ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА УБЕГАЮЩЕГО В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V,$$

где множество допустимых управлений V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Предполагается, что фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена. Целью группы преследователей является поимка убегающего не менее чем r различными преследователями, причем терминальные множества — выпуклые компакты. Преследователи используют квазистратегии. В терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Приведены примеры.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, рекуррентная функция.

N. N. Petrov, N. A. Solov'eva. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games.

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider a linear nonstationary problem in which one evader is pursued by a group of players and all the participants have equal capabilities. The problem is described by the system

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V,$$

where the set of admissible controls V is a strictly convex compact set with smooth boundary. It is assumed that the fundamental matrix $\Phi(t)$ of the homogeneous system $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$ is a Zubov recursive function and its derivative is uniformly bounded. The aim of the pursuing group is to capture the evader by at least r different pursuers. We assume that the terminal sets are convex and compact. The pursuers use quasistrategies. We obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. Examples are given.

Keywords: differential game, group pursuit, recursive function.

MSC: 49N75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218

Введение

Рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей одного убегающего [1–3] при условии, что все участники обладают равными возможностями, фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией. Задача простого группового преследования с равными возможностями всех участников рассматривалась Б. Н. Пшеничным [4], были получены необходимые и достаточные условия поимки. Многократная поимка в задаче простого группового преследования исследовалась в работе Н. Л. Григоренко [5]. Условия многократной одновременной поимки для задачи простого преследования получены А. И. Благодатских [6]. Задача о многократной поимке в примере Л. С. Понтрягина представлена в работах [7–10]. Однократная поимка убегающего в линейной рекуррентной задаче группового преследования рассмотрена в работе [11].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания в сфере науки.

В данной работе получены достаточные условия многократной поимки в линейной рекуррентной задаче группового преследования. При этом предполагается, что каждый из преследователей может осуществить поимку не более одного раза и после осуществления поимки он исключается из процесса игры. Такая ситуация может возникнуть, когда требуется "уничтожить" убегающего, а "соприкосновение" одного преследователя с убегающим не гарантирует такого исхода. Работа примыкает к исследованиям [12; 13].

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Движение каждого преследователя P_i описывается системой

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \tag{1.1}$$

а закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v, \quad v \in V, \quad y(t_0) = y^0, \tag{1.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функция порядка k. Здесь и далее $i \in I = \{1, \ldots, n\}$.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.3}$$

Считаем, что $z_i^0 \notin M_i$, где M_i — заданные выпуклые компакты.

Введем следующие обозначения. $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega, \quad \Phi(t_0) = E.$$

$\mathrm{Int}X$, $\mathrm{co}X$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества X. Пусть K — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел.

$$\Omega_r(K) = \{(i_1, \ldots, i_r) \mid i_1, \ldots, i_r \in K \text{ и попарно различны}\},$$

$$\lambda_i(v, h) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda(h - M_i) \cap (V - v) \neq \varnothing\}, & \text{если } h \notin M_i, \\ 0, & \text{если } h \in M_i, \end{cases}$$

$$F_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_i\big(v(s), \Phi(s)z_i^0\big)ds, \quad D_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| \leqslant \varepsilon\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что задана квазистратегия U_i преследователя P_i, если определено отображение $U_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальным состояниям $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

О п р е д е л е н и е 2. В игре происходит r-кратная поимка, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют момент $T(\varepsilon) > t_0$, квазистратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой функции $v(t), t \in [t_0, \infty)$ существуют набор $\Lambda \in \Omega_r(I)$, моменты времени $\tau_s \in [t_0, T(\varepsilon)]$ для которых $z_s(\tau_s) \in M_i^\varepsilon = M_i + \mathrm{Int}D_\varepsilon(0)$ для всех $s \in \Lambda$. Считаем, что $n \geqslant r$.

О п р е д е л е н и е 3 [14]. Функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ можно указать $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых справедливо неравенство $\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon$.

Функция $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

2. Многократная поимка одного убегающего

Предположение 1. *Фундаментальная матрица Φ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.*

Предположение 2.

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \operatorname{Intco}\{z_\alpha^0 - M_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение 2. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любых $h_i \in D_{2\varepsilon_0}(z_i^0)$ справедливо включение*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \operatorname{Intco}\{h_\alpha - M_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Справедливость леммы следует из свойств открытых множеств. В дальнейшем считаем, что ε_0 выбрано так, что справедлива лемма 1.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда существует момент $T > t_0$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется множество $\Lambda \in \Omega_r(I)$, что $F_\alpha(T) \geqslant 1$ для всех $\alpha \in \Lambda$.*

Доказательство. Обозначим $\mu(A)$ — мера Лебега множества A,

$$\Delta = \{t \geqslant t_0 \mid \Phi(t) z_i^0 \in D_{2\varepsilon_0}(z_i^0) \text{ для всех } i \in I\},$$
$$d = \max_i \|z_i^0\|, \quad M = \sup_{t \geqslant t_0} \|\dot{\Phi}(t)\|.$$

Так как Φ является рекуррентной функцией, то существует $\tau > 0$, что для каждого $s = 1, 2, \ldots$ найдется момент $t_s \in [t_0 + (s-1)\tau, t_0 + s\tau]$, для которого $\|\Phi(t_s) - \Phi(t_0)\| < \varepsilon_0/d$. Отсюда $\|\Phi(t_s) z_i^0 - \Phi(t_0) z_i^0\| < \varepsilon_0$. Следовательно, $\Phi(t_s) z_i^0 \in D_{\varepsilon_0}(z_i^0)$ для всех $i \in I, s = 1, 2, \ldots$ Пусть далее $\Delta_s = \{t \mid t \in [t_s, t_{s+1}),\ \Phi(t) z_i^0 \in D_{2\varepsilon_0}(z_i^0) \text{ для всех } i \in I\}$. Из теоремы о среднем следует, что для любых $\tau_1, \tau_2, i \in I$ справедливо неравенство

$$\|\Phi(\tau_1) z_i^0 - \Phi(\tau_2) z_i^0\| \leqslant Md|\tau_1 - \tau_2|.$$

Поэтому если $\|\Phi(\tau_1) z_i^0 - \Phi(\tau_2) z_i^0\| \geqslant \varepsilon_0$, то $|\tau_1 - \tau_2| \geqslant \tau_0 = \varepsilon_0/(Md)$. Значит, $[t_s, t_s + \tau_0] \subset \Delta_s$ для всех $s = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\mu(\Delta) = +\infty$. Докажем, что для любого

$$h = (h_1, \ldots, h_n) \in D = D_{2\varepsilon_0}(z_1^0) \times \cdots \times D_{2\varepsilon_0}(z_n^0)$$

справедливо неравенство

$$\rho(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_r(I)} \min_{s \in \Lambda} \lambda_s(v, h_s) > 0.$$

Предположим, что существует h, для которого $\rho(h) = 0$. Значит, существует $v_0 \in V$ такое, что в любом наборе $\Lambda \in \Omega_r(I)$ найдется s, для которого $\lambda_s(v_0, h_s) = 0$. Строим множество $\Lambda_0 = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-r+1})$ следующим образом. Возьмем $s_1 \in \Lambda_1 = \{1, \ldots, r\}$ такой, что $\lambda_{s_1}(v_0, h_{s_1}) = 0$. Выбираем $s_2 \in \Lambda_2 = \Lambda_1 \setminus \{s_1\} \cup \{r+1\}$, для которого $\lambda_{s_2}(v_0, h_{s_2}) = 0$, и рассматриваем множество $\Lambda_3 = \Lambda_2 \setminus \{s_2\} \cup \{r+2\}$. Выбираем $s_3 \in \Lambda_3$ так, что $\lambda_{s_3}(v_0, h_{s_3}) = 0$. На последнем шаге выбираем s_{n-r+1} так, что $\lambda_{n-r+1}(v_0, h_{s_{n-r+1}}) = 0$. В итоге получаем, что $\min\limits_{v \in V} \max\limits_{s \in \Lambda_0} \lambda_s(v, h_s) = 0$. Так как V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то из последнего соотношения следует [1, с. 208], что $0 \notin \operatorname{Intco}\{h_s - M_s,\ s \in \Lambda_0\}$; это противоречит предположению 2.

Из [1, лемма 1.3.13] следует, что функция ρ непрерывна на D. Следовательно,

$$\delta = \min_{h\in D}\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}\lambda_s(v,h_s) > 0.$$

Далее имеем

$$\max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}F_s(t) = \max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_s(v(t),\Phi(t)z_s^0)dt \geqslant \max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Delta}\lambda_s(v(t),\Phi(t)z_s^0)dt$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^r}\sum_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\Big(\min_{s\in\Lambda}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Delta}\lambda_s(v(t),\Phi(t)z_s^0)dt\Big)\geqslant \frac{\delta}{C_n^r}\mu([t_0,t]\cap\Delta).$$

Так как $\mu(\Delta) = +\infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Delta) = +\infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия $\dfrac{\delta}{C_n^r}\mu([t_0,T]\cap\Delta) \geqslant 1$, и некоторого $\Lambda \in \Omega_r(I)$ выполнено $F_s(T) \geqslant 1$ для всех $s \in \Lambda$. Лемма доказана.

Пусть

$$T_0 = \min\{t > t_0\colon \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha(t) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2 $T_0 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда в игре происходит* r*-кратная поимка убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение задачи Коши (1.3) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \Phi(t)\Big(z_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)(u_s(s) - v(s))ds\Big).$$

Пусть $v(t), t \in [t_0,T_0]$ — произвольное допустимое управление убегающего E. Из определения момента T_0 следует, что существуют момент $\tau \in [t_0,T_0]$, являющийся корнем функции

$$G(t) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega_q(I)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds,$$

и множество $\Lambda_0 \in \Omega_q(I)$ такое, что

$$1 - \int\limits_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds \leqslant 0 \text{ для всех } \alpha\in\Lambda_0.$$

Пусть $t_\alpha \in [t_0,\infty)$ — минимальный корень функции $1 - F_\alpha(t)$, $\alpha \in \Lambda_0$. Отметим, что $t_\alpha \in [t_0,\tau]$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$. Пусть $C = \max\limits_{i,m_i\in M_i}\|m_i\|$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. В силу предположения 1 существует $T(\varepsilon) > T_0$, для которого выполнено $\|\Phi(T(\varepsilon)) - E\| < \dfrac{\varepsilon}{C+1}$. Предпишем преследователю P_i, $i \in \Lambda_0$, строить свое управление u_i следующим образом. Если в момент $t \geqslant t_0$ число $F_i(t) < 1$, то $u_i(t) \in V$, $m_i(t) \in M_i$ выбираются как лексикографический минимум среди решений уравнения

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t),\Phi(t)z_i^0)\Phi(t)(z_i^0 - m_i(t)).$$

Если τ_i — первый момент времени, для которого $F_i(\tau_i) = 1$, то считаем, что $\lambda_i(v(t), \Phi(t)z_i^0) = 0$ для всех $t \geqslant \tau_i$. Значит, $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \geqslant \tau_i$.

Тогда из (1.3) получаем

$$z_i(T(\varepsilon)) = \Phi(T(\varepsilon))\Big(z_i^0 - \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)(z_i^0 - m_i(s))ds\Big)$$

$$= \Phi(T(\varepsilon))z_i^0\Big(1 - \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds\Big) + \Phi(T(\varepsilon)) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.$$

В силу определения T_0 для некоторого $i \in I$ будет выполняться $F_i(T_0) = 1$. Следовательно, $F_i(T(\varepsilon)) = 1$. Поэтому

$$z_i(T(\varepsilon)) = \Phi(T(\varepsilon)) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds = \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds$$

$$+ \ (\Phi(T(\varepsilon)) - E) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.$$

Отметим, что $\displaystyle\int_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds \in M_i$, а

$$\Big\|(\Phi(T(\varepsilon)) - E) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds\Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{C+1}\, C < \varepsilon.$$

Поэтому $z_i(T(\varepsilon)) \in M_i + \mathrm{Int} D_\varepsilon(0) = M_i^\varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$ и выполнено предположение* 2. *Тогда в игре происходит r-кратная поимка убегающего.*

В данном случае предположение 1 выполнено, так как $\Phi(t) = E$.

Следствие 2. *Пусть $A(t) = A$ для всех $t \geqslant t_0$, все собственные числа матрицы A чисто мнимые и попарно различны и выполнено предположение* 2. *Тогда в игре происходит r-кратная поимка убегающего.*

Из условия следствия вытекает, что фундаментальная матрица $\Phi(t)$ является почти периодической, а значит, рекуррентной.

Следствие 3. *Пусть выполнено предположение* 1 *и существует момент $\tau \geqslant t_0$ такой, что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \mathrm{Intco}\{\Phi(\tau)z_\alpha^0,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Тогда в игре происходит r-кратная поимка убегающего.

Доказательство. Полагая $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau]$, имеем $z_i(\tau) = \Phi(\tau)z_i^0$. Принимая далее момент τ за начальный, получим справедливость утверждения.

Определение 4. В игре происходит точная r-кратная поимка, если существуют момент $T > t_0$, квазистратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой функции $v(t), t \in [t_0, \infty)$ существуют набор $\Lambda \in \Omega_r(I)$, моменты времени $\tau_s \in [t_0, T]$, для которых $z_s(\tau_s) = 0$ для всех $s \in \Lambda$.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1 *и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \operatorname{Intco}\{z_\alpha^0,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Тогда в игре происходит точная r-кратная поимка убегающего.

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

П р и м е р 1. Пусть в системе (1.3) $k = 2$, $t_0 = 0$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Функция $\Phi(t)$ является рекуррентной. Предположение 1 выполнено. Поэтому, если выполнено предположение 2, то в игре происходит r-кратная поимка.

П р и м е р 2. Пусть в системе (1.3) $t_0 = 0$, матрица $A(t) = a(t)E$, где

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 2\pi], \\ \sin t, & \text{если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{cases} E, & \text{если } t \in [0, 2\pi], \\ e^{1-\cos t}E, & \text{если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Функция $\Phi(t)$ является рекуррентной, но не почти периодической [14]. Предположение 1 выполнено. Пусть справедливо предположение 2. Тогда в игре происходит r-кратная поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. Думка, 1992. 384 с.
2. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. 197 с.
3. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
4. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
5. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47
6. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
7. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
8. **Благодатских А.И.** Многократная поимка в примере Понтрягина // Вест. Удмурт. ун-та. 2009. № 2. С. 3–12. (Математика. Механика. Компьютерные науки).
9. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 178–186.
10. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.
11. **Соловьева Н.А.** Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, № 1. С. 81–90.

12. **Банников А.С., Петров Н.Н.** К нестационарной задаче группового преследования// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 40–51.
13. **Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 41–48.
14. **Зубов В.И.** К теории рекуррентных функций // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 532–560.

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт математики, информационных технологий и физики
Удмуртского государственного университета
e-mail: kma3@list.ru

Поступила 25.10.2016

Соловьева Надежда Александровна
старший преподаватель
Удмуртский государственный университет
e-mail: solov_na@mail.ru

REFERENCES

1. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* [Conflict controlled processes]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1992, 384 p.
2. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 197 p.
3. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt. State Univ. Publ., 2009, 266 p.
4. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
5. Grigorenko N.L. Simple pursuit/evasion game with a group of pursuers and one evader. *Vestnik Mosk. Gos. Univ. Ser. Vychislit. matematika i kibernetika*, 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
6. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, Vol. 73, no. 1, pp. 36–40. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010.
7. Petrov N.N. Multiple capture in the Pontryagin example with phase constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6.
8. Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem. *Vestnik Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, no. 2. pp. 3–12 (in Russian).
9. Petrov N. N., Solov'eva N.A Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. S174–S182. doi: 10.1134/S0081543816050163.
10. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example. *Automation and remote control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 854–860. doi: 10.1134/S0005117916050088.
11. Solov'eva N.A. One objective of group pursuit linear recurrent differential games. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 81–90 (in Russian).
12. Bannikov A.S. Petrov N.N. On a nonstationary problem of group pursuit. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2010, vol. 271, suppl. 1, pp. S41–S52. doi: 10.1134/S0081543810070047.
13. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48.
14. Zubov V.I. On the theory of recurrent functions. *Sib. Mat. Zh.*, 1962, vol. 3, no. 4, pp. 532–560. (in Russian)

N. N. Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics, Information Technology and Physics Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

N. A. Solov'eva, Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: solov_na@mail.ru .