ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 531.36; 62-50

УПРАВЛЕНИЕ ПЛАТФОРМОЙ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ В ПРИСУТСТВИИ СУХОГО ТРЕНИЯ[1]

И. М. Ананьевский, Т. А. Ишханян

Исследуется локальная задача управления системой, состоящей из несущего твердого тела и нескольких прикрепленных к нему линейных диссипативных осцилляторов. Несущее тело перемещается по горизонтальной прямой с помощью горизонтальной управляющей силы. Рассматриваемая система представляет собой простое приближение к модели, описывающей управляемые перемещения сосуда с вязкой жидкостью. Состояние жидкости в сосуде в каждый момент времени неизвестно, поэтому физические параметры осцилляторов и их фазовые состояния также считаются неизвестными. Предполагается, что между несущим телом и прямой действует сила сухого трения, параметры которого неизвестны и непостоянны. Требуется остановить несущее тело в заданном терминальном положении и удерживать его там, при этом на поведение осцилляторов после остановки тела условий не накладывается. Предложен закон ограниченного по модулю управления в форме обратной связи, который приводит несущее тело из окрестности терминального положения в это положение за конечное время. Управление задается гладкой (аналитической) всюду, кроме терминального состояния, функцией, которая может трактоваться как линейная обратная связь с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных. Эти коэффициенты бесконечно возрастают при приближении несущего тела к терминальному состоянию, однако управление остается ограниченным. Эффективность управления продемонстрирована с помощью численного моделирования.

Ключевые слова: линейная управляемая система, система осцилляторов, обратная связь, сухое трение.

I. M. Anan'evskii, T. A. Ishkhanyan. Control of a platform with oscillators under the action of dry friction.

We study a local control problem for a system consisting of a solid carrier and several linear dissipative oscillators attached to it. The carrier moves along a horizontal straight line under a horizontal steering force. The system is a simple approximation of a model describing controlled motions of a vessel with a viscous fluid. Since the state of the fluid in the vessel is unknown at any specific time, the physical parameters of the oscillators and their phase states are also considered unknown. It is assumed that a dry fiction force acts between the carrier and the straight line, and the parameters of the dry friction are unknown and varying. It is required to bring the carrier to a stop at a given terminal position and to keep it at that position; no constraints are imposed on the behavior of the oscillators after the carrier stops. We propose a feedback control law with bounded absolute value that brings the carrier from a neighborhood of the terminal position to this position in a finite time. The control is given by a function that is smooth (analytic) everywhere except for the terminal position. This function can be interpreted as a linear feedback with coefficients depending on the state variables. Although the coefficients grow unboundedly as the carrier approaches the terminal position, the control remains bounded. The efficiency of the control is illustrated by means of numerical modelling.

Keywords: linear control system, system of oscillators, feedback, dry friction.

MSC: 93C41, 93C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-20-26

Введение

Рассматривается задача управления системой, представляющей собой упрощенную модель прецизионной поворотной платформы, которая устанавливаеся на орбитальном космическом аппарате и предназначена для снижения кажущегося ускорения закрепленного на платформе контейнера с полезной нагрузкой.

В земных условиях из-за наличия гравитационного поля невозможно проведение некоторых технологических процессов, однако и на орбитальных космических аппаратах (КА) тела, механически связанные с КА, подвергаются микроускорениям относительно “квазиинерциальной” системы отсчета. Такие микроускорения вредны для гравитационно-чувствительных

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 16-11-10343).

технологических процессов, причем наибольшее отрицательное воздействие оказывает проекция микроускорения на плоскость, перпендикулярную характерному направлению процесса. Для снижения влияния микроускорения используется управляемая поворотная платформа, с помощью которой можно изменять ориентацию контейнера с гравитационно-чувствительной средой и тем самым минимизировать в каждый момент времени боковую составляющую микроускорения контейнера [1]. Платформа представляет собой двухстепенной карданов подвес, оси вращения рамок которого пересекаются под прямым углом. В подшипниках осей вращения рамок подвеса платформы присутствует сухое трение, которое оказывает существенное влияние на управление и точность ориентации, причем параметры трения заранее не известны и могут изменяться в процессе движения.

Поскольку вращения рамок осуществляются независимо, то задачи управления вращением контейнера относительно каждой из осей можно изучать раздельно.

В [2; 3] такая задача исследована для случая, когда контейнер представляет собой твердое тело. Применяемая же на практике среда в контейнере может рассматриваться как вязкая жидкость. В качестве простого приближения к такой модели будем считать контейнер твердым телом, несущим на себе несколько прикрепленных к нему гармонических диссипативных осцилляторов. Состояние среды в контейнере в каждый момент времени неизвестно, поэтому физические параметры осцилляторов и их фазовые состояния также считаются неизвестными. Требуется привести контейнер (несущее тело) за конечное время в заданное состояние покоя и удерживать его там.

1. Постановка задачи

Переформулируем задачу следующим образом. По шероховатой горизонтальной прямой под действием управляющей силы движется твердое тело с прикрепленными к нему с помощью пружин n горизонтально колеблющимися материальными точками (осцилляторами). Взаимодействия между телом и осцилляторами описываются упругими силами с вязким трением. Между несущим телом и опорной прямой действует сила сухого трения с неизвестными и непостоянными параметрами.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x} &= u + \mu(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{n}(c_i y_i + \gamma_i \dot{y}_i), \\ m_i(\ddot{x} + \ddot{y}_i) &= -c_i y_i - \gamma_i \dot{y}_i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь переменная x описывает текущее положение несущего тела на прямой; u — приложенная к нему горизонтально направленная управляющая сила; m_0 — масса несущего тела, $\mu(t, x, \dot{x})$ — сухое трение, действующее между телом и опорной прямой и удовлетворяющее неравенству

$$|\mu(t, x, \dot{x})| \leq M;$$

y_i — смещение материальной точки массой m_i i-го осциллятора; $c_i > 0$ — жесткость пружины, $\gamma_i > 0$ — коэффициент вязкого трения i-го осциллятора, $i = 1, 2, \ldots, n$. Массы точек, коэффициенты жесткости пружин и коэффициенты вязкого трения, а также функция $\mu(t, x, \dot{x})$ считаются неизвестными, фазовые координаты и скорости осцилляторов не доступны измерениям. Требуется построить управление в форме обратной связи (т. е. как функцию переменных $x, \dot{x}$), которое удовлетворяет ограничению

$$|u(x, \dot{x})| \leq U, \quad U > 0,$$

и которое остановит несущее тело в начале координат за конечное время и удержит его там. Состояния осцилляторов в момент прихода несущего тела в терминальное положение не важны, удержание тела в начале координат приведет к постепенному затуханию колебаний осцилляторов в силу наличия диссипации.

Имея в виду физическую модель, которая лежит в основе математической постановки задачи, примем ряд дополнительных условий, оправданных с практической точки зрения. Именно будем считать, что ресурсы управления настолько превосходят величину силы сухого трения, что выполнено неравенство

$$(3-\sqrt{3})U/6 > M. \tag{1.2}$$

Предположим также, что начальная энергия осцилляторов достаточно мала и что несущее тело в начальный момент находится достаточно близко от терминального положения. Последнее означает, что ориентация контейнера нуждается лишь в небольшой коррекции с целью слежения за вектором кажущегося ускорения.

Обозначим через f силу, действующую со стороны осцилляторов на несущее тело:

$$f(y,\dot y) = \sum_{i=1}^{n}(c_i y_i + \gamma_i \dot y_i), \quad y = (y_1,\dots,y_n).$$

Положим

$$u_0(x,\dot x) = m_0^{-1}u(x,\dot x), \quad v_0(t,x,\dot x,y,\dot y) = m_0^{-1}\left(\mu(t,x,\dot x) + f(y,\dot y)\right)$$

и перепишем первое уравнение (1.1) в виде

$$\ddot x = u_0 + v_0. \tag{1.3}$$

Будем рассматривать u_0 как новое управление,

$$|u_0(x,\dot x)| \le \bar U, \quad \bar U = U/m_0, \tag{1.4}$$

а v_0 — как неизвестное, ограниченное в силу сделанных выше предположений возмущение,

$$|v_0(t,x,\dot x,y,\dot y)| \le \bar V, \tag{1.5}$$

которое задается произвольной скалярной функцией, удовлетворяющей условию существования решений дифференциального уравнения (1.3). Допустимые значения величины $\bar V$ будут указаны ниже.

Сформулированная задача примет вид дифференциальной игры, в которой один игрок с помощью управления u_0 стремится привести несущее тело в начало координат фазовой плоскости $x, \dot x$, а другой с помощью функции v_0 этому препятствует. Условие разрешимости этой игры $\bar U > \bar V$ известно, а ее решение может быть найдено, например, методами теории оптимального управления. В силу произвольности возмущений такое решение будет содержать участки со скользящими режимами, которых желательно избегать на практике. Ниже используется другой подход, предложенный в [4; 5] и позволяющий строить закон управления, задаваемый гладкой (даже аналитической) всюду, кроме терминального состояния, функцией. Ранее [3] этот подход был применен для случая, когда контейнер вместе с полезной нагрузкой описывался как твердое тело. Покажем, что он эффективен и для рассматриваемой упругой модели.

2. Управление и его свойства

Положим

$$\begin{aligned} &u_0(x,\dot x) = -\frac{6x}{T^2(x,\dot x)} - \frac{3\dot x}{T(x,\dot x)}, \quad x^2+\dot x^2 \ne 0,\\ &u_0(0,0) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь функция $T(x,\dot{x})$ задается неявно уравнением

$$dT^4 - \dot{x}^2T^2 - 4x\dot{x}T - 6x^2 = 0, \quad d > 0. \tag{2.2}$$

В [4] установлено, что уравнение (2.2) относительно T имеет единственное положительное решение при $x^2 + \dot{x}^2 \neq 0$. Функция $T(x,\dot{x})$ является аналитической во всем фазовом пространстве, кроме нуля, так как соотношение (2.2) представляет собой полиномиальное уравнение относительно T с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных $x, \dot{x}$. Кроме того, функция T может быть доопределена в нуле по непрерывности: $T(0,0) = 0$.

Функция T выполняет роль функции Ляпунова для системы (1.3). Закон управления (2.1) имеет форму обратной связи с бесконечно возрастающими коэффициентами при фазовых переменных $x, \dot{x}$ и стремлении этих переменных к нулю. Тем не менее управление (2.1) ограничено во всем фазовом пространстве. Выбором параметра d в уравнении (2.2) обеспечивается выполнение условия (1.4).

Рассуждая, как и в [3], можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть*

$$d = \bar{U}^2/9 \tag{2.3}$$

и выполнено соотношение

$$\bar{V} < (3-\sqrt{3})\bar{U}/6. \tag{2.4}$$

Тогда функция (2.1) *подчиняется ограничению* (1.4) *и найдется такое* σ, $0 < \sigma \leq 1$, *что производная функции* T *в силу системы* (1.3), *управляемой по закону* (2.1), *удовлетворяет неравенству*

$$\dot{T} < -\sigma. \tag{2.5}$$

Из утверждения теоремы вытекает, что функция $T(x,\dot{x})$ обращается в нуль через конечный промежуток времени, т. е. любая траектория системы (1.3) достигает начала координат за конечное время. Это означает, что несущее тело остановится в заданном положении и будет удерживаться там с помощью управления (2.1).

Заметим, что чем меньше уровень возмущений $\bar{V}$, тем больше может быть выбрана константа σ. В частности, как установлено в [3], если возмущения отсутствуют, т. е. $v_0 \equiv 0$, то справедливо равенство $\dot{T} = -1$. В этом случае в каждой точке фазового пространства значение функции $T(x,\dot{x})$ равно времени движения несущего тела из начального состояния $x, \dot{x}$ до начала координат под действием управления (2.1).

Соотношение (2.4) представляет собой достаточное условие применимости алгоритма и показывает, насколько ресурсы управления должны превосходить максимально допустимый уровень возмущений, чтобы предложенный закон управления останавливал несущее тело в начале координат за конечное время.

Если осцилляторы отсутствуют, то в качестве возмущения выступает лишь сила сухого трения μ и соотношение (2.4) может быть записано в виде

$$(3-\sqrt{3})\bar{U}/6 > \bar{M}, \quad \bar{M} = M/m_0.$$

В этом случае теорема 1 применима во всем фазовом пространстве $x, \dot{x}$, т. е. управление (2.1) является решением задачи при любых начальных состояниях несущего тела.

При наличии осцилляторов сила f, действующая с их стороны на несущее тело, в процессе движения может оказаться столь большой, что величина $\bar{V}$, которая ограничивает модуль суммарного возмущения v_0, не будет удовлетворять условию (2.4). Покажем, что при начальных состояниях системы (1.1), близких к началу координат, и достаточно малой величине $\bar{M}$ условие (2.4) будет выполняться вдоль траектории движения.

Из определения функции T и соотношения $dT^4 = (T\dot{x} + 2x)^2 + 2x^2$, полученного путем преобразования (2.2), вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $T(x,\dot{x})$ допускает бесконечно большой низший предел, т. е.*

$$\lim_{x^2+\dot{x}^2\to\infty} T(x,\dot{x}) = \infty.$$

Положим

$$E(\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i y_i^2 + m_i(\dot{x}+\dot{y}_i)^2\right)$$

и введем в рассмотрение функцию Ляпунова $W(x,\dot{x},y,\dot{y}) = T(x,\dot{x}) + E(\dot{x},y,\dot{y})$. Эта функция положительно определена, а ее производная в силу системы (1.1) вычисляется как

$$\dot{W} = \dot{T} - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\dot{y}_i^2 - Q(\dot{x},y,\dot{y}), \quad Q(\dot{x},y,\dot{y}) = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i y_i + \gamma_i\dot{y}_i\right)\dot{x}. \tag{2.6}$$

Выберем число $\bar{V}$ из условия

$$(3-\sqrt{3})\bar{U}/6 > \bar{V} > \bar{M}. \tag{2.7}$$

Такое число $\bar{V}$ существует в силу неравенства (1.2). Положим

$$\bar{F} = \bar{V} - \bar{M}. \tag{2.8}$$

Пусть σ – константа из утверждения теоремы 1, отвечающая выбранному $\bar{V}$. Из теоремы 2 и положительной определенности квадратичной формы $E(\dot{x},y,\dot{y})$ вытекает, что существует такое $W_0 > 0$, что в области $G = \left\{(x,\dot{x},y,\dot{y}) \in \mathbb{R}^{2n+2} \colon W(x,\dot{x},y,\dot{y}) < W_0\right\}$ справедливы оценки

$$|m_0^{-1}f(y,\dot{y})| \le \bar{F}, \quad |Q(\dot{x},y,\dot{y})| < \sigma/2. \tag{2.9}$$

Первая из этих оценок вместе с (2.7) и (2.8) гарантируют выполнение в области G условий (1.5), (2.4) и, следовательно, неравенства (2.5). Из неравенства (2.5), выражения (2.6) и второй оценки (2.9) получаем, что до прихода траектории несущего тела в начало координат фазового пространства $x,\dot{x}$, т. е. пока выполнено (2.5), имеет место неравенство $\dot{W} < 0$. Следовательно, траектории, начинающиеся в области G, не покидают ее и приведенное выше рассуждение корректно.

Следующая теорема служит итогом наших рассуждений.

Теорема 3. *Существует такое $W_0 > 0$, что все траектории системы* (1.3)*, управляемой по закону* (2.1)*, начинающиеся в области G, не покидают эту область, а траектории движения несущего тела приходят в начало координат фазового пространства $x,\dot{x}$ за конечное время.*

3. Результаты компьютерного моделирования

Для проверки эффективности алгоритма управления было осуществлено численное моделирование динамики системы с тремя осцилляторами. Расчеты проведены при следующих значениях безразмерных параметров:

$$m_0 = 5; \quad m_i = 1, \quad \gamma_i = 2, \quad i = 1,2,3; \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0.5.$$

Были выбраны следующие начальные состояния:

$$x^0 = 0.1, \quad \dot{x}^0 = 0.2; \quad y_1^0 = 0.1, \quad \dot{y}_1^0 = -0.2, \quad y_2^0 = 0, \quad \dot{y}_2^0 = 0.3, \quad y_3^0 = -0.2, \quad \dot{y}_3^0 = 0.$$

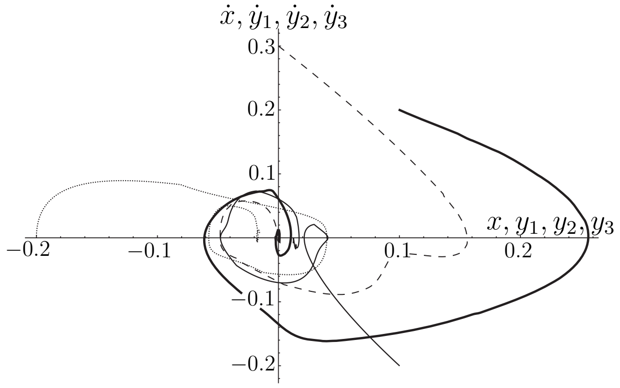

Рис. 1.

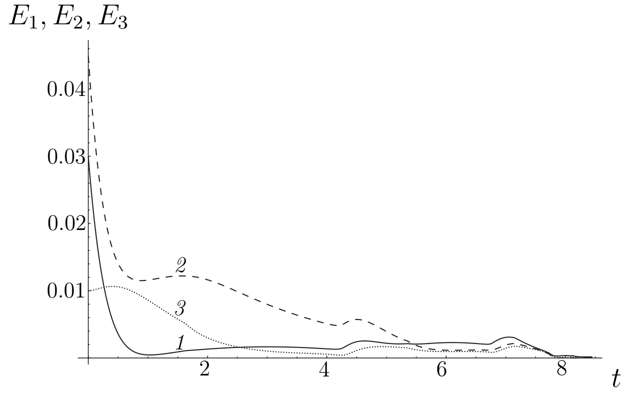

Рис. 2.

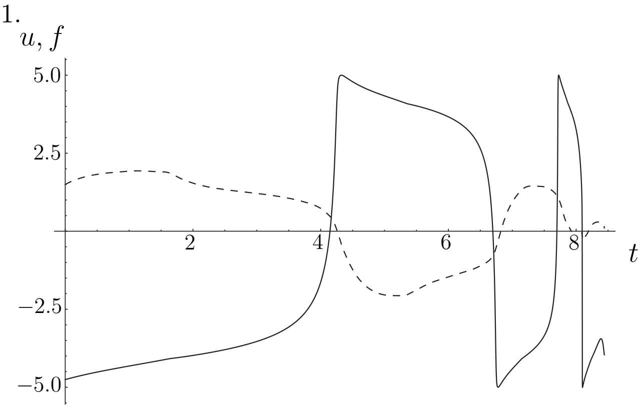

Рис. 3.

Предполагалось, что на систему действует сила сухого трения $\mu(\dot{x}) = -0.5\,\mathrm{sign}(\dot{x})$.

Постоянная d в уравнении (2.2) выбрана равной 1/9. В этом случае согласно (2.3) максимально допустимая величина управляющей силы $u(x,\dot{x})$ ограничена константой $U = 5$.

На рис. 1 представлены фазовые траектории несущего тела (толстая сплошная линия) и 1-го, 2-го и 3-го осцилляторов (тонкая сплошная, штриховая и пунктирная линии соответственно). Через промежуток времени, равный 8.4, несущее тело останавливается в начале координат.

На рис. 2 приведены графики зависимости от времени энергии каждого осциллятора (номера осцилляторов указаны на графиках):

$$E_i(\dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}\left(c_i y_i^2 + m_i(\dot{x} + \dot{y}_i)^2\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

На рис. 3 представлены графики управляющей функции $u(t)$ (сплошная линия) как функции времени, вычисленной вдоль траектории системы, и силы f, действующей со стороны осцилляторов на несущее тело в процессе движения (пунктирная линия).

Заметим, что закон управления (2.1) зависит только от фазовых переменных $x, \dot{x}$ и может быть формально применен при любом поведении осцилляторов. Из графиков, приведенных на рис. 3, видно, что сила f, действующая со стороны осцилляторов на несущее тело, достигает почти половины максимально допустимой величины управления U. Это означает, что для набора параметров системы, выбранного при моделировании, условие (2.4) нарушается. Тем не менее несущее тело приходит в заданное состояние за конечное время, что говорит об эффективности предложенного закона управления в более широком диапазоне параметров и начальных условий, чем те, что удовлетворяют условиям теорем 1 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комплекс технических средств обеспечения контролируемых динамических условий при проведении исследований гравитационно-чувствительных систем / А.Е. Борисов, В.Л. Левтов, В.В. Романов, Н.В. Тарасенко // Космонавтика и ракетостроение. 2007. Т. 4, № 49. С. 168–173.
2. Квазиоптимальное управление поворотом твердого тела вокруг неподвижной оси с учетом трения / Л.Д. Акуленко, Н.Н. Болотник, А.Е. Борисов, А.А. Гавриков, Г.А. Емельянов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 3–21. doi: 10.7868/S0002338815030026 .
3. **Ананьевский И.М., Ишханян Т.А.** Управление поворотной платформой на подвижном основании в присутствии возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. № 2. С. 154–162. doi: 10.7868/S0002338816030045 .
4. **Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.** Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 3. С. 319–323.
5. **Ovseevich A.** A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 165, no. 2. P. 532–544. doi: 10.1007/s10957-014-0636-1 .

Ананьевский Игорь Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
e-mail: anan@ipmnet.ru

Поступила 31.10.2016

Ишханян Тигран Артурович
аспирант
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)
Институт физических исследований НАН РА
e-mail: tishkhanyan@gmail.com

REFERENCES

1. Borisov A.E., Levtov V.L., Romanov V.V., Tarasenko N.V. A set of technical means to ensure the controlled dynamic conditions for investigation of the gravity-sensing system research. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2007, vol. 4, no. 49, pp. 168–173 (in Russian).
2. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Borisov A.E., Gavrikov A.A. Quasi-optimal control of rotation of a rigid body about a fixed axis taking friction into account. *J. Comput. Sys. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 331–348. doi:10.1134/S1064230715030028 .
3. Anan'evskii I.M., Ishkhanyan T.A. Control of a turntable on a mobile base in the presence of perturbations. *J. Comput. Sys. Sci. Int.*, 2016, vol. 55, no. 3, pp. 483–491. doi: 10.1134/S1064230716030047 .
4. Ananievskii I.M., Anokhin I.M., Ovseevich A.I. Bounded feedback controls for linear dynamic systems by using common Lyapunov function. *Dokl. Math.* 2010, vol. 82, no. 2, pp. 831–834. doi: 10.1134/S106456241005039X .
5. Ovseevich A. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 165, no. 2, pp. 532–544. doi:10.1007/s10957-014-0636-1 .

I. M. Anan'evskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia, e-mail: anan@ipmnet.ru

T. A. Ishkhanyan, doctoral student, Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia; Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, 141701, Russian; Institute for Physical Research, National Academy of Sciences of Armenia, Ashtarak-2, 0203, Republic of Armenia, e-mail: tishkhanyan@gmail.com