ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНО-ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ПОДЪЯДЕР В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПРЕДПИСАННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Л. А. Петросян, Я. Б. Панкратова

В работе предложен новый сильно-динамически устойчивый принцип оптимальности кооперативной дифференциальной игры. Это делается путем построения некоторого подмножества ядра кооперативной игры. Предлагается считать это подмножество новым принципом оптимальности в рассматриваемом классе игр. Построение производится на основе введения функции $\hat{V}$, доминирующей значения классической характеристической функции по коалициям. Пусть $V(S,\bar{x}(\tau),T-\tau)$ значение классической характеристической функции, вычисленной в подыгре с начальными условиями $\bar{x}(\tau)$, $T-\tau$ на кооперативной траектории. Определим функцию $\hat{V}$ по формуле

$$\hat{V}(S;x_0,T-t_0)=\max_{t_0\le\tau\le T}\frac{V(S;x^*(\tau),T-\tau)}{V(N;x^*(\tau),T-\tau)}V(N;x_0,T-t_0).$$

На основе функции $\hat{V}(S;x_0,T-t_0)$ строится аналог классического ядра. В работе показано, что построенное таким образом ядро является подмножеством классического ядра. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать его как новый принцип оптимальности. Доказывается, что этот вновь построенный принцип оптимальности является сильно-динамически устойчивым.

Ключевые слова: кооперативная дифференциальная игра, сильно-динамическая устойчивость, ядро, подъядро, дележ.

L. A. Petrosyan, Ya. B. Pankratova. Construction of strongly time-consistent subcores in differential games with prescribed duration.

A new strongly time-consistent (dynamically stable) optimality principle is proposed in a cooperative differential game. This is done by constructing a special subset of the core of the game. It is proposed to consider this subset as a new optimality principle. The construction is based on the introduction of a function $\hat{V}$ that dominates the values of the classical characteristic function in coalitions. Suppose that $V(S,\bar{x}(\tau),T-\tau)$ is the value of the classical characteristic function computed in the subgame with initial conditions $\bar{x}(\tau)$, $T-\tau$ on the cooperative trajectory. Define

$$\hat{V}(S;x_0,T-t_0)=\max_{t_0\le\tau\le T}\frac{V(S;x^*(\tau),T-\tau)}{V(N;x^*(\tau),T-\tau)}V(N;x_0,T-t_0).$$

Using this function, we construct an analog of the classical core. It is proved that the constructed core is a subset of the classical core; thus, we can consider it as a new optimality principle. It is proved also that the newly constructed optimality principle is strongly time-consistent.

Keywords: cooperative differential game, strong time consistency, core, subcore, imputation.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-219-227

Введение

В работе исследуются неантагонистические дифференциальные игры на конечном временном интервале. Корректная постановка дифференциальных игр подробно исследована в работе [2] и на этой основе в [1] предложена теория некооперативных [8] неантагонистических игр (см. также [6; 7]). Данная статья примыкает к работам [3; 11], где исследуется кооперативный вариант дифференциальной игры. Как отмечалось ранее (см. [3; 11]), попытка переноса принципов оптимальности из статической кооперативной теории игр n-лиц на дифференциальные игры приводит к динамически неустойчивым (несостоятельным во времени) принципам оптимальности, что делает бессодержательным их практическое использование. Нами предлагались различные подходы к нахождению динамически устойчивых и сильно-динамически устойчивых принципов оптимальности, основанные на построении дополнительных процедур распределения дележа на отрезке времени $[t_0, T]$ (ПРД) и на использовании принципов оптимальности из классической статической теории кооперативных игр [9; 10].

В работах [4; 5] показано, что можно ввести новый вид характеристической функции таким образом, что построенные на его основе классические принципы оптимальности оказываются сильно-динамически устойчивыми в кооперативной дифференциальной игре, а дополнительные процедуры распределения дележа во времени приобретают естественное содержание. Однако нам не удалось проследить связь между принципами оптимальности, построенными на основе использования классических характеристических функций и построений на основе нового вида характеристической функции, предложенной в [4; 5].

В данной работе мы покажем, что при выполнении определенных условий классическое ядро имеет непустое пересечение с ядром, построенным на основе новой характеристической функции, и это пересечение можно рассматривать как новый принцип оптимальности, который по своему построению будет сильно-динамически устойчивым (или состоятельным во времени).

1. Построение ядра с использованием новой характеристической функции

Пусть задана дифференциальная игра n-лиц $\Gamma(x_0, T - t_0)$ из начального состояния x_0 на отрезке времени $[t_0, T]$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x(t_0) = x_0, \\ &u_i \in U_i \subset \mathrm{Comp}\,\mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Выигрыши игроков определяются по формулам

$$K_i(x, T - t_0; u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(t))dt, \quad i = 1, \ldots, n, \quad h_i > 0,$$

$x(t)$ — решение системы (1.1) при использовании управлений $u_1, \ldots, u_n$. Предполагается, что на систему (1.1) наложены все условия гарантирующие существование, единственность и продолжимость решения $x(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ при всех допустимых измеримых программных управлениях $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, $t \in [t_0, T]$. Предположим, что существует такой набор управлений

$$u^*(t) = \{u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\}, \quad t \in [t_0, T],$$

что имеет место

$$\begin{aligned} K(x_0, T - t_0; u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)) &= \max_{u_1, \ldots, u_n} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, T - t_0; u_1(t), \ldots, u_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x^*(t))dt = V(N; x_0, T - t_0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Решение $x^*(t)$ системы (1.1), соответствующее $u^*(t)$, называется *кооперативной траекторией.*

В кооперативной теории игр n-лиц [9] считается, что игроки вначале договариваются об использовании управлений $u^*(t) = \{u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\}$, а следовательно, в кооперативной постановке дифференциальная игра $\Gamma(x_0, T - t_0)$ всегда развивается вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$.

Пусть $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ — множество всех игроков, $S \subset N$. Обозначим через $V(S; x_0, T - t_0)$ характеристическую функцию [9] игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ и заметим при этом, что $V(N; x_0, T - t_0)$ вычисляется по формуле (1.2). Здесь мы для определенности предполагаем, что характеристическая функция $V(S; x_0, T - t_0)$ строится классическим образом как значение антагонистической дифференциальной игры на основе игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ между коалицией S (первый максимизирующий игрок) и коалицией $N \setminus S$ (второй минимизирующий игрок), при этом в каждой ситуации выигрыш коалиции S полагается равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Рассмотрим семейство подыгр игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ вдоль кооперативной траектории $\Gamma(x^*(t), T - t)$, т. е. семейство кооперативных дифференциальных игр из начального состояния $x^*(t)$, определенных на отрезке $[t, T]$, $t \in [t_0, T]$, и с функциями выигрыша

$$K_i(x^*(t), T - t; u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_t^T h_i(x(\tau))d\tau, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x(\tau)$ — решение системы (1.1) из начального состояние $x^*(t)$ при управлениях $u_1, \ldots, u_n$.

Пусть $V(S; x^*(t), T - t)$, $S \subset N$, $t \in [t_0, T]$, — характеристическая функция подыгры $\Gamma(x^*(t), T - t)$. Для $V(N; x^*(t), T - t)$ $(S = N)$ выполняется условие Беллмана вдоль $x^*(t)$, т. е.

$$V(N; x_0, T - t_0) = \int\limits_{t_0}^t \sum_{i=1}^n h_i(x^*(\tau))d\tau + V(N; x^*(t), T - t).$$

Отсюда получаем, что

$$V'(N; x^*(t), T - t) = -\Big[\sum_{i=1}^n h_i(x^*(t))\Big].$$

Напомним формулы для выражения новой характеристической функции, введенные нами в [4; 5], т. е. определим новую функцию множества $\bar{V}(S; x_0, T - t_0)$, $S \subset N$, по формуле

$$\bar{V}(S; x_0, T - t_0) = -\int\limits_{t_0}^T V(S; x^*(\tau), T - \tau)\frac{V'(N; x^*(\tau), T - \tau)}{V(N; x^*(\tau), T - \tau)}d\tau. \tag{1.3}$$

Аналогично определим для $t \in [t_0, T]$:

$$\bar{V}(S; x^*(t), T - t) = -\int\limits_t^T V(S; x^*(\tau), T - \tau)\frac{V'(N; x^*(\tau), T - \tau)}{V(N; x^*(\tau), T - \tau)}d\tau. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что функция множества $\bar{V}(S; x_0, T - t_0)$ обладает всеми свойствами характеристической функции игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$. Действительно,

$$\bar{V}(N; x_0, T - t_0) = V(N; x_0, T - t_0) = \sum_{i=1}^n \int\limits_{t_0}^T h_i(x^*(\tau))d\tau,$$

$$\bar{V}(S_1 \cup S_2; x_0, T - t_0) \geq \bar{V}(S_1; x_0, T - t_0) + \bar{V}(S_2; x_0, T - t_0)$$

для $S_1,\ S_2 \subset N$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ (здесь используется супераддитивность функции $V(S; x_0, T - t_0)$). Аналогичное утверждение справедливо и для функции $\bar{V}(S; x^*(t), T - t)$, которая вводится как характеристическая функция игры $\Gamma(x^*(t), T - t)$. Пусть $L(x_0, T - t_0)$ — множество дележей в $\Gamma(x_0, T - t_0)$, определяемых характеристической функцией $V(S; x_0, T - t_0)$, $S \subset N$, т. е.

$$L(x_0, T - t_0) = \Big\{\xi = \{\xi_i\}\colon\ \sum_{i=1}^n \xi_i = V(N; x_0, T - t_0),\ \xi_i \geq V(\{i\}; x_0, T - t_0)\Big\}. \tag{1.5}$$

Аналогично определим множество дележей $L(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$ в подыгре $\Gamma(x^*(t), T-t)$:

$$L(x^*(t), T-t) = \Big\{\xi(t) = [\xi_i(t)]\colon \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) = V(N; x^*(t), T-t), \xi_i(t) \geq V(\{i\}; x^*(t), T-t), i \in N\Big\}. \tag{1.6}$$

Пусть $\xi(t) \in L(x^*(t), T-t)$ — интегрируемый селектор, $t \in [t_0, T]$, введем

$$\bar{\xi} = -\int_{t_0}^{T} \xi(t) \frac{V'(N; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} dt, \tag{1.7}$$

$$\bar{\xi}(t) = -\int_{t}^{T} \xi(\tau) \frac{V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau, \tag{1.8}$$

где $t \in [t, T_0]$.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i = V(N; x_0, T-t_0), \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i(t) = V(N; x^*(t), T-t),$$

$$\bar{\xi}_i \geq -\int_{t_0}^{T} V(\{i\}; x^*(t), T-t) \frac{V'(N; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} dt = \bar{V}(\{i\}; x_0^*, T-t_0)$$

и аналогично

$$\bar{\xi}(t) \geq= \bar{V}(\{i\}; x^*(t), T-t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in [t_0, T],$$

т. е. векторы $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_i\}$ и $\bar{\xi}(t) = \{\bar{\xi}_i(t)\}$ являются дележами в играх $\Gamma(x_0, T-t_0)$, $\Gamma(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, соответственно, если в качестве характеристических функций будут взяты функции $\bar{V}(S; x_0, T-t_0)$ и $\bar{V}(S; x^*(t), T-t)$. Обозначим множество дележей, определяемых характеристическими функциями $\bar{V}(S; x_0, T-t_0)$ и $\bar{V}(S; x^*(t), T-t)$, соответственно через $\bar{L}(x_0, T-t_0)$ и $\bar{L}(x^*(t), T-t)$ (см. (1.5), (1.6)). Мы имеем, что $\bar{\xi} \in \bar{L}(x_0, T-t_0)$, $\bar{\xi}(t) \in \bar{L}(x^*(t), T-t)$. Однако справедливо и обратное утверждение. Любой дележ $\bar{\xi} \in \bar{L}(x_0, T-t_0)$ ($\bar{\xi}(t) \in \bar{L}(x^*(t), T-t)$) представим в виде (1.7) ((1.8)) для некоторого селектора $\xi(t) \in L(x^*(t), T-t)$.

Обозначим через $C(x_0, T-t_0) \subset L(x_0, T-t_0)$, $C(x^*(t), T-t) \subset L(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, ядра игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$ и соответственно подыгры $\Gamma(x^*(t), T-t)$ (в дальнейшем предполагается, что множества $C(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, не пусты). Пусть в формулах (1.7), (1.8) $\xi(t)$ является таким интегрируемым селектором, что $\xi(t) \in C(x^*(t), T-t_0)$, $t \in [t_0, T]$. Пусть далее $\bar{C}(x_0, T-t_0)$ и $\bar{C}(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, — ядра игр $\Gamma(x_0, T-t_0)$ и $\Gamma(x^*(t), T-t)$ соответственно, построенные по характеристической функции $\bar{V}(S; x, T-t_0)$, определяемой формулами (1.3), (1.4). То есть $\bar{C}(x_0, T-t_0)$ и $\bar{C}(x^*(t), T-t)$ — это множество дележей вида

$$\sum_{i \in S} \bar{\xi}_i \geq \bar{V}(S; x_0, T-t_0), \quad \sum_{i \in N} \bar{\xi}_i = \bar{V}(N; x_0, T-t_0) = V(N; x_0, T-t_0)$$

и

$$\sum_{i \in S} \bar{\xi}_i(t) \geq \bar{V}(S; x^*(t), T-t), \quad \sum_{i \in N} \bar{\xi}_i = \bar{V}(N; x^*(t), T-t) = V(N; x^*(t), T-t).$$

Лемма 1. *Для каждого дележа* $\bar{\xi}_i \in \bar{C}(x_0, T-t_0)$ *существует интегрируемый селектор*

$\xi(t) \in C(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, *такой что*

$$\bar{\xi}_i = -\int\limits_{t_0}^{T} \frac{\xi_i(\tau) V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau,$$
$$\bar{\xi}_i(t) = -\int\limits_{t}^{T} \frac{\xi_i(\tau) V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau, \tag{1.9}$$

где $i = 1, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из того что $\bar{\xi}(t)$ — дележ, имеем

$$\bar{\xi}_i(t) \geq -\int\limits_{t}^{T} \frac{V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau,$$

или

$$\bar{\xi}_i(t) = -\int\limits_{t}^{T} \frac{(\alpha_i(\tau) + V(\{i\}); x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau, \quad \alpha_i(\tau) \geq 0. \tag{1.10}$$

Суммируя (1.10) по i, получаем

$$\bar{V}(N; x^*(t), T-t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}(t) = -\int\limits_{t}^{T} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau.$$

Отсюда имеем

$$-\int\limits_{t}^{T} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau = -\int\limits_{t}^{T} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau.$$

Дифференцируя, выводим

$$V'(N; x^*(\tau), T-\tau) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau).$$

Следовательно,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau)) = V(N; x^*(\tau), T-\tau),$$

т. е. $\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau) = \xi_i(\tau)$ — дележ в игре с характеристической функцией $V(S; x^*(t), T-t)$ и, используя (1.10), мы получаем (1.9); таким образом, лемма доказана.

Ядро $\bar{C}(x_0, T-t_0)$ является сильно-динамически устойчивым, поскольку всегда имеет место (см. [4; 5])

$$\bar{C}(x_0, T-t_0) \supset -\int_{t_0}^{t} \xi(t) \frac{V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau \oplus \bar{C}(x^*(t), T-t), \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь под $a \oplus A$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, понимается множество всех векторов вида $a+b$, где $b \in A$. Величина

$$-\xi_i(t) \frac{V'(N; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} \geq 0$$

интерпретируется как скорость выплаты игроку i компоненты его дележа $\bar{\xi}_i$ на отрезке времени $[t_0, T]$.

2. Построение сильно-динамически устойчивого подъядра кооперативной игры

Постараемся выделить некоторое подмножество дележей в множестве $\bar{C}(x_0, T-t_0)$, которое будет принадлежать ядру $C(x_0, T-t_0)$, определённому на основе классической характеристической функции $V(S; x_0, T-t_0)$.

Рассмотрим величину

$$\max_{t_0 \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} = \lambda(S, t_0), \tag{2.11}$$

тогда очевидно имеем (см. (1.5))

$$\bar{V}(S; x_0, T-t_0) \leq -\lambda(S, t_0) \int_{t_0}^{T} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau = \lambda(S, t_0) V(N; x_0, T-t_0). \tag{2.12}$$

Введем новые обозначения: $\hat{V}(S; x_0, T-t_0) = \lambda(S, t_0) V(N; x_0, T-t_0)$.

Аналогично при $t \in [t_0, T]$:

$$\hat{V}(S; x^*(t), T-t) = \lambda(S, t) V(N; x^*(t), T-t), \tag{2.13}$$

где

$$\lambda(S, t) = \max_{t \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)}. \tag{2.14}$$

Из формул (2.11)–(2.14) следует

$$\hat{V}(S; x_0, T-t_0) \geq \bar{V}(S; x_0, T-t_0), \quad \hat{V}(S; x^*(t), T-t) \geq \bar{V}(S; x^*(t), T-t).$$

Заметим, что имеет место

$$\bar{V}(N; x_0, T-t_0) = \hat{V}(N; x_0, T-t_0), \quad \bar{V}(N; x^*(t), T-t) = \hat{V}(N; x^*(t), T-t).$$

Кроме того, для всех S_1, S_2, $S_1 \subset S_2$ $\hat{V}(S_1; x^*(t), T-t) \leq \hat{V}(S_2; x^*(t), T-t)$, $\quad t \in [t_0, T]$.

К сожалению свойство супераддитивности по S для функции $\hat{V}(S; x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, в общем случае не выполняется. Можем написать

$$\hat{V}(S; x^*(t), T-t) = \lambda(S, t) V(N; x^*(t), T-t) = \max_{t \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V(N; x^*(t), T-t)$$

$$\geq V(N; x^*(t), T-t) \frac{V(S; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} \geq V(S; x^*(t), T-t). \tag{2.15}$$

Сформулируем неравенство (2.15) в виде леммы. Верно следующее утверждение.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$V(S; x^*(t), T-t) \leq \hat{V}(S; x^*(t), T-t).$$

Обозначим через $\hat{C}(x^*(t), T-t)$ множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \xi_i &\geq \hat{V}(S; x^*(t), T-t), \\ \sum_{i \in N} \xi_i &= \hat{V}(N; x^*(t), T-t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Предположим, что множество $\hat{C}(x^*(t), T-t)$ не пусто при $t \in [t_0, T]$. Легко видеть, что оно является аналогом ядра $C(x_0, T-t_0)$, если в качестве характеристической функции взять функцию $\hat{V}(S; x^*(t), T-t)$. Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Имеет место включение*

$$\hat{C}(x^*(\tau), T-\tau) \subset C(x^*(\tau), T-\tau) \cap \bar{C}(x^*(\tau), T-\tau). \tag{2.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $\bar{C}(x^*(\tau), T-\tau)$ *есть множество дележей вида*

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq \bar{V}(S; x^*(\tau), T-\tau), \quad \sum_{i \in N} \xi_i = \bar{V}(N; x^*(\tau), T-\tau).$$

Формула (2.17) следует из леммы 1 и (2.16), т. е. из неравенств

$$\bar{V}(S; x^*(\tau), T-\tau) \leq \hat{V}(S; x^*(\tau), T-\tau), \; V(S; x^*(\tau), T-\tau) \leq \hat{V}(S; x^*(\tau), T-\tau), \; S \subset N, \; \tau \in [t_0, T],$$

и леммы 2. □

Поскольку $\hat{C}(x^*(\tau), T-\tau) \subset \bar{C}(x^*(\tau), T-\tau)$, то $\hat{C}(x^*(\tau), T-\tau)$ — сильно-динамически устойчивый принцип оптимальности, так как $\bar{C}(x^*(\tau), T-\tau)$ таким является (см. [4; 5]).

Из теоремы следует, что дележи из $\hat{C}(x^*(t), T-t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ принадлежат классическому ядру игры $\Gamma(x^*(t), T-t)$. Таким образом, нами построено сильно-динамически устойчивое подъядро ядра $C(x^*(t), T-t)$ для подыгры $\Gamma(x^*(t), T-t)$. В этом смысле теорема устанавливает новый принцип оптимальности.

Заключение

Свойство сильно-динамической устойчивости (сильной временной состоятельности) совпадает со свойством динамической устойчивости (временной состоятельности) для однозначных принципов оптимальности, таких как вектор Шепли [5] или “пропорциональное решение”. Однако для многозначных принципов оптимальности оно имеет существенный и нетривиальный смысл, который заключается в том, что любое оптимальное поведение в подзадачах с начальными состояниями на кооперативной траектории, вычисленное в некоторый промежуточный момент времени $t \in [t_0, t]$, вместе с оптимальным поведением на интервале времени $[t_0, t]$ является оптимальным в задаче из начального состояния t_0. Это свойство почти никогда не выполнено для таких множественных принципов оптимальности, как ядро, NM-решение. Нами предложен новый принцип оптимальности, представляющий собой некоторое подмножество ядра, которое обладает свойством сильно-динамической устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука: Урал. отд-ние, 1993. 184 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
3. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1979. №1. С. 52–59.
4. **Петросян Л.А.** Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1993. №4. С 40–46.
5. **Петросян Л.А.** Характеристические функции в кооперативных дифференциальных играх // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1995. №1. С 48–52.
6. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. London: Acad. Press, 1982. 429 p.
7. Differential games in economics and management science / E.J. Dockner, S. Jorgensen., N.V. Long, G. Sorger. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 382 p.
8. **Nash J.** Non-cooperative games // Ann. Mathematics. 1951. Vol. 54, no. 2. P. 286–295.
9. **Neumann J., Morgenstern O.** Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton Univ. Press, 1947. 641 p.
10. **Shapley L.S.** A Value for n-person games // Contributions to the theory of games / eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker. Princeton: Princeton Univ. Press, 1953. P. 307–315.
11. **Yeung D.W.K., Petrosyan L.A.** Subgame consistent economic optimization. New York: Birkhauser, 2012. 395 p. (Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications). doi: 10.1007/978-0-8176-8262-0 .

Петросян Леон Аганесович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Поступила 30.10.2016

Панкратова Ярославна Борисовна
канд. физ.-мат. наук, ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: y.pankratova@spbu.ru

REFERENCES

1. Kleimenov A.F. *Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igry* [Nonantagonistic positional differential games]. Ekaterinburg: Nauka Publ., Ural'skoe Otdelenie, 1993. 185 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Petrosjan L.A., Danilov N.N. Stability of the solutions in nonantagonistic differential games with transferable payoffs. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.*, 1979, no. 1, pp. 52–59 (in Russian).
4. Petrosjan L.A. Strongly time-consistent differential optimality principles. *Vestnik St. Petersburg. Univ. Math. Mekh. Astronom*, 1993, no. 4, pp. 40–46 (in Russian).
5. Petrosjan L.A. Characteristic functions of cooperative differential games. *Vestnik St. Petersburg. Univ. Math. Mekh. Astronom.*, 1995, no. 1, pp. 48–52 (in Russian).
6. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory.* London: Acad. Press, 1982, 429 p.
7. Dockner E. J., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. *Differential games in economics and management science.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 382 p.
8. Nash J. Non-cooperative games. *Ann. Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295.
9. Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1947, 641 p.

10. Shapley L.S. A Value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Princeton: Princeton Univ. Press, 1953, pp. 307–315.
11. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Subgame consistent economic optimization*, New York: Birkhauser, 2012, Ser. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications, 395 p. doi: 10.1007/978-0-8176-8262-0 .

L.A. Petrosyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Ya. B. Pankratova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Saint Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: y.pankratova@spbu.ru