ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ОДНА НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ[1]

М. С. Никольский

Рассматривается нелинейная динамическая система, в описание которой входит неизвестный векторный параметр. Предполагается, что наблюдатель на отрезке $[0,T]$ может вычислять фазовый вектор системы с некоторой ошибкой, ограниченной по модулю малой величиной $h>0$. Эту информацию о динамике системы желательно использовать для нахождения неизвестного вектора. В статье получены конструктивные достаточные условия, при которых искомый вектор можно восстановить тем точнее, чем меньше величина $h>0$. При этом удается ограничиться дискретными измерениями выхода системы.

Ключевые слова : идентификация, динамические системы, обратные задачи.

M. S. Nikol'skii. A nonlinear identification problem.

We consider a nonlinear dynamic system with an unknown vector parameter in its description. An observer can calculate the phase vector of this system on the interval $[0,T]$ with an error whose modulus does not exceed a small value $h>0$. This information on the dynamics of the system should be used to find the unknown vector. We obtain constructive sufficient conditions under which it is possible to restore the unknown vector with decreasing error as the value of h tends to zero. It turns out that it is sufficient to use discrete measurements of the output of the system.

Keywords: identification, dynamic systems, inverse problems.

MSC: 34K29, 49N45, 93B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-206-211

1. Введение

Задачам идентификации посвящена большая литература. Некоторое представление о задачах идентификации неизвестных параметров для динамических объектов можно получить из [1–3].

В настоящей работе мы рассмотрим одну нелинейную динамическую задачу идентификации векторного параметра. При постановке задачи была использована известная модель теории обратных задач динамики управляемых объектов (см., например, [4]). Вслед за [4] предполагается, что наблюдение за траекторией управляемого объекта ведется на фиксированном отрезке времени $[0,T]$ с малой в евклидовой норме ошибкой. При решении нашей задачи мы не используем методы монографии [4] Это связано с тем, что в монографии [4] идентифицируется неизвестное измеримое управление, а у нас неизвестным является вектор, который можно рассматривать как постоянное управление. Это обстоятельство упрощает решение задачи и позволяет использовать другие подходы. Отметим, что, как и в [4], при построении приближения искомого вектора удается ограничиться конечным числом измерений зашумленного выхода системы на отрезке наблюдения [0,T]. Получена оценка сверху скорости сходимости в евклидовой норме построенного приближения к искомому вектору.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

2. Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим нелинейный управляемый объект вида (см., например, [5; 6]):

$$\dot{x} = f(x,t) + B(t)u. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, векторная функция $f(x,t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ непрерывна по (x,t) при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Delta = [0,T]$ $(T > 0)$, и удовлетворяет условию Липшица вида

$$|f(x',t') - f(x'',t'')| \leqslant L|x' - x''|, \tag{2}$$

где x', x'' — произвольные векторы из $\mathbb{R}^n$, $t \in \Delta$, L — неотрицательная константа; матричная функция $B(t)$ размерности $n \times r$ $(r \geqslant 1)$ непрерывно дифференцируема при $t \in (-\varepsilon, T+\varepsilon)$, ε — некоторая положительная константа. В (1) вектор $u \in \mathbb{R}^r$, причем на него наложено геометрическое ограничение $u \in P$, где P — неодноточечный выпуклый компакт из $\mathbb{R}^r$. Здесь и далее символом $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ обозначается k-мерное действительное евклидово арифметическое пространство со стандартным скалярным произведением векторов $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и со стандартной длиной вектора $|\cdot|$. Элементами $\mathbb{R}^k$ являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов. Для $n \times r$-матрицы M символом $\|M\|$ условимся обозначать операторную норму M.

Пусть фиксированы начальное условие

$$x(0) = x_0 \tag{3}$$

и некоторый вектор $p_0 \in P$. Рассмотрим движение вектора $x(t)$, описываемое уравнением

$$\dot{x} = f(x,t) + B(t)p_0 \tag{4}$$

и начальным условием (3). Наблюдателю считаются известными функции $f(x,t)$, $B(t)$, выпуклый компакт P, вид уравнения (1) и некоторый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$. Ему также известно, что $x_0 \in K$, $p_0 \in P$. Предполагается еще, что при $t \in \Delta$ наблюдателю доступна неточная информация о решении $x(t)$ уравнения (1) с начальным условием (3) вида

$$y(t) = x(t) + \xi(t), \tag{5}$$

где $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ — помеха, про которую известно только, что $|\xi(t)| \leqslant h$; здесь константа $h > 0$, причем она известна наблюдателю.

Целью наблюдателя является приближенное вычисление неизвестного вектора $p_0 \in P$ на основе доступной ему информации. При этом желательно вместо непрерывного наблюдения $y(t)$ при $t \in \Delta$ ограничиться дискретными наблюдениями $y(t_i)$, где $t_i = i\delta$, $\delta = T/N$, $i = 0, \ldots, N-1$, причем $N \geqslant 2$.

В дальнейшем считается выполненным следующее

Условие А. Столбцы $b_1(t), \ldots, b_r(t)$ матрицы $B(t)$, $t \in \Delta$, рассматриваемые как элементы гильбертова пространства векторных функций, суммируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля $L_2[\Delta, n]$, линейно независимы.

Займемся построением вектора $p_{h,\delta} \in P$, аппроксимирующего искомый вектор $p_0 \in P$, здесь $\delta = T/N$, $N \geqslant 2$. Умножим обе части равенства (4) на транспонированную матрицу $B^*(t)$ и проинтегрируем обе части полученного равенства от нуля до T. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$Cp_0 = B^*(T)x(T) - B^*(0)x_0 - \int\limits_0^T \bigl(\dot{B}^*(s)x(s) + B^*(s)f(x(s),s)\bigr)\,ds, \tag{6}$$

где

$$C = \int_0^T B^*(s)B(s)\,ds, \tag{7}$$

$\dot{B}^*(s)$ обозначает производную $\dfrac{d}{ds}\,(B^*(s))$. Матрица C является матрицей Грама для векторных функций $b_1(s), \ldots, b_r(s)$, рассматриваемых как элементы гильбертова пространства суммируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля функций $L_2[\Delta, n]$. В силу условия А для детерминанта симметричной матрицы C мы получаем неравенство $\det C > 0$.

Определим на Δ кусочно-постоянную функцию (см. (5))

$$z_{h,\delta}(t) = y(t_i) \quad \text{при} \quad t \in [t_i, t_{i+1}),$$

где $i = 0, \ldots, N-1$, и положим еще $z_{h,\delta}(T) = y(T)$. Обозначим правую часть формулы (6) через $\mathcal{F}(x(\cdot))$. Заменяя в этом выражении функцию $x(t)$, $t \in \Delta$, на функцию $z_{h,\delta}(t)$, $t \in \Delta$, получим оператор

$$\mathcal{F}_1(z_{h,\delta}(\cdot)) = B^*(T)y(T) - B^*(0)y(0) - \int_0^T \big(\dot{B}^*(s)z_{h,\delta}(s) + B^*(s)f(z_{h,\delta}(s), s)\big)\,ds. \tag{8}$$

Отметим, что в формуле (6) через $x(t)$ обозначено решение уравнения (4) с начальным условием (3). В более развернутой форме

$$x(t) = x(t, x_0, p_0). \tag{9}$$

Займемся оценкой величины

$$\gamma(\delta, h) = \max |\mathcal{F}(x(\cdot, x_0, p_0)) - \mathcal{F}_1(z_{h,\delta}(\cdot))|, \tag{10}$$

где максимум вычисляется по всевозможным $x_0 \in K$, $p_0 \in P$ и всевозможным функциям $\xi(t)$, $t \in \Delta$, причем $|\xi(t)| \leqslant h$.

Обозначим через $x(t, x_0, u)$ решение уравнения (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in K$ и постоянным вектором $u \in P$. Для нас будет полезно оценить сверху величину $\Big|\dfrac{d}{dt}\,x(t, x_0, u)\Big|$ равномерно по $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$. Из (2) получаем для функции $f(x,t)$ оценку вида

$$|f(x,t)| \leqslant L|x| + |f(0,t)|. \tag{11}$$

Обозначим (см. (1))

$$F(x, t, u) = f(x, t) + B(t)u. \tag{12}$$

Положим для краткости

$$\zeta(t) = x(t, x_0, u). \tag{13}$$

Для функции $\zeta(t)$ при $t \in \Delta$ имеем равенство (см. (1), (12), (13))

$$\zeta(t) = x_0 + \int_0^t F(\zeta(s), s, u)\,ds. \tag{14}$$

Обозначим

$$c_1 = \max_{t \in \Delta} |f(0,t)|, \tag{15}$$

$$c_2 = \max_{t \in \Delta, u \in P} |B(t)u|. \tag{16}$$

Тогда из (11)–(16) при $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$ получаем

$$|\zeta(t)| \leqslant c_3 + \int\limits_0^t (L|\zeta(s)| + c_1 + c_2)\, ds,$$

где $c_3 = \max\limits_{x \in K} |x|$. Отсюда с помощью известного неравенства Гронуолла (см., например, [4]) получаем при $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$ равномерную оценку вида

$$|x(t, x_0, u)| \leqslant \alpha, \tag{17}$$

где α — неотрицательная эффективно вычислимая константа. Обозначим далее (см. (12), (17))

$$\max_{\substack{x \in \sigma \\ t \in \Delta, u \in P}} |F(x, t, u)| = \beta,$$

где $\sigma = \{x\colon |x| \leqslant \alpha\}$. Из сказанного вытекает (см. (1), (12)) оценка

$$\Big|\frac{d}{dt}\, x(t, x_0, u)\Big| \leqslant \beta,$$

где $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$. Отсюда мы получаем при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, N-1$, формулу

$$x(t, x_0, u) = x(t_i, x_0, u) + R_i(t, x_0, u), \tag{18}$$

где

$$|R_i(t, x_0, u)| \leqslant \beta\,(t - t_i). \tag{19}$$

Так как

$$z_{h,\delta}(t) = x(t_i, x_0, p_0) + \xi(t_i)$$

при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, N-1$, то на этом полусегменте мы имеем неравенство (см. (18), (19))

$$|x(t, x_0, p_0) - z_{h,\delta}(t)| \leqslant \beta\,(t - t_i) + h. \tag{20}$$

С помощью неравенства (20) нетрудно получить оценку

$$\int\limits_0^T |x(s, x_0, p_0) - z_{h,\delta}(s)|\, ds \leqslant N\beta \frac{\delta^2}{2} + Th = T\Big(\frac{\beta}{2}\,\delta + h\Big), \tag{21}$$

где $\delta = T/N$. Учитывая равномерную ограниченность $\|\dot{B}(s)\|$, $\|B^*(s)\|$ на отрезке Δ, а также липшицевость функции $f(x, t)$ (см. (2)), аналогично неравенству (21) получаем неравенства

$$\int\limits_0^T \|\dot{B}(s)\| \cdot |x(s, x_0, p_0) - z_{h,\delta}(s)|\, ds \leqslant c_4(\delta + h),$$

$$\int\limits_0^T \|B^*(s)\| \cdot |f(x(s, x_0, p_0), s) - f(z_{h,\delta}(s), s)|\, ds \leqslant c_5(\delta + h),$$

где c_4, c_5 — эффективно вычислимые константы. На основании сказанного получаем следующую оценку величины $\gamma(\delta, h)$ (см. (10)):

$$\gamma(\delta, h) \leqslant c_6(\delta + h), \tag{22}$$

где c_6 — эффективно вычислимая константа. Отметим, что (см. (6), (7)) $p_0 = C^{-1}\mathcal{F}(x(\cdot, x_0, p_0))$. Обозначим (см.(7),(8))

$$q_{\delta,h} = C^{-1}\mathcal{F}_1(z_{h,\delta}(\cdot)).$$

С помощью формул (10), (22) мы приходим к неравенству

$$|p_0 - q_{\delta,h}| \leqslant c_6\|C^{-1}\|(\delta + h). \tag{23}$$

Отметим, что вектор $q_{\delta,h}$ не обязательно принадлежит P. Обозначим через $p_{\delta,h}$ наиближайшую точку к $q_{\delta,h}$ в P. Так как P — выпуклый компакт, то вектор $p_{\delta,h}$ определен однозначным образом. С помощью неравенства $|p_0 - p_{\delta,h}| \leqslant |p_0 - q_{\delta,h}| + |q_{\delta,h} - p_{\delta,h}|$ и неравенства (23) получаем оценку скорости сходимости вектора $p_{\delta,h}$ к искомому вектору p_0 вида

$$|p_0 - p_{\delta,h}| \leqslant 2c_6\|C^{-1}\|(\delta + h). \tag{24}$$

Специально остановимся на случае, когда матрица $B(t)$ на Δ не зависит от t. Обозначим ее B_0. Условие A в этом случае означает, что столбцы матрицы B_0 линейно независимы, т. е. $r \leqslant n$, $\operatorname{rank} B_0 = r$, $C = TB_0^*B_0$ (см. (7)) и вместо (6) мы получаем более простую формулу

$$Cp_0 = B_0^*\left(x(T) - x_0 - \int_0^T f(x(s), s)\, ds\right).$$

Отметим также, что в рассматриваемой ситуации при $\operatorname{rank} B_0 = r$ непосредственно из формулы (4) можно обосновать для p_0 следующую формулу:

$$p_0 = T^{-1}B_0^+\left(x(T) - x_0 - \int_0^T f(x(s), s)\, ds\right),$$

где B_0^+ означает псевдообратную для B_0 матрицу (см. определение и свойства, например, в [7]).

Из сказанного выше вытекает

Утверждение. Предложенный в статье дискретный способ использования текущей неточной информации о траектории системы (1) позволяет вычислить искомый вектор p_0 с точностью вида (24). Здесь δ — величина шага квантования измерений функции $y(t)$, h — оценка точности измерений $x(t)$ (см. (5)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Габасов Р., Кириллова Ф.** Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
2. **Гроп Д.** Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
3. **Куржанский А.Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
4. **Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 238 с.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
6. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 р.
7. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 р.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник МИАН РАН
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 7.10.2016

REFERENCES

1. Gabasov R. Kirillova F. *The qualitative theory of optimal processes.* New York: Dekker, 1976, 640 p. Original Russian text published in *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1971, 508 p.
2. Graupe D. *Identification of systems.* Huntington, New York, Robert E. Krieger Publ., 1976, 287 p. Translated under the title *Metody identifikatsii sistem*, Moscow, Mir Publ., 1979, 302 p.
3. Kurzhanskii A.B. The identification problem – the theory of guaranteed estimates. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 4, pp. 447–465.
4. Osipov Yu.S., Vasiljev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* [Basics of dynamic regularization method]. Moscow, MGU Publ., 1999, 238 p.
5. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
6. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1967, 589 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
7. Gantmakher F.R. *The theory of matrices*, 2 volumes, 2nd ed., transl. by K.A. Hirsch, New York: Chelsea Publishing Co., 1989; 1990, 276 p; 374 p.

M. S. Nikol'skii. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russian, e-mail: mni@mi.ras.ru