ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ТРАНСФИНИТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МЕТОДЕ ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ[1]

Д. А. Серков

Рассматривается задача удержания движений абстрактной динамической системы в заданном множестве ограничений. Конструкции метода программных итераций распространяются на задачи с динамикой не обладающей, вообще говоря, какими-либо топологическими свойствами. Указанная общность требований к системе преодолевается введением трансфинитных итераций оператора программного поглощения. В обосновании используется техника неподвижных точек отображений в индуктивных частично упорядоченных множествах. Итогом применения процедуры является построение множества успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий, "промежуток" управления не предполагается конечным.

Ключевые слова: метод программных итераций, трансфинитные итерации, квазистратегии, неподвижные точки, индуктивные множества.

D. A. Serkov. Transfinite sequences in the method of programmed iterations.

We consider the problem of retaining the motions of an abstract dynamic system in a given constraint set. Constructions from the method of programmed iterations are extended to problems whose dynamics, in general, does not possess any topological properties. The weaker requirements are compensated by introducing transfinite iterations of the programmed absorption operator. The technique of fixed points of mappings in inductive partially ordered sets is used in the proofs. The proposed procedure produces the set where the problem under consideration is successfully solved in the class of quasistrategies. The control interval is not assumed to be finite.

Keywords: method of programmed iterations, transfinite iterations, quasistrategies, fixed points, inductive posets.

MSC: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-228-240

Введение

В дифференциальных играх метод программных итераций (МПИ) применяется в трех вариантах: это построение множества позиционного поглощения, цены игры или многозначных квазистратегий управления. В даной статье обсуждается абстрактный аналог первого варианта, связанного с решением дифференциальной игры сближения-уклонения [1; 2].

Важным частным случаем такой игры является игра удержания в множестве позиций, сечения которого реализуют фазовые ограничения (см. исследования по МПИ: [3–6]). В настоящей работе мы ориентируемся на процедуру [4] построения множества позиционного поглощения в дифференциальной игре удержания. В связи с последней отметим работы [7–9], где, в частности, рассматривалась игра удержания на бесконечном промежутке времени (см. [8; 9]).

Существуют классы задач, и в том числе задач удержания, не удовлетворяющие обычным топологическим требованиям на динамику системы и фазовые ограничения и тем не менее обладающие требуемыми решениями (см. разд. 3). Это обстоятельство стало поводом для развития соответствующих теоретических конструкций. В настоящей работе подход [9–11]

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления".

распространяется на задачи с динамикой не удовлетворяющей, вообще говоря, какими-либо "хорошими" топологическими свойствами. Указанная общность требований к системе компенсируется использованием в МПИ трансфинитных итераций оператора программного поглощения. Итогом применения процедуры на основе МПИ является построение множества успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий и общий вид разрешающих квазистратегий. При этом "промежуток" управления не предполагается конечным.

1. Обозначения и определения

Обозначения и определения общего характера. Используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество). Принимаем аксиому выбора. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества.

Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) подмножеств (п/м) произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T. Если A и B — непустые множества, то B^A есть множество всех отображений из множества A в множество B. Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f\,|\,C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f\,|\,C)(x) \triangleq f(x)\ \forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $(F\,|\,C) \triangleq \{(f\,|\,C)\colon f \in F\}$. Если z — упорядоченная пара (УП), т.е. $z = (a, b)$ для некоторых объектов a и b, то через $\mathbf{pr}_1(z)$ и $\mathbf{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathbf{pr}_1(z), \mathbf{pr}_2(z))$.

Пусть $X \neq \varnothing$ и $\preccurlyeq \in \mathcal{P}(X \times X)$ отношение (нестрогого) частичного порядка на X. Назовем пару $(X, \preccurlyeq)$ *частично упорядоченным множеством* (ЧУМ). Всякое линейно упорядоченное подмножество ЧУМ назовем *цепью.* Для $Y \in \mathcal{P}(X)$ обозначим через $\top_Y$ ($\perp_Y$) *наибольший* (*наименьший*) элемент множества Y в случае, когда он существует: $\top_Y \in Y$ ($\perp_Y \in Y$) и для любого $y \in Y$ выполняется неравенство $y \preccurlyeq \top_Y$ ($\perp_Y \preccurlyeq y$).

Назовем ЧУМ $(X, \preccurlyeq)$ *индуктивным*, если всякая его цепь C (в том числе и пустая) имеет нижнюю грань $\inf C \in X$. Отметим, что в индуктивном ЧУМ всегда существует наибольший элемент — нижняя грань пустой цепи.

Для отображения $f \in X^X$ обозначим через $\mathbf{Fix}(f)$ множество всех его неподвижных точек: $\mathbf{Fix}(f) \triangleq \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — ЧУМ и $f \in X^X$. Назовем отображение f *сужающим на* $(X, \preccurlyeq)$, если

$$f(x) \preccurlyeq x \quad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

З а м е ч а н и е. В теории неподвижных точек и в методе программных итераций обычно опираются на еще одно свойство отображений — изотонность. И хотя этим свойством обладают многие важные отображения, в частности оператор программного поглощения, в рассмотренных далее вопросах удается обойтись без его использования.

Будем обозначать через $\mathbf{ORD}$ класс порядковых чисел (ординалов). Запись $\alpha \in \mathbf{ORD}$ будем рассматривать как сокращение высказывания "α есть порядковое число" ("α есть ординал"). Отношение порядка (строгого порядка) на классе $\mathbf{ORD}$ будем обозначать символом $\preccurlyeq$ ($\prec$). Для всякого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ обозначим через $\mathbf{W}(\alpha) \triangleq \{\iota \in \mathbf{ORD} \mid \iota \prec \alpha\}$ ($\mathbf{W}_{+}(\alpha) \triangleq \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\}$) множество всех ординалов, меньших (не больших) α. Отметим сразу равенство $\top_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)} = \alpha$ справедливое для любого $\alpha \in \mathbf{ORD}$. Обозначим как $\alpha{+}1 \in \mathbf{ORD}$ *последователя* ординала α — наименьший из ординалов, превосходящих α. Назовем $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *регулярным*, если в $\mathbf{W}(\alpha)$ существует наибольший ординал; этот ординал, когда он существует, назовем *предшественником* ординала α; в остальных случаях ординал α отличный от 0 будем называть *предельным.* Заметим, что согласно определению для всякого $\eta \in \mathbf{ORD}$ предшественник последователя η всегда существует и совпадает с η; при этом последователь предшественника η существует (и тогда совпадает с η) лишь в случае, когда η — регулярный ординал.

Пусть $X \neq \varnothing$ и $\alpha \in \mathbf{ORD}$. Назовем *α-последовательностью в X* (*α_{+}-последовательностью в X*) и обозначим $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($(x_\iota)_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$) всякое отображение $\mathbf{W}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$

($\mathbf{W}_{+}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$) из множества $X^{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($X^{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$). В случаях, когда это не создает двусмысленность, будем также называть *α-последовательностью* множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ членов этой последовательности. В частности, будем говорить, что α-последовательность $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ есть (образует) цепь, в случаях, когда множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ является цепью (линейно упорядочено).

Для всякого множества X обозначим через $|X|$ класс эквивалентности множеств, равномощных множеству X (кардинал X). Отношение порядка (строгого порядка) на классе кардиналов будем обозначать символом $<=$ ($<$). Далее для всякого множества H обозначим $|H|^{+} \in \mathbf{ORD}$ наименьший среди ординалов η, обладающих тем свойством, что $|H| < |\eta|$. Итак, для всякого множества H выполняется неравенство

$$|H| < |H|^{+}. \tag{1.2}$$

2. Итерации сужающих отображений в индуктивном ЧУМ

Определение трансфинитных итераций в индуктивном ЧУМ. Пусть $X \neq \varnothing$ и $(X, \preccurlyeq)$ — индуктивное ЧУМ, а $f \in X^X$ — сужающее (см. (1.1)) отображение. Тогда для каждого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ можно определить степень $f^\alpha \in X^X$ (α-итерацию) отображения f следующим образом. При α, равном 0 и 1, положим

$$f^0(x) \triangleq x, \quad f^1(x) \triangleq f(f^0(x)) = f(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Имеем $f^0, f^1 \in X^X$, и для всякого $x \in X$ в силу (1.1) $f^1(x) \preccurlyeq f^0(x)$, т. е. элементы 1_{+}-последовательности $(f^\iota(x))_{\mathbf{W}_{+}(1)}$ образуют цепь $\{f^0(x), f^1(x)\}$ в $(X, \preccurlyeq)$. Кроме того, в цепи $(f^\iota(x))_{\mathbf{W}_{+}(1)}$ существует наименьший элемент $f^1(x)$ — образ наибольшего элемента $\top_{\mathbf{W}_{+}(1)} = 1$ множества $\mathbf{W}_{+}(1)$.

Пусть вообще $\alpha \in \mathbf{ORD}$ таково, что для каждого $\beta \in \mathbf{W}(\alpha)$:

(i) определена β-итерация $f^\beta \in X^X$ отображения f;

(ii) $(f^\eta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\beta)}$ есть цепь в $(X, \preccurlyeq)$ при любом $x \in X$;

(iii) $\perp_{(f^\eta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\beta)}} = f^\beta(x)$.

В случае, когда α имеет предшественника (пусть это γ), положим

$$f^\alpha \triangleq f \circ f^\gamma. \tag{2.2}$$

Так как $f \in X^X$ и по предположению (i) $f^\gamma \in X^X$, то $f^\alpha \in X^X$. Для всякого $\xi \in \mathbf{W}(\alpha)$ имеем $\xi \in \mathbf{W}_{+}(\gamma)$ и, следовательно, в силу (1.1) и предположения (iii), поскольку $\gamma \in \mathbf{W}(\alpha)$, выполняется

$$f^\alpha(x) = f(f^\gamma(x)) \preccurlyeq f^\gamma(x) \preccurlyeq f^\xi(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.3}$$

Таким образом, $f^\alpha(x)$ — миноранта (нижняя граница) α-последовательности $(f^\eta(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$. Понятно, что в этом случае выполняется равенство $f^\alpha(x) = \perp_{(f^\eta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}}$. Остается проверить, что α_{+}-последовательность $(f^\zeta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$ образует цепь. Пусть $\xi, \xi' \in \mathbf{W}_{+}(\alpha)$. Если $\alpha \in \{\xi, \xi'\}$, то элементы $f^\xi(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы в силу (2.3). В противном случае

$$\{\xi, \xi'\} \subset \mathbf{W}_{+}(\alpha) \setminus \{\alpha\} = \mathbf{W}(\alpha) = \mathbf{W}_{+}(\gamma)$$

и элементы $f^\xi(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы в силу предположения (ii).

В случае, когда α — предельное порядковое число, положим

$$f^\alpha(x) \triangleq \inf\{f^\beta(x) : \beta \in \mathbf{W}(\alpha)\} \quad \forall x \in X. \tag{2.4}$$

Проверим корректность определения (2.4). При $\beta \in \mathbf{W}(\alpha)$ по предположению (i) выполнено $f^\beta(x) \in X$ и, стало быть, $\{f^\beta(x) : \beta \in \mathbf{W}(\alpha)\} = (f^\beta(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ есть α-последовательность в X.

Покажем, что α-последовательность $(f^{\beta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь в $(X,\preccurlyeq)$. Пусть $\xi,\xi' \in \mathbf{W}(\alpha)$ и пусть (так как ординалы линейно упорядочены), для определенности, $\xi \preccurlyeq \xi'$. Следовательно, $\xi,\xi' \in \mathbf{W}_{+}(\xi')$. Тогда $f^{\xi}(x)$ и $f^{\xi'}(x)$ сравнимы, так как в силу предположения (ii) ξ'_{+}-последовательность $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}_{+}(\xi')}$ образует цепь. Так как ординалы ξ,ξ' были выбраны произвольно, установлено, что α-последовательность $(f^{\beta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь в $(X,\preccurlyeq)$. И, в силу индуктивности $(X,\preccurlyeq)$, определение (2.4) корректно.

Из определения (2.4) и предположения (i) следуют включение $f^{\alpha} \in X^{X}$ и равенство

$$\perp_{(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}} = f^{\alpha}(x). \tag{2.5}$$

Проверим, что α_{+}-последовательность $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$ — цепь. Пусть $\xi,\xi' \in \mathbf{W}_{+}(\alpha)$. Если $\alpha \in \{\xi,\xi'\}$, то элементы $f^{\xi}(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы в силу (2.5). В противном случае

$$\{\xi,\xi'\} \subset \mathbf{W}_{+}(\alpha) \setminus \{\alpha\} = \mathbf{W}(\alpha)$$

и элементы $f^{\xi}(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы, так как уже установлено, что $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь.

Итак, в силу принципа трансфинитной индукции (см. [12, гл. VII, § 4]), α-итерация $f^{\alpha} \in X^{X}$ отображения f (сужающего на индуктивном ЧУМ $(X,\preccurlyeq)$) однозначно определена для любого $\alpha \in \mathbf{ORD}$; при этом из построения следует, что для любого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ α-последовательность $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь в $(X,\preccurlyeq)$ и, значит, для любого множества ординалов M в силу индуктивности $(X,\preccurlyeq)$ существует $\inf\{f^{\eta}(x) \mid \eta \in \mathbf{W}(\alpha) \cap M\}$.

З а м е ч а н и е. Как видно из построения в индуктивном ЧУМ, в отличие от случая полной решетки (рассматриваемого далее) корректность определения трансфинитных итераций требует обоснования.

Конкретизируем построение α-итерации для случая $(X,\preccurlyeq) \triangleq (\mathcal{P}(H),\subset)$, где H — непустое множество. Построение не представляет трудности, так как ЧУМ $(\mathcal{P}(H),\subset)$ образует полную решетку. Пусть $f \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ и $\alpha \in \mathbf{ORD}$. При $\alpha = 0$ положим

$$f^{0}(B) \triangleq B \quad \forall B \in \mathcal{P}(H). \tag{2.6}$$

Таким образом, $f^{0} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Пусть β-итерация $f^{\beta} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ определена при всех $\beta \in \mathbf{W}(\alpha)$. Если α имеет предшественника (пусть это порядковое число γ), то положим

$$f^{\alpha} \triangleq f \circ f^{\gamma}. \tag{2.7}$$

Поскольку $f \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ и по предположению индукции выполнено включение $f^{\gamma} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$, в этом случае α-итерация f^{α} определена корректно и $f^{\alpha} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Если α — предельное порядковое число, то положим

$$f^{\alpha}(B) \triangleq \bigcap_{\beta \prec \alpha} f^{\beta}(B) \quad \forall B \in \mathcal{P}(H). \tag{2.8}$$

Поскольку при $\beta \in \mathbf{W}(\alpha)$ по предположению индукции для всех $B \in \mathcal{P}(H)$ выполнено включение $f^{\beta}(B) \in \mathcal{P}(H)$, в этом случае степень f^{α} также определена корректно и $f^{\alpha} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$.

Итак, в силу принципа трансфинитной индукции α-итерация $f^{\alpha} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ отображения f определена однозначно для любого $\alpha \in \mathbf{ORD}$.

Неподвижные точки автоморфизмов в индуктивном ЧУМ. В этом пункте приведены два утверждения о множестве неподвижных точек сужающего отображения: вначале рассмотрен общий случай индуктивного ЧУМ, а затем дана модернизация утверждения для случая полной решетки, порожденной булеаном непустого множества.

Следующая лемма показывает, что свойство (1.1) наследуется при переходе к α-итерациям.

Лемма. *Пусть $(X,\preccurlyeq)$ — непустое индуктивное ЧУМ, $f \in X^{X}$ и*

$$f \text{ — сужающее отображение на } (X,\preccurlyeq). \tag{2.9}$$

Тогда для любых $x \in X$ *и* $\alpha \in \mathbf{ORD}$

$$f^{\alpha}(x) \preccurlyeq f^{\beta}(x) \quad \forall \beta \in \mathbf{W}(\alpha). \tag{2.10}$$

В частности, при $\beta = 0$ *получим импликацию* (f — *сужающее на* $(X, \preccurlyeq)$) $\Rightarrow$ (f^{α}— сужающее на $(X, \preccurlyeq)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения проводится по индукции, следуя определению итераций отображения (см. (2.1), (2.2), (2.4)). $\square$.

Предложение 1. *Пусть* $(X, \preccurlyeq)$ — *непустое индуктивное ЧУМ,* $f \in X^X$ — *сужающее отображение на* $(X, \preccurlyeq)$ *и* $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *выбрано из условия* $|X|^{+} \preccurlyeq \alpha$.

Тогда $\mathbf{Fix}(f) = \{f^{\alpha}(x) : x \in X\}$.

З а м е ч а н и е. Утверждение говорит о том, что неподвижные точки сужающего отображения $f \in X^X$ имеют вид $f^{\alpha}(x)$ при любых α (начиная с $|X|^{+}$) и $x \in X$; утверждение близко к результатам [13; 14, Theorem 3.2(4); 15, Lemma 1] лежащим в направлении, заданном работами Канторовича, Клини и Куратовского о представлении неподвижных точек пределами итерационных последовательностей.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1 несущественно отличается от доказательства следующего ниже предложения 2. Предложение 2 уточняет предыдущий результат для случая $(X, \preccurlyeq) = (\mathcal{P}(H), \subset)$, который интересен с точки зрения приложений. В предложении 2 улучшена "скорость сходимости" итераций к неподвижным точкам: она определяется мощностью множества H, а не множества $X \triangleq \mathcal{P}(H)$.

Предложение 2. *Пусть* $H \neq \varnothing$, $f \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ — *сужающее отображение на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$ *и* $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *выбрано из условия* $|H|^{+} \preccurlyeq \alpha$. *Тогда*

$$\mathbf{Fix}(f) = \{f^{\alpha}(M) : M \in \mathcal{P}(H)\}. \tag{2.11}$$

Заметим, что при указанных условиях существование неподвижной точки очевидно, более того, $\perp_{\mathbf{Fix}(f)} = \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\beta \in \mathbf{ORD}$ такое, что $|H|^{+} \preccurlyeq \beta$. Проверим вложение

$$\mathbf{Fix}(f) \subset \{f^{\beta}(M) \colon M \in \mathcal{P}(H)\}. \tag{2.12}$$

Пусть $N \in \mathbf{Fix}(f)$. Тогда $N \in \mathcal{P}(H)$ и $f(N) = N$. В силу определения β-итерации (см. (2.6)–(2.8)) по индукции имеем $f^{\beta}(N) = N$. Следовательно, $N \in \{f^{\beta}(M) \colon M \in \mathcal{P}(H)\}$. Так как множество N было выбрано произвольно, вложение (2.12) доказано.

Для доказательства обратного вложения фиксируем $L \in \mathcal{P}(H)$ и покажем, что $f^{\beta}(L) \in \mathbf{Fix}(f)$, т. е.

$$f(f^{\beta}(L)) = f^{\beta}(L). \tag{2.13}$$

Предположим противное:

$$f(f^{\beta}(L)) \neq f^{\beta}(L). \tag{2.14}$$

Тогда выполняются неравенства

$$f(f^{\iota}(L)) \neq f^{\iota}(L) \quad \forall \iota \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.15}$$

В самом деле, в ином случае мы бы имели для некоторого $\nu \in \mathbf{W}(\beta)$

$$f(f^{\nu}(L)) = f^{\nu}(L), \tag{2.16}$$

а тогда будут выполнятся равенства

$$f^{\xi}(L) = f^{\nu}(L) \quad \forall \xi \in \mathbf{ORD}, \quad \nu \preccurlyeq \xi. \tag{2.17}$$

Если допустить противное, то найдется $\zeta \in \mathbf{ORD}$ такое, что

$$(\nu \prec \zeta)\&(f^{\nu}(L) \neq f^{\zeta}(L)). \tag{2.18}$$

Обозначим через $\bar{\zeta}$ минимальный ординал, обладающий этими свойствами. По выбору $\bar{\zeta}$ имеем следующие соотношения:

$$\nu \prec \bar{\zeta}, \tag{2.19}$$

$$f^{\bar{\zeta}}(L) \neq f^{\nu}(L), \tag{2.20}$$

$$f^{\xi}(L) = f^{\nu}(L) \quad \forall \xi (\xi \in \mathbf{W}(\bar{\zeta}))\&(\nu \preccurlyeq \xi). \tag{2.21}$$

Покажем, что требования (2.19)–(2.21) противоречивы. Действительно, если $\bar{\zeta}$ имеет предшественника (пусть, например, $\bar{\zeta} = \bar{\xi} + 1$), то с учетом (2.19) $\nu \preccurlyeq \bar{\xi}$, и тогда в силу (2.21) и (2.7) получим

$$f^{\bar{\zeta}}(L) \triangleq f(f^{\bar{\xi}}(L)) = f(f^{\nu}(L)) = f^{\nu}(L),$$

что противоречит (2.20).

В случае, когда $\bar{\zeta}$ — предельный ординал, согласно (2.8) и (2.21) имеем

$$\begin{aligned} f^{\bar{\zeta}}(L) \triangleq \bigcap_{\xi \prec \bar{\zeta}} f^{\xi}(L) = \Big(\bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{\nu \preccurlyeq \xi \prec \bar{\zeta}} f^{\xi}(L)\Big) \\ = \Big(\bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{\nu \preccurlyeq \xi \prec \bar{\zeta}} f^{\nu}(L)\Big) = \Big(\bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)\Big) \bigcap f^{\nu}(L). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Из (2.10) следует $f^{\nu}(L) \subset \bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)$. Отсюда с учетом (2.22) получим $f^{\bar{\zeta}}(L) = f^{\nu}(L)$, что вновь противоречит (2.20). Таким образом, предположение (2.18) не верно и выполняются равенства (2.17). В силу выбора ν имеем $\nu \prec \beta$ и, тем более, $\nu \prec \beta + 1$. Тогда, используя дважды соотношения (2.17), получим

$$f^{\beta}(L) = f^{\nu}(L) = f^{\beta+1}(L) = f(f^{\beta}(L)).$$

Эти равенства противоречат (2.14). Стало быть, предположение (2.16) не верно. Итак, при допущении (2.14) выполняются неравенства (2.15).

Построим β-последовательность $(L_\iota)_{\mathbf{W}(\beta)}$ в $\mathcal{P}(H)$, полагая

$$L_\iota \triangleq f^{\iota}(L) \setminus f(f^{\iota}(L)), \quad \iota \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.23}$$

Из (2.9), (2.15) и (2.23) следует, что

$$L_\eta \neq \varnothing \quad \forall \eta \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.24}$$

Далее, для любых $\xi, \zeta \in \mathbf{ORD}$, таких, что $\xi \prec \zeta \preccurlyeq \beta$, имеем $\xi + 1 \preccurlyeq \zeta$. Тогда с учетом (2.9), (2.10) и (2.23) получаем, что $f^{\zeta}(L) \subset f(f^{\xi}(L))$, $L_\xi \cap f(f^{\xi}(L)) = \varnothing$. Из этих вложений имеем $L_\xi \cap f^{\zeta}(L) = \varnothing$. Как следствие, с учетом $L_\zeta \subset f^{\zeta}(L)$ получаем равенства

$$L_\zeta \cap L_\xi = \varnothing \quad \forall \zeta, \xi \in \mathbf{W}(\beta), \quad \zeta \neq \xi. \tag{2.25}$$

Ввиду (2.24) воспользуемся аксиомой выбора и образуем β-последовательность $(l_\iota)_{\mathbf{W}(\beta)}$ в H, полагая

$$l_\iota \in L_\iota, \quad \iota \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.26}$$

В силу (2.25), (2.26) имеем соотношения

$$l_\iota \in H, \quad l_\iota \neq l_\eta, \quad \iota, \eta \in \mathbf{W}(\beta), \quad \iota \neq \eta. \tag{2.27}$$

Из (2.27) следует, что β-последовательность $(l_\iota)_{\mathbf{W}(\beta)}$ есть инъективное отображение из $H^{\mathbf{W}(\beta)}$. Тогда $|\beta| <= |H|$. Отсюда получаем в силу выбора β (см. (1.2)) цепочку противоречивых соотношений:

$$|H| < |H|^+ <= |\beta| <= |H|.$$

Значит, предположение (2.14) было ложным и выполняются равенства (2.13). Итак, доказано вложение обратное (2.12). Следовательно, в (2.12) имеет место равенство и, в силу произвольного выбора β, имеем равенство (2.11). $\square$

3. Постановка абстрактной задачи удержания

Динамическая система. Фиксируем непустое п/м I вещественной прямой $\mathbb{R}$ в качестве аналога временного интервала и непустое множество X, соответствующее фазовому пространству. Полагаем $D \triangleq I \times X$, получая пространство позиций. Если $t \in I$, то введем $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leqslant t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geqslant t\}$. Если $t \in I$ и $\theta \in \mathbf{I}_t$, то полагаем, что $\mathbb{I}_t^{(\theta)} \triangleq I_\theta \cap \mathbf{I}_t$. Отображения из I в X рассматриваем в качестве аналога траекторий. Точнее, мы выделяем множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$, элементы которого будут рассматриваться как траектории "системы". Далее фиксируем непустые множества Y и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$. Элементы $\omega \in \Omega$ полагаем реализациями неопределенных факторов. Наконец, фиксируем (в качестве аналога "системы") отображение

$$\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}). \tag{3.1}$$

Если $z \in D$ (т. е. $z = (t, x)$, где $t \in I$ и $x \in X$) и $\omega \in \Omega$, то (по смыслу) $\mathcal{S}(z, \omega) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C})$ есть множество всех траекторий "системы" (3.1), отвечающих начальной позиции z и согласованных с действием ω, где ω — конкретная реализация неопределенных факторов.

Процедуры управления: квазистратегии. Введем в рассмотрение множество $\mathbf{M} \triangleq \mathcal{P}(\mathbf{C})^\Omega$ всех мультифункций (м/ф) на Ω со значениями в $\mathbf{C}$: $\alpha(\omega) \subset \mathbf{C}$ при $\omega \in \Omega$, $\alpha \in \mathbf{M}$.

Назовем м/ф $\alpha \in \mathbf{M}$ t-неупреждающей, если $\forall \omega \in \Omega\ \forall \omega' \in \Omega$ и $t \in I$ для всех $\xi \in \mathbf{I}_t$:

$$((\omega \,|\, I_\xi) = (\omega' \,|\, I_\xi)) \Rightarrow \Big(\big(\alpha(\omega) \,|\, I_\xi\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, I_\xi\big)\Big). \tag{3.2}$$

Мы полагаем, что управляющая сторона может использовать для целей формирования траекторий непустозначные м/ф из $\mathbf{M}$ со свойством (3.2). В связи с этим полагаем при $(t, x) \in D$, что

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \Big\{\alpha \in \mathbf{M} \mid \forall \omega \in \Omega\ \big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big) \in \mathcal{P}'\Big(\big(\mathcal{S}((t,x),\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big)\Big), \\ \forall \omega, \omega' \in \Omega\ \forall \xi \in \mathbf{I}_t\ ((\omega \,|\, I_\xi) = (\omega' \,|\, I_\xi)) \Rightarrow \Big(\big(\alpha(\omega) \,|\, I_\xi\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, I_\xi\big)\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Следовательно, при $z \in D$ определено множество мультифункций $\mathbb{M}_z$. Элементы (3.3) рассматриваем в качестве допустимых процедур управления — (многозначных) квазистратегий, отвечающих позиции (t, x).

Задача удержания. Имея целью управления удержание движений в некотором заданном наперед множестве N, мы будем считать ее достижимой для заданной позиции $(t, x) \in D$, если существует квазистратегия $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t,x)}$, для которой $(\tau, s(\tau)) \in N$ для всех $\tau \in \mathbf{I}_t$, $s \in \alpha_0(\omega)$ и $\omega \in \Omega$.

Оператор программного поглощения. При $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$ и $\omega \in \Omega$ обозначим

$$\Pi(\omega \mid z, H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}(z, \omega) \mid (\xi, s(\xi)) \in H\ \forall \xi \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\}. \tag{3.4}$$

В терминах (3.4) введем оператор программного поглощения (ОПП) $\mathbf{A} : \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D)$, а именно, полагаем, что $\mathbf{A}(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega \mid z, H) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega\}$ для любого $H \in \mathcal{P}(D)$. Из определения $\mathbf{A}$ сразу следует, что это сужающее отображение:

$$\mathbf{A}(H) \subset H. \tag{3.5}$$

Пример. Пусть динамика системы описывается следующим образом: положим $I \triangleq \mathbb{R}$, $X \triangleq \mathbb{R}$, $D \triangleq I \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Множество $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^I)$ допустимых реализаций помехи определим как $L_1(I, [-1,1])$ — множество интегрируемых с модулем функций из $[-1,1]^{\mathbb{R}}$.

Для начального состояния $(t, x) \in D$ и реализации помехи $\omega \in \Omega$ динамику $\mathcal{S}((t,x),\omega)$ зададим множеством функций из $\mathbf{C} \triangleq C(\mathbb{R})$ вида

$$\mathcal{S}((t,x),\omega) \triangleq \{h \in \mathbf{C} \mid h(\tau) = x + \int\limits_t^\tau (\omega(s) + u(s))ds, \quad \tau \in I, \quad u \in L_1(I, [-1,1])\}.$$

Множество фазовых ограничений $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ положим равным

$$\mathcal{N} \triangleq \{(t,x) \in D \mid |x| < t^2,\ t \in I \setminus \{0\}\}.$$

Тогда

$$\mathbf{A}(\mathcal{N}) = \{(t,x) \in D \mid ((x = 0)\&(t \leqslant 0)) \vee ((|x| < t^2)\&(t > 0))\}$$

и $\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathcal{N})) = \mathbf{A}(\mathcal{N})$. То есть $\mathbf{A}(\mathcal{N})$ является (наибольшей) неподвижной точкой оператора $\mathbf{A}$. Из этого следует, что будут справедливы утверждения предложения 11 и теоремы 2 из работы [11], основу которых составляет представление наибольшей неподвижной точки ОПП. Вместе с тем существенная часть топологических условий из этих утверждений (замкнутость множества $\mathcal{N}$, компактность пучков движений — [11, условие 3]) в примере не выполняются.

Пример указывает на то, что область применения МПИ в задаче удержания, вероятно, не связана топологическими свойствами фазовых ограничений и динамики системы.

4. Трансфинитные программные итерации в задаче удержания

В этом разделе мы применим технику трансфинитных итераций в задаче удержания. Целью данного рассмотрения является демонстрация общности МПИ и его независимости в исследуемой абстрактной задаче удержания от топологических свойств динамической системы и фазовых ограничений. Постановка задачи следует работе [11].

Итерации ОПП. Для произвольного $\alpha \in \mathbf{ORD}$, следуя определениям (2.6)–(2.8), введем α-итерацию $\mathbf{A}^\alpha \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ оператора $\mathbf{A}$: при $\alpha = 0$ положим

$$\mathbf{A}^0(H) \triangleq H \quad \forall H \in \mathcal{P}(D); \tag{4.1}$$

если α имеет предшественника (пусть это порядковое число γ), примем

$$\mathbf{A}^\alpha \triangleq \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^\gamma; \tag{4.2}$$

если α — предельное порядковое число, пусть

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \triangleq \bigcap_{\beta \prec \alpha} \mathbf{A}^\beta(H) \quad \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{4.3}$$

Предложение 3. *Если $\alpha \in \mathbf{ORD}$, то для любого $H \in \mathcal{P}(D)$*

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \subset \mathbf{A}^\beta(H) \quad \forall \beta \in \mathbf{W}(\alpha). \tag{4.4}$$

В частности (при $\beta = 0$), $\mathbf{A}^\alpha$ — сужающее отображение.

Доказательство следует из свойства (3.5) и леммы. □

Квазистратегии, разрешающие задачу удержания. В дальнейшем потребуется аналог полугруппового свойства траекторий динамической системы (3.1).

Предположение 1 (полугрупповое свойство). *$\forall z \in D$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall h \in \mathcal{S}(z,\omega)$, $\forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$,*

$$(h \,|\, \mathbf{I}_t) \in \big(\mathcal{S}((t,h(t)),\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big).$$

Рассмотрим вопрос о решении задачи удержания в классе многозначных квазистратегий, имея в виду конструкции [9]. Всюду в дальнейшем при $z = (t,x) \in D$ полагаем

$$\mathcal{S}(z,\cdot) \triangleq (\mathcal{S}(z,\omega))_{\omega\in\Omega} : \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}).$$

Далее будем придерживаться соглашения: если $t \in I$, $h \in \mathbf{C}$ и $h' \in \mathbf{C}$, то отображение $(h\Box h')_t : I \mapsto X$ (склейка h и h') определяется соотношениями

$$\big((h\Box h')_t(\xi) \triangleq h(\xi)\ \forall \xi \in I_t\big)\&\big((h\Box h')_t(\zeta) \triangleq h'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}\big).$$

Предположение 2 (допустимость склейки движений). *$\forall z \in D$, $\forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall \omega' \in \Omega$:*

$$\big((\omega \,|\, I_t) = (\omega' \,|\, I_t)\big) \Rightarrow \big((h\Box h')_t \in \mathcal{S}(z,\omega')\ \forall h \in \mathcal{S}(z,\omega)\ \forall h' \in \mathcal{S}((t,h(t)),\omega')\big).$$

Напомним, что согласно (3.4) для любых $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$ и $\omega \in \Omega$ имеют место вложения $\Pi(\omega \mid z, H) \subset \mathcal{S}(z,\omega)$. Кроме того, из (3.4) следует, что при $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$, $\omega \in \Omega$ и $s \in \Pi(\omega \mid z, H)$ выполняются включения $(t,s(t)) \in H$ $\forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$. Отметим также, что в следующем предложении отсутствует вводимое ниже требование 3 “склеиваемости” помех. Это расширяет возможность применения данной конструкции квазистратегии на практически важные случаи, например на случай непрерывных помех.

Предложение 4. *Пусть $\sigma \in \mathbf{ORD}$ таково, что $|D|^+ \preccurlyeq \sigma$ и выполнено предположение* 2. *Тогда*

$$\Pi(\cdot \mid z, \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_z \quad \forall z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 4 следует доказательству предложения 11 из [11] с заменой $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$ на $\mathbf{A}^\sigma$, так как в силу (3.5) из предложения 2 вытекает, что $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})) = \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$.$\Box$

Это утверждение модернизирует утверждение [11, предложение 11] в направлении отказа от топологических требований на множество $\mathcal{N}$ и на динамику управляемой системы: оставшееся в теореме предположение 2 носит абстрактно-динамический характер. Платой за общность требований является “скорость сходимости” итераций оператора $\mathbf{A}$ к соответствующей неподвижной точке: в упомянутом утверждении из [11] гарантирована сходимость к множеству $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ при счетном количестве итераций. Понятно, что в рассматриваемом случае даже при счетном множестве D требуется, вообще говоря, несчетное бесконечное множество итераций для достижения неподвижной точки $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$.

Из вложения $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ (см. (4.4)) с учетом (4.5) получаем, что при выполнении предположения 2 и неравенства $|D|^+ \preccurlyeq \sigma$ справедливо вложение

$$\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \subset \big\{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t,s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\big\}. \tag{4.6}$$

Из предложения 4 и определения (3.4) следует, что

$$(t,s(t)) \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \quad \forall z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}))\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}. \tag{4.7}$$

Таким образом, из (4.4) и (4.7) вытекает, что $(t,s(t)) \in \mathcal{N}$ для всех $z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$, $\omega \in \Omega$, $s \in \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}))$ и $t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$. Мы получили для $z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ явный вид квазистратегии, разрешающей задачу удержания в $\mathcal{N}$.

Далее будем придерживаться соглашения: если $t \in I$, $\omega \in \Omega$ и $\omega' \in \Omega$, то отображение $(\omega\Box\omega')^t : I \mapsto Y$ (склейка ω и ω') определяется соотношениями

$$\big((\omega\Box\omega')^t(\xi) \triangleq \omega(\xi)\ \forall \xi \in I_t\big)\&\big((\omega\Box\omega')^t(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}\big). \tag{4.8}$$

Предположение 3 (допустимость склейки помех). $(\omega\square\omega')^t \in \Omega \quad \forall t \in I\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall \omega' \in \Omega.$

Предложение 5. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 3. *Тогда для всех* $(t,x) \in D$, $t' \in \mathbf{I}_t$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$, $h \in \mathcal{S}((t,x),(\omega\square\omega')^{t'})$ *выполнено* $(h\,|\,\mathbf{I}_{t'}) \in \big(\mathcal{S}((t',h(t')),\omega')\,|\,\mathbf{I}_{t'}\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. предложения следует из определений.

Приведенная ниже теорема, по существу, говорит о том, что множество $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ есть наибольшее из подмножеств $\mathcal{N}$, содержащихся в правой части (4.6), т. е. из множеств начальных позиций, допускающих разрешение задачи удержания в $\mathcal{N}$ в классе квазистратегий. Это утверждение также следует в направлении, заданном утверждением [11, теорема 2]. При этом топологические свойства множества $\mathcal{N}$ и динамики управляемой системы не используются: оставшиеся в теореме предположения 1–3 носят функциональный характер.

Вместе с тем теорема явно указывает на то, что в случае конечного D точное решение задачи будет получено за конечное число шагов.

Доказательство теоремы в основных моментах повторяет доказательство утверждения [11, теорема 2] и отличается лишь спецификой применения трансфинитной индукции.

Теорема. *Пусть верны предположения* 1–3 *и* $\sigma \in \mathbf{ORD}$ *выбрано из условия* $|D|^+ \preccurlyeq \sigma$. *Тогда выполняется равенство*

$$\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) = \big\{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t,s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\big\}. \tag{4.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Λ множество в правой части (4.9). С учетом вложения (4.6) для доказательства теоремы достаточно установить вложение

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}). \tag{4.10}$$

Так как $\Lambda \subset \mathcal{N}$, имеем (см. (4.1))

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^0(\mathcal{N}). \tag{4.11}$$

Пусть вообще $\zeta \in \mathbf{ORD}$ таково, что для всех $\xi \in \mathbf{W}(\zeta)$

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N}). \tag{4.12}$$

Покажем, что тогда $\Lambda \subset \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N})$.

Если ζ — предельный ординал, то с учетом (4.3) и (4.12) получаем:

$$\Lambda \subset \bigcap_{\xi \prec \zeta} \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N}) = \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N}). \tag{4.13}$$

Пусть теперь ζ имеет предшественника $\eta \in \mathbf{W}(\zeta)$: $\zeta = \eta + 1$. Проверим, что и тогда выполнено вложение

$$\Lambda \subset \mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) \triangleq \mathbf{A}^{\eta+1}(\mathcal{N}) = \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N}). \tag{4.14}$$

Предположим противное: нашлась позиция z_* такая, что

$$z_* \in \Lambda \setminus \mathbf{A}^{\eta+1}(\mathcal{N}). \tag{4.15}$$

Тогда (см. (4.2)) из (4.12) и (4.15) следует, что $z_* \in \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}) \setminus \mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}))$. Напомним, что $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) = \{z \in \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}) \mid \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega\}$. Следовательно, найдется $\omega_* \in \Omega$ такая, что

$$\Pi(\omega_* \mid z_*, \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) = \varnothing. \tag{4.16}$$

Из (3.4) и (4.16) получим, что

$$\forall s \in \mathcal{S}(z_*,\omega_*)\ \exists t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}\colon (t,s(t)) \notin \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}). \tag{4.17}$$

Вместе с тем (см. (4.15)) $z_* \in \Lambda$ и, значит, найдется квазистратегия

$$\alpha_* \in \mathbb{M}_{z_*}, \tag{4.18}$$

для которой, по определению Λ,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)},\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall s \in \alpha_*(\omega). \tag{4.19}$$

В частности,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)},\ \forall s \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.20}$$

Выберем произвольно

$$s_* \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.21}$$

Тогда (см. (3.3)) $s_* \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*)$. Согласно (4.17) имеем для некоторого момента $t_* \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$

$$(t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}),$$

а потому выполнено

$$z^* \triangleq (t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}). \tag{4.22}$$

Из (4.12) и (4.22) вытекает, что $z^* \notin \Lambda$. При этом (см. (4.20)) $z^* \in \mathcal{N}$. Тогда по определению Λ имеем, что

$$\forall \alpha \in \mathbb{M}_{z^*}\ \exists \omega \in \Omega,\ \exists s \in \alpha(\omega),\ \exists t \in \mathbf{I}_{t_*} : (t, s(t)) \notin \mathcal{N}. \tag{4.23}$$

С учетом предположения 3 определим $\beta : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C})$ по правилу

$$\beta(\omega) \triangleq \{h \in \alpha_*((\omega_* \square \omega)^{t_*}) \mid (h \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*}))\} \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.24}$$

Покажем включение $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. Для этого сначала проверим, что

$$\beta(\omega) \neq \varnothing \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.25}$$

Из (3.3), (4.18) и (4.21) следует, что для произвольного $\omega' \in \Omega$ найдется $h' \in \alpha_*((\omega_* \square \omega')^{t_*})$ такое, что $(h' \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*})$. Это означает (см. (4.24)), что $h' \in \beta(\omega')$. Так как выбор ω' был произвольным, выполнено неравенство (4.25).

Для любых $\tilde{\omega} \in \Omega$ и $\tilde{h} \in \beta(\tilde{\omega})$ из определений α_*, β имеем (см. (3.3)), что $(\tilde{h} \,|\, \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (h \,|\, \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})$ для некоторого $h \in \mathcal{S}(z_*, (\omega_* \square \tilde{\omega})^{t_*})$. Тогда в силу предложения 5, с учетом $\mathcal{S}((t_*, h(t_*)), \tilde{\omega}) = \mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \tilde{\omega})$, получим, что $(h \,|\, \mathbf{I}_{t_*}) \in \big(\mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \tilde{\omega}) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big)$. Таким образом, $(h \,|\, \mathbf{I}_{t_*}) \in \big(\mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big)$ $\forall \omega \in \Omega$ $\forall h \in \beta(\omega)$. Отсюда (см. (4.25)) следует

$$\big(\beta(\omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big) \in \mathcal{P}'\Big(\big(\mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big)\Big) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.26}$$

Зафиксируем произвольное $\theta \in \mathbf{I}_{t_*}$ и $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ такие, что $(\omega \,|\, I_\theta) = (\omega' \,|\, I_\theta)$. Обозначим $\Gamma \triangleq \big(\beta(\omega) \,|\, I_\theta\big)$, $\Gamma' \triangleq \big(\beta(\omega') \,|\, I_\theta\big)$ и выберем $\gamma \in \Gamma$. Пусть $f \in \beta(\omega)$ таково, что $\gamma = (f \,|\, I_\theta)$. Тогда в силу (4.24) $f \in \alpha((\omega_* \square \omega)^{t_*})$ и

$$(f \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*}). \tag{4.27}$$

С учетом (4.8) и предположения 3 получаем, что определены склеенные отображения $(\omega_* \square \omega)^{t_*} \in \Omega$ и $(\omega_* \square \omega')^{t_*} \in \Omega$, причем справедливы равенства

$$((\omega_* \square \omega)^{t_*} \,|\, I_\theta) = ((\omega_* \square \omega')^{t_*} \,|\, I_\theta). \tag{4.28}$$

Из (4.28) в силу (4.18) получим $\big(\alpha_*((\omega_* \square \omega)^{t_*}) \,|\, I_\theta\big) = \big(\alpha_*((\omega_* \square \omega')^{t_*}) \,|\, I_\theta\big)$. Следовательно, найдется $h \in \alpha_*((\omega_* \square \omega')^{t_*})$ такой, что

$$(f \,|\, I_\theta) = (h \,|\, I_\theta). \tag{4.29}$$

В частности (см. (4.27)), поскольку $\theta \geqslant t_*$ имеем равенство $(h \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*})$. Следовательно (см. (4.24)), $h \in \beta(\omega')$ и при этом (см. (4.27), (4.29)) $\gamma = (h \,|\, I_\theta)$. Отсюда заключаем, что $\gamma \in \Gamma'$ и в силу произвольности выбора γ имеем вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Из соображений симметрии выполнено обратное вложение и, как следствие, равенство $\Gamma = \Gamma'$. Так как выбор ω, ω' и θ был произвольным справедлива импликация: $\forall \omega_1 \in \Omega \; \forall \omega_2 \in \Omega \; \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$((\omega_1 \,|\, I_t) = (\omega_2 \,|\, I_t)) \Rightarrow \Big(\big(\beta(\omega_1) \,|\, I_t\big) = \big(\beta(\omega_2) \,|\, I_t\big) \Big). \tag{4.30}$$

Из (4.26) и (4.30) получаем, что $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. Значит (см. (4.23)), для некоторых $\bar{\omega} \in \Omega$, $\bar{s} \in \beta(\bar{\omega})$ и $\bar{t} \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$(\bar{t}, \bar{s}(\bar{t})) \notin \mathcal{N}. \tag{4.31}$$

Но, по построению и предположению 3, $\bar{t} \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$, $(\omega_* \square \bar{\omega})^{t_*} \in \Omega$ и $\bar{s} \in \alpha_*((\omega_* \square \bar{\omega})^{t_*})$. Иначе говоря, соотношение (4.31) противоречит (4.19). Следовательно, предположение (4.15) было ложным и выполняется (4.14). Таким образом, из соотношений (4.11), (4.14) и (4.13) в силу принципа трансфинитной индукции вытекает, что для произвольного $\delta \in \mathbf{ORD}$ выполняется вложение $\Lambda \subset \mathbf{A}^\delta(\mathcal{N})$. При $\delta = \sigma$ этого вложение обращается в искомое вложение (4.10). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. С 456.
3. **Ченцов А.Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
4. **Ченцов А.Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
5. **Ухоботов В.И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
6. **Чистяков С.В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
7. **Ухоботов В.И.** К построению стабильного моста в игре удержания // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, № 2. С. 236–240.
8. **Дятлов В.П., Ченцов А.Г.** Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления // Кибернетика. 1987. № 2. С. 92–99.
9. **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 157–169.
10. **Ченцов А.Г.** О задаче управления с ограниченным числом переключений // Депонент ВИНИТИ. № 4942-В 87. Свердловск, 1987. С. 1–45.
11. **Серков Д.А., Ченцов А.Г.** Метод программных итераций и операторная выпуклость в абстрактной задаче удержания // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, № 3. С. 348–366.
12. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
13. **Bourbaki N.** Sur le théorème de Zorn // Archiv der Mathematik. 1949. Т. 2, № 6. С. 434–437.
14. **Cousot P., Cousot R.** Constructive versions of Tarski's fixed point theorems // Pacific J. Math. 1979. Т. 82, № 1. С. 43–57.
15. **Echenique F.** A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem // Int. J. Game Theory. 2005. Т. 33. С. 215–218.

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: serkov@imm.uran.ru

Поступила 31.10.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game–theoretical control problems*. New York: Springer, 1988, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Chentsov A.G. On the structure of an approach problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian).
4. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
5. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354.
6. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 845–852.
7. Ukhobotov V. I., On the construction of a stable bridge in the holding game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1981, vol. 45, no. 2, pp. 169–172.
8. Dyatlov V.P., Chentsov A.G. Monotone iterations of sets and their applications to game control problems, *Kibernetika*, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 92–99. doi: 10.1007/BF01071786 .
9. Chentsov A.G. An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 299–310. doi: 10.1023/B:AURC.0000014727.63912.45 .
10. Chentsov A.G. On the problem of control with a limited number of switching. *Deponent VINITI*, no. 4942-B87, Sverdlovsk, 1987, pp. 1–45 (in Russian).
11. Serkov, D.A., Chentsov A.G. [Programmed iteration method and operator convexity in an abstract retention problem] *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, no.3, pp. 348–366 (in Russian). doi: 10.20537/vm150305 .
12. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*. Moscow, Mir Publ, 1970, 416 p.
13. Bourbaki N. Sur le théorème de Zorn. *Archiv der Mathematik*, 1949, vol. 2, no. 6, pp. 434–437.
14. Cousot P., Cousot R. Constructive versions of Tarski's fixed point theorems. *Pacific J. Math.*, 1979, vol. 82, no. 1, pp. 43–57.
15. Echenique F. A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem. *Int. J. Game Theory*, 2005, vol. 33, pp. 215–218. doi:10.1007/s001820400192 .

D. A. Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: serkov@imm.uran.ru .