gushchin D.V. Single–type differential games with convex integral. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S178–S185. doi: 10.1134/S0081543811090136.
7. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Mineola, New York: Dover Publ, 1999, vol. 1, 2, 288 p. Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza, Vypusk* 1, 2, Moscow: MGU Publ., 1954, 154 p.; 1960, 118 p.
9. Kudrjavcev, L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1981, vol. 1, 687 p.
10. Pshenichny B.N. *Convex analysis and extremal problems.* Moscow : Nauka Publ., 1980, 320 p.
11. Hermes H. The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$. *Advances Math.*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 149–169. doi: 10.1016/0001-8708(70)90020-4.
12. Filippov A.F. On certain questions in the theory of optimal control. *SIAM J. Control Ser. A*, 1962, vol. 1, no. 1, pp. 76–84. doi: 10.1137/0301006.
13. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Budapest: Akademiai Kiado, 1972. Translated under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu*, Moscow: Mir Publ., 1979, 287 p.

V. I. Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .