ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

В. И. Максимов

Рассматривается задача управления системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее суть состоит в построении процедуры формирования управления в виде обратной связи, обеспечивающего отслеживание скоростью изменения части фазовых координат заданной системы скорости изменения части фазовых координат другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Предполагается, что измеряется часть фазовых координат каждой из заданных систем. Измерения происходят с ошибкой в дискретные моменты времени. В работе предлагается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения указанной задачи. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления методе экстремального сдвига. В связи с неполнотой информации о фазовых координатах “классический” экстремальный сдвиг применить не удается. Поэтому в работе предложена его модификация. Эта модификация использует элементы теории динамического обращения. Последняя основана на конструкциях теории некорректных задач. В заключительной части статьи указывается класс нелинейных по фазовым координатам систем, для которого применим описанный в работе алгоритм.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы.

V. I. Maksimov. On a control problem for a linear system with measurements of a part of phase coordinates.

We consider a control problem for a system of linear ordinary differential equations. It is required to design a feedback control procedure under which the velocity of a part of the phase coordinates of the system would track the velocity of a part of the phase coordinates of another system, which is subject to an unknown perturbation. It is assumed that a part of phase coordinates of each of the systems is measured with error at discrete times. We propose a solution algorithm that is stable to informational disturbances and computation errors. The algorithm is based on the extremal shift method known in the theory of guaranteed control. Since it is impossible to apply the “classical” extremal shift due to the incompleteness of the information on the phase coordinates, we propose a modification of this method that employs elements of the dynamic inversion theory. The latter is based on constructions from the theory of ill-posed problems. In the concluding section of the paper, we specify a class of systems nonlinear in the phase coordinates for which the algorithm is applicable.

Keywords: control, incomplete information, linear systems.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-195-205

Введение

В статье рассматривается задача отслеживания скорости изменения части фазовых координат линейных дифференциальных уравнений, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Методы решения задач слежения излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления [1–7]. Исследуемая в настоящей работе постановка имеет одну особенность. Предполагается, что в дискретные моменты времени измеряются (с ошибкой) не все, а лишь часть текущих фазовых состояний заданной системы. Это предположение ведет к невозможности точного отслеживания соответствующей скорости изменения. Учитывая данную особенность обсуждаемой задачи, мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм ее приближенного решения, который основан на известном в теории позиционных дифференциальных игр методе экстремального сдвига. Прототипы рассматриваемой нами задачи для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследовались в [8; 9]. При этом во всех указанных выше работах требовалось отследить соответствующие фазовые траектории. В данной работе, в отличие от [8; 9], мы обсуждаем задачу отслеживания не самой траектории, а скорости изменения части фазовых координат. Другие задачи отслеживания скорости изменения систем дифференциальных уравнений обсуждались в работах [10; 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему с возмущением, описываемую следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + By(t) + Cu(t) + f_1(t), \\ \dot{y}(t) &= A_1x(t) + B_1y(t) + f_2(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

с начальным состоянием $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Здесь $t \in T = [0, \vartheta] \quad (0 < \vartheta < \infty)$ — переменная времени, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ и $u(t) \in \mathbb{R}^q$ — соответственно фазовое состояние системы и значение динамического возмущения в момент t; A, B, A_1, B_1 и C — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Функции $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ заданы априори и обладают следующими свойствами: функция $f_1(\cdot)$ принадлежит пространству $L_2(T; \mathbb{R}^n)$, а функция $f_2(\cdot)$ дифференцируема, и ее производная является элементом пространства $L_\infty(T; \mathbb{R}^r)$.

Содержательно рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом. Наряду с системой (1.1) имеется еще одна система того же вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^h(t) &= Aw_1^h(t) + Bw_2^h(t) + Cv^h(t) + f_1(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= A_1w_1^h(t) + B_1w_2^h(t) + f_2(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

с начальным состоянием

$$w_1^h(0) = w_{10}^h, \quad w_2^h(t) = w_{20}^h.$$

Структура систем (1.1) и (1.2), т. е. их правые части, а также начальные состояния известны. На систему (1.1) действует возмущение $u = u(t) \in P$. Здесь $P \subset \mathbb{R}^q$ — ограниченное, замкнутое множество — “ресурсы” возмущения. Как возмущение $u(\cdot)$ (измеримая по Лебегу функция со значениями в P), так и порождаемое им решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\} = \{x(\cdot; 0, x_0, y_0, u(\cdot)), y(\cdot; 0, x_0, y_0, u(\cdot))\}$ системы (1.1) неизвестны. На промежутке времени T выбрана равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$ с шагом δ. В моменты времени τ_i измеряются (с ошибкой) векторы $y(\tau_i)$. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leq h, \tag{1.3}$$

где $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерения. В дальнейшем символ $|\cdot|_r$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^r$, а символ $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ — фазовую траекторию системы (1.1), порожденную неизвестным возмущением $u(\cdot)$. Обсуждаемая задача состоит в конструировании такого закона формирования управления системой (1.2) по принципу обратной связи

$$v^h(t) = v^h(\tau_i, \xi_i^h, w_2^h(\tau_i)) \in P, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1],$$

что скорость изменения координаты $w_2^h(\cdot)$ системы (1.2), т. е. $\dot{w}_2^h(\cdot)$, приближает (в равномерной метрике) скорость изменения координаты $y(\cdot)$ системы (1.1), т. е. $\dot{y}(\cdot)$, каково бы ни было неизвестное возмущение $u = u(\cdot)$. Ниже полагаем $w_{20}^h = \xi_0^h$, $w_{10}^h = \tilde{x}_0$, где

$$|\tilde{x}_0 - x_0|_n \leq h.$$

Таким образом, мы считаем, что начальное состояние системы (1.1) известно приближенно. Именно вместо векторов x_0, y_0 мы знаем векторы $\tilde{x}_0$ и ξ_0^h.

Выбор закона управления, т. е. способа изменения параметра $v^h(t)$, находится в руках некоторого — будем пользоваться терминологией теории позиционных дифференциальных игр [1; 2] — "игрока". "Игрок" должен выбирать этот закон таким образом, чтобы обеспечить указанное выше свойство движения при любой возможной реализации возмущения $u = u(t)$. Подчеркнем, что природа возмущения u нам безразлична. Это может быть программное управление или формируемое кем-то по принципу обратной связи, из каких-либо соображений, позиционное управление. Необходимо лишь выполнение двух условий: во-первых, реализация $ut)$ должна быть измеримой (по Лебегу) функцией на промежутке T, а во-вторых, она должна удовлетворять включению: $u(t) \in P$ при п. в. $t \in T$.

В настоящей работе излагается алгоритм решения описанной выше задачи, который основан на известном в теории позиционного управления принципе экстремального сдвига [1]. В связи с неполнотой информации, а именно с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_i), y(\tau_i)\}$, а лишь его части — $y(\tau_i)$, непосредственное применение принципа экстремального сдвига в том виде, как он приведен в монографии [1], не представляется возможным.

Заметим, что основы теории позиционного управления были заложены в [1–4]. Однако в этих работах обсуждались проблемы гарантированного управления в случаях измерения с ошибкой всего фазового состояния (т. е. при "полной" информации о фазовых траекториях). В данной работе исследуется задача об отслеживании скорости изменения фазовой траектории системы при измерении лишь части фазового состояния (измерении части координат). Следует отметить, что в случае, когда измеряются (в моменты τ_i) все фазовые координаты, задача отслеживания решений тех или иных уравнений с позиций подхода цитированных выше работ была исследована в [12–15] как для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для распределенных уравнений первого или второго порядков. В настоящей работе, в отличие от указанных выше работ, мы рассматриваем задачу отслеживания не решения, а скорости его изменения.

2. Вспомогательные результаты

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи приведем одну леммму, которая нам понадобится в дальнейшем. Фиксируем семейство разбиений промежутка T – $\{\Delta_h\}_{h\in(0,1)}$, где

$$\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{i,h} \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \delta = \delta(h).$$

Введем вспомогательную управляемую систему, описываемую векторным линейным дифференциальным уравнением ($w_0^h \in \mathbb{R}^r$, $v_*^h \in \mathbb{R}^r$) вида

$$\dot{w}_0^h(t) = v_*^h(t) \tag{2.1}$$

с управлением $v_*^h(t)$. Ее начальное состояние

$$w_0^h(0) = \xi_0^h.$$

Пусть взята некоторая функция $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to \ (0,1)$. Положим

$$v_*^h(t) = -\frac{1}{\alpha}(w^h(\tau_i) - \xi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1]. \tag{2.2}$$

В уравнении (2.1) управление $v_*^h(t)$ зададим по правилу (2.2). Следовательно, управление $v_*^h(\cdot)$ в системе (2.1) будет находиться по принципу обратной связи

$$v_*^h(t) = v_*^h(\tau_i; w_0^h(\tau_i), \xi_i^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

В таком случае система (2.1) примет вид

$$\dot{w}_0^h(t) = -\frac{1}{\alpha}(w_0^h(\tau_i) - \xi_i^h) \quad \text{при п.в. } t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m-1].$$

Фиксируем число $\gamma \in (0,1)$. В дальнейшем нам понадобится

Условие 1. Выполнены следующие соотношения

$$\delta = \delta(h) \to 0, \quad \alpha = \alpha(h) \to 0, \quad \frac{h+\delta(h)}{\alpha(h)} \to 0, \quad \delta^{-\gamma}(h)\alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Пусть

$$\tilde{v}^h(t) = \begin{cases} A_1\tilde{x}_0 + B_1\xi_0^h + f_2(0), & \text{если} \quad t \in [0, \delta^\gamma), \\ v_*^h(t), \quad \text{если} \quad t \in [\delta^\gamma, \vartheta]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда при всех* $t \in T$ *верно неравенство*

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le \varphi(\alpha, \delta) = d(\alpha + (h+\delta)\alpha^{-1} + \alpha\delta^{-\gamma} + \delta^\gamma).$$

При этом имеет место сходимость

$$\varphi(\alpha(h), \delta(h)) \to 0 \quad \text{\textit{при} } h \to 0.$$

Здесь и всюду ниже $d, d_0, d_1, \ldots$, а также $c_*, c, c_1, c_2 \ldots$ означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Доказательство. Анализ доказательства теоремы 5 из работы [16] позволяет сделать вывод, что при выполнении неравенств (1.3) при всех $t \in T$ справедливо неравенство

$$\Big|\frac{1}{\alpha}(w_0^h(\tau_i) - y(\tau_i)) - \dot{y}(t)\Big|_r \le d_0\Big(\frac{h+\delta}{\alpha} + \alpha\Big) + d_1 e^{-t\alpha^{-1}}|\dot{y}(0)|_r. \tag{2.4}$$

При выводе этого неравенства учитывается тот факт, что $\dot{f}_2(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^r)$. Заметим, что

$$\dot{y}(0) = A_1x_0 + B_1y_0 + f_2(0).$$

Следовательно,

$$\big|\dot{y}(0) - (A_1\tilde{x}_0 + B_1\xi_0^h + f_2(0))\big|_r \le d_2 h. \tag{2.5}$$

Кроме того,

$$e^{-\delta^\gamma/\alpha} \le \alpha\delta^{-\gamma}. \tag{2.6}$$

Учитывая (2.3), (2.5), получаем

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le d_3(\delta^\gamma + h) \quad \text{при } t \in [0, \delta^\gamma], \tag{2.7}$$

ибо $\dot{y}(\cdot)$ — липшицевая функция. Поэтому при $t \in [0, \delta^\gamma]$ справедливо неравенство

$$|\dot{y}(t) - \dot{y}(0)|_r \le d_4 t \le d_4\delta^\gamma.$$

В свою очередь, при $t \in [\delta^\gamma, \vartheta]$

$$e^{-t/\alpha} \le e^{-\delta^\gamma/\alpha}. \tag{2.8}$$

Из (2.4), (2.8) выводим

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le d_1\Big(\frac{h+\delta}{\alpha} + \alpha\Big) + d_2 e^{-t\alpha^{-1}}|\dot{y}(0)|_r \quad \text{при } t \in [\delta^\gamma, \vartheta].$$

Утверждение леммы вытекает из (2.6), (2.7) и последнего неравенства. Лемма доказана.

Замечание 1. Как следует из результатов работы [16], в случае, когда $\dot{y}(0) = 0$, т. е. $A_1x_0 + B_1y_0 + f_2(0) = 0$, можно полагать

$$\tilde{v}^h(t) = v_*^h(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

При этом при всех $t \in T$ имеет место неравенство

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le d\big(\alpha + (h+\delta)\alpha^{-1}\big).$$

3. Алгоритм решения

Перейдем к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. При этом мы организуем процесс синхронного управления системами (1.2) и (2.1).

До начала работы алгоритма фиксируем величину h, числа $\gamma \in (0,1)$ и $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются функция $\tilde{v}^h(t), t \in \delta_i$ и вектор v_i^h по формуле

$$v_i^h = \arg\max\{(\tilde{S}_h(\tau_i), A_1 C v) \colon v \in P\}, \tag{3.1}$$

где символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве,

$$\tilde{S}_h(\tau_i) = \tilde{v}^h(\tau_i) - \dot{w}_2^h(\tau_i) - A_1 e^{A\tau_i}(x_0 - \tilde{x}_0) - B_1 \xi_i^h + B_1 w_2^h(\tau_i).$$

Затем на вход системы (1.2) в течение промежутка δ_i подается постоянное управление $v^h(t) = v_i^h$, а на вход системы (2.1)–управление $v_*^h(t)$. В результате под действием этого управления система (1.2) переходит из состояния $\{w_1^h(\tau_i), w_2^h(\tau_i)\}$ в состояние $\{w_1^h(\tau_{i+1}), w_2^h(\tau_{i+1})\}$, а система (2.1)– из состояния $w_0^h(\tau_i)$ в состояние $w_0^h(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

В дальнейшем нам потребуется

У с л о в и е 2. Существует матрица A_* размерности $r \times r$ такая, что $A_1 A = A_* A_1$.

Это условие выполняется, например, когда $A_1 = A_0^*$ и $A_1 A = A_0^+$, где A_0 — некоторая матрица, A_0^+ — псевдообратная для A_0 матрица, A_0^* — транспонированная матрица.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma = 1/6$, $\alpha(h) = \delta^{1/3}(h)$ *и выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда при всех* $t \in T$ *верно неравенство*

$$|\dot{y}(t) - \dot{w}_2^h(t)|_r \le \nu(h),$$

где $\nu(h) \to 0$ *при* $h \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$\varepsilon(t) = \big|\dot{y}(t) - \dot{w}_2^h(t) - A_1 e^{At}(x_0 - \tilde{x}_0) - B_1(y(t) - w_2^h(t))\big|_r^2.$$

Воспользовавшись формулой Коши $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(By(s) + Cu(s) + f_1(s))\,ds$, из (1.1) получим

$$\dot{y}(t) = A_1 e^{At} x_0 + A_1 \int\limits_0^t e^{A(t-s)}\big(By(s) + Cu(s) + f_1(s)\big)\,ds + B_1 y(t) + f_2(t). \tag{3.2}$$

Аналогично, учитывая (1.2), имеем

$$\dot{w}_2^h(t) = A_1 e^{At}\tilde{x}_0 + A_1 \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(Bw_2^h(s) + Cv^h(s) + f_1(s))\,ds + B_1 w_2^h(t) + f_2(t). \tag{3.3}$$

Оценим изменение величины $\varepsilon(t)$. Заметим, что $\varepsilon(t) = \big|A_1 S_h(t)\big|_r^2$, где

$$S_h(t) = \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\big(B(y(\tau) - w_2^h(\tau)) + C(u(\tau) - v^h(\tau))\big)\,d\tau. \tag{3.4}$$

В силу (3.2), (3.3) справедливо равенство

$$A_1 S_h(t) = \dot{y}(t) - \dot{w}_2^h(t) - A_1 e^{At}(x_0 - \tilde{x}_0) - B_1(y(t) - w_2^h(t)), \quad t \in T.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = |A_1 e^{A\delta} S_h(\tau_i)|_r^2 + \mu_i + \nu_i, \tag{3.5}$$

где

$$\mu_i = 2\biggl(A_1 e^{A\delta} S_h(\tau_i),\ A_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}\bigl(B(y(\tau) - w_2^h(\tau)) + C(u(\tau) - v^h(\tau))\bigr)\, d\tau\biggr),$$

$$\nu_i = \biggl|A_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}\bigl(B(y(\tau) - w_2^h(\tau)) + C(u(\tau) - v^h(\tau))\bigr)\, d\tau\biggr|_r^2.$$

Для любого $\delta_* \in (0,1)$ можно указать такое $c_* = c_*(\delta_*)$, что при всех $\delta \in (0,\delta_*)$ имеет место неравенство

$$\|e^{A\delta} - (E + A\delta)\| \le c_* \delta^2.$$

Здесь символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму матрицы, а символ E — единичную матрицу соответствующей размерности. Поэтому $|A_1 e^{A\delta} x - A_1 E x|_r \le |A_1 A \delta x|_r + c_0 \delta^2 |x|_n$. В силу условия 2

$$|A_1 A \delta x|_r = |A_* A_1 \delta x|_r \le c_1 \delta |A_1 x|_r.$$

Значит,

$$\begin{aligned} |A_1 e^{A\delta} S_h(\tau_i) - A_1 S_h(\tau_i)|_r &\le \delta |A_* A_1 S_h(\tau_i)|_r + c_0 \delta^2 |S_h(\tau_i)|_n \\ &\le \delta c_2 \varepsilon^{1/2}(\tau_i) + c_0 \delta^2 |S_h(\tau_i)|_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Поэтому по δ_* можно указать числа $c_3, c_4 \in (0,\infty)$ такие, что при всех $\delta \in (0,\delta_*)$ и всех $i \in [1:m]$ верно неравенство

$$|A_1 e^{A\delta} S_h(\tau_i)|_r^2 \le (1 + c_3\delta)\varepsilon(\tau_i) + c_4 \delta^2 |S_h(\tau_i)|_n^2. \tag{3.7}$$

Заметим, что справедливы соотношения

$$|y(t)|_r \le c_5 \biggl(1 + \int\limits_0^t |u(\tau)|_q\, d\tau\biggr), \quad |w_2^h(t)|_r \le c_6 \biggl(1 + \int\limits_0^t |v^h(\tau)|_q\, d\tau\biggr).$$

В таком случае при всех $i \in [0:m]$ (см. (3.4))

$$|S_h(\tau_i)|_n \le c_7 \biggl[1 + \int\limits_0^{\tau_i} \bigl(|v^h(\tau)|_q + |u(\tau)|_q\bigr)\, d\tau\biggr]. \tag{3.8}$$

Кроме того, учитывая неравенство $|\tilde{x}_0 - x_0|_n \le h$, имеем

$$\nu_i \le c_8 \delta \biggl[h^2 \delta + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|v_i^h|_q^2 + |u(\tau)|_q^2)\, d\tau + \delta \int\limits_0^{\tau_{i+1}} (|\dot{y}(\tau) - \dot{w}_2^h(\tau)|_r^2)\, d\tau\biggr]. \tag{3.9}$$

В свою очередь в силу (3.6) верны неравенства

$$\mu_i \le \varrho_i + 2\biggl(A_1 S_h(\tau_i), A_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{A(\tau_{i+1}-\tau)} B(y(\tau) - w_2^h(\tau))\, d\tau\biggr)$$

$$+ \, (\delta c_2 \varepsilon^{1/2}(\tau_i) + c_0\delta^2|S_h(\tau_i)|_n)\bigg|A_1 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}\big(B(y(\tau) - w_2^h(\tau)) + C(u(\tau) - v_i^h)\big)\, d\tau\bigg|_r,$$

где $\varrho_i = 2\Big(A_1S_h(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} A_1C(u(\tau) - v_i^h)d\tau\Big)$. Следовательно,

$$\mu_i \le \nu_{1i} + \varrho_i + \nu_{2i} + \nu_{3i}. \tag{3.10}$$

Здесь

$$\nu_{1i} = c_9\delta(\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta|S_h(\tau_i)|_n) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y(\tau) - w_2^h(\tau)|_r \, d\tau,$$

$$\nu_{2i} = c_{10}\delta(\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta|S_h(\tau_i)|_n) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u(\tau)|_q + |v_i^h|_q)\, d\tau, \quad \nu_{3i} = c_{11}\varepsilon^{1/2}(\tau_i)\delta \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u(\tau)|_q + |v_i^h|_q)\, d\tau.$$

Далее, имеем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y(\tau) - w_2^h(\tau)|_r d\tau \le c_{11}\delta\Big(h + \int\limits_{0}^{\tau_{i+1}} |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r d\tau\Big).$$

Учитывая (3.8), а также последнее неравенство, выводим

$$\nu_{1i} \le c_{12}\delta^2\Big[\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta\Big(1 + \int\limits_0^{\tau_i} \big(|u(\tau)|_q + |v^h(\tau)|_q\big)\, d\tau\Big)\Big]\Big(h + \int\limits_0^{\tau_{i+1}} |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r d\tau\Big)$$

$$\le c_{13}\delta\varepsilon(\tau_i) + c_{14}\delta^2 \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \big(|\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r^2\big)\, d\tau + c_{15}\delta^3\Big(1 + \int\limits_0^{\tau_i} \big(|u(\tau)|_q^2 + |v^h(\tau)|_q^2\big)\, d\tau + h^2\delta^2\Big), \tag{3.11}$$

$$\nu_{2i} \le c_{16}\delta\varepsilon(\tau_i) + c_{17}\delta^2 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \big(|u(\tau)|_q^2 + |v_i^h|_q^2\big)\, d\tau + c_{18}\delta^3\Big(1 + \int\limits_0^{\tau_i} \big(|u(\tau)|_q^2 + |v^h(\tau)|_q^2\big)\, d\tau\Big),$$

$$\nu_{3i} \le c_{19}\delta\varepsilon(\tau_i) + c_{20}\delta^2 \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \big(|u(\tau)|_q^2 + |v_i^h|_q^2\big)\, d\tau. \tag{3.12}$$

Обозначим

$$\chi_i^h(u, v^h) \equiv 2\Big(A_1S_h(\tau_i) - \tilde S_h(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} A_1C(u(\tau) - v_i^h)\, d\tau\Big).$$

Легко видеть, что ввиду (3.1) справедлива оценка

$$\varrho_i \le 2\Big(\tilde S_h(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} A_1C(u(\tau) - v_i^h)\, d\tau\Big) + \chi_i^h(u, v^h) \le \chi_i^h(u, v^h). \tag{3.13}$$

Кроме того, в силу леммы 1 имеет место соотношение

$$|\tilde v^h(\tau_i) - \dot y(\tau_i)|_r \le \varphi(\alpha, \delta). \tag{3.14}$$

В таком случае

$$|A_1S_h(\tau_i) - \tilde S_h(\tau_i)|_r \le \varphi(\alpha, \delta).$$

Поэтому, каково бы ни было число $\beta \in (0,1)$, верно неравенство

$$|\chi_i^h(u, v^h)| \le c_{21}\varphi(\alpha,\delta)\left(\delta|v_i^h|_q + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u(\tau)|_q\,d\tau\right)$$

$$\le c_{22}\biggl(\delta^\beta\varphi^2(\alpha,\delta) + \delta^{2-\beta}|v_i^h|_q^2 + \delta^{1-\beta}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u(\tau)|_q^2\,d\tau\biggr). \tag{3.15}$$

В таком случае из (3.9)–(3.15) получаем

$$\mu_i + \nu_i \le c_{23}\delta\varepsilon(\tau_i) + \pi_i^h, \tag{3.16}$$

где

$$\pi_i^h = c_{24}\biggl[\delta^3\biggl(1 + \int\limits_0^{\tau_i} \bigl(|u(\tau)|_q^2 + |v^h(\tau)|_q^2\bigr)\,d\tau\biggr)$$

$$+\ \delta^{1-\beta}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bigl(|u(\tau)|_q^2 + |v_i^h|_q^2\bigr)\,d\tau + \delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r^2\,d\tau + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^\beta + h^2\delta\biggr].$$

Из (3.5), (3.7), (3.8) и (3.16) выводим

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \le (1 + c_{25}\delta)\varepsilon(\tau_i) + c_{26}\pi_i^h. \tag{3.17}$$

В свою очередь, из (3.17) стандартным образом получаем $\varepsilon(\tau_i) \le c_{27}\bigl(\delta^{1-\beta} + h^2 + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^{\beta-1}\bigr)$. Учитывая правило определения $\varepsilon(\cdot)$, а также неравенство $|x_0 - w_{10}^h|_n \le h$, заключаем, что в силу последнего неравенства при всех $t \in T$ верна оценка

$$|\dot y(t) - \dot w_2^h(t)|_r^2 \le c_{28}\bigl(\delta^{1-\beta} + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^{\beta-1} + h^2\bigr) + c_{29}\int\limits_0^t |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r^2\,d\tau.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, отсюда выводим

$$|\dot y(t) - \dot w_2^h(t)|_r^2 \le c_{30}(\delta^{1-\beta} + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^{\beta-1} + h^2).$$

Заметим, что

$$\delta^{\beta-1}\varphi^2(\delta,\alpha) \le c_{31}\delta^{\beta-1}\Bigl(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\delta^\gamma} + \delta^\gamma\Bigr)^2 \le c_{32}\Bigl(\frac{\delta^{1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{\delta^{\beta-1}\alpha^2}{\delta^{2\gamma}} + \delta^{\beta+2\gamma-1}\Bigr). \tag{3.18}$$

Пусть $\alpha = \delta^\mu$, где $\mu \in (0,1)$ — некоторое число. Тогда правая часть неравенства (3.18) будет стремиться к нулю при $h \to 0$, если выполнены неравенства

$$1 + \beta - 2\mu > 0, \quad \beta + 2\mu - 1 - 2\gamma > 0, \quad \beta + 2\gamma - 1 > 0, \quad \mu - \gamma > 0. \tag{3.19}$$

Положим $\mu = 1/3$. Тогда неравенства (3.19) примут вид

$$\frac{1}{3} + \beta > 0, \quad \beta - \frac{1}{3} - 2\gamma > 0, \quad \beta + 2\gamma > 1, \quad \gamma < \frac{1}{3}. \tag{3.20}$$

Как нетрудно видеть, неравенства (3.20) выполняются, если $\beta - 2\gamma > 1/3$, $\beta + 2\gamma > 1$. В свою очередь, последние неравенства верны, когда, например, $\beta = 3/4$, $\gamma = 1/6$. Теорема доказана.

Пусть наряду с условиями 1 и 2 выполнено

У с л о в и е 3. $\operatorname{rank}(A_1 C) = q$.

В этом случае размерность компоненты y фазового вектора системы (1.1) не меньше размерности возмущения u, т. е. $r \geq q$. Тогда можно указать число $m_* > 0$ такое, что для любого возмущения $u(t) \in P$ при п.в. $t \in T$ при всех $t \in T$ верны неравенства

$$\Big| A_1 C \int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau \Big|_r \geq m_* \varphi_u(t), \tag{3.21}$$

где $\varphi_u(t) = \Big| \int_0^t u(\tau)\, d\tau \Big|_q$. Проинтегрировав по частям, будем иметь

$$\gamma_{u,v^h}(t) \equiv A_1 \int\limits_0^t e^{A(t-s)} C(u(s) - v^h(s))\, ds = A_1 e^{A(t-s)} C \int\limits_0^s (u(\tau) - v^h(\tau))\, d\tau \Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$+ \int\limits_0^t \Big(A_1 A e^{A(t-s)} \int\limits_0^s (u(\tau) - v^h(\tau))\, d\tau \Big) ds. \tag{3.22}$$

Следовательно, учитывая (3.21), (3.22), выводим оценку

$$m_* \varphi_{u-v^h}(t) \leq \Big| A_1 C \int\limits_0^t (u(\tau) - v^h(\tau))\, d\tau \Big|_r \leq |\gamma_{u,v^h}(t)|_r + \int\limits_0^t \psi(t,s) \varphi_{u-v^h}(s)\, ds, \tag{3.23}$$

где

$$\psi(t,s) = \| A_1 A e^{A(t-s)} \|, \quad \varphi_{u-v^h}(t) = \Big| \int\limits_0^t (u(\tau) - v^h(\tau))\, d\tau \Big|_q .$$

В силу теоремы 1 имеет место неравенство

$$\sup_{t \in T} |\gamma_{u,v^h}(t)|_r \leq c_* \nu(h). \tag{3.24}$$

Из (3.23), (3.24) воспользовавшись неравенством Гронуолла, получаем

$$\sup_{t \in T} \Big| \int\limits_0^t (u(\tau) - v^h(\tau))\, d\tau \Big|_q \leq \mu(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{3.25}$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–3. *Тогда имеет место сходимость* (3.25).

Из теоремы 2 вытекает

С л е д с т в и е. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда $v^h(\cdot) \to u(\cdot)$ слабо в $L_2(T; \mathbb{R}^q)$ при $h \to 0$.

З а м е ч а н и е 2. Анализ приведенного выше доказательства теоремы 1 позволяет сделать вывод, что утверждение теоремы остается справедливым для нелинейных систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(y(t)) + Cu(t) + f_1(t),$$
$$\dot{y} = A_1 x(t) + B_1(y(t)) + f_2(t),$$

если $B(\cdot)$ и $B_1(\cdot)$ — липшицевые функции. В этом случае система (1.2) имеет вид

$$\dot{w}_1^h(t) = A w_1^h(t) + B(w_2^h(t)) + C u^h(t) + f_1(t),$$
$$\dot{w}_2^h(t) = A_1 w_1^h(t) + B_1(w_2^h(t)) + f_2(t),$$

а векторы $\tilde{S}_h(\tau_i)$ вычисляются по формуле

$$\tilde{S}_h(\tau_i) = \tilde{v}^h(\tau_i) - \dot{w}_2^h(\tau_i) - A_1 e^{A\tau_i}(x_0 - \tilde{x}_0) - B_1(\xi_i^h) + B_1(w_2^h(\tau_i)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 656 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981, 288 с.
5. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
6. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, № 6. С. 345–356.
7. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных игра: препринт / Ин-т математики и механики УрО РАН. 2004. 80 с.
8. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.
9. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
10. **Максимов В.И.** О компенсации возмущений в нелинейных управляемых системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С. 62–68.
11. **Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L.** A recursive deconvolution approach to disturbance reduction // IEEE Trans. Aut. Contr. 2004. Vol. 49, no. 6. P. 907–921. doi: 10.1109/TAC.2004.829596 .
12. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 40–48.
13. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме отслеживания решения параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 366–375.
14. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 218–230.
15. **Максимов В.И.** Об отслеживании предписанного решения нелинейного распределенного уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 128–131.
16. **Максимов В.И.** О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 28.10.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamic system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
3. *Izbrannye trudy Yu.S. Osipova* [Selected Works by Yu.S. Osipov]. Moscow: MSU Publ. 2009, 656 p.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of a guarantee in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981. 288 p.
5. Ushakov V.N. On the problem of stable bridges construction in the differential game of pursuit-evasion. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekhn. Kibernet.*, 1980, no. 4, pp. 29–36 (in Russian).
6. Barabanova N.N. Subbotin A.I. On classes of strategies in differential games of evasion of contact. *J. Appl. Math. Mech.*, 1972, vol. 35, no. 3, pp. 349–356.

7. Patsko V.S. *Poverhnosti perekljuchenija v linejnyh differencial'nyh igra* [Switching surfaces in linear differential games]. Preprint, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2004. 80 p.
8. Maksimov V.I. The tracking of the trajectory of a dynamical system. *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 667–674. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.01.007 .
9. Kryazhimskiy A.V., Maksimov V.I. Resource-saving tracking problem with infinite time horizon. *Diff. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 7. pp. 1004–1013. doi: 10.1134/S001226611107010X .
10. Maksimov V.I. Compensation of disturbances in non-linear control systems. *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 2, pp. 220–226.
11. Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L. A recursive deconvolution approach to disturbance reduction. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 2004, vol. 49, no. 6, pp. 907–921. doi: 10.1109/TAC.2004.829596 .
12. Maksimov V.I. On tracking solutions of parabolic equations. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 35–42. doi: 10.3103/S1066369X12010057 .
13. Maksimov V.I. Algorithm for shadowing the solution of a parabolic equation on an infinite time interval. *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 362–371. doi:10.1134/S0012266114030100 .
14. Maksimov V.I. On a control algorithm for a linear system with measurements of a part of coordinates of the phase vector. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 197–210. doi: 10.1134/S0081543816020164 .
15. Maksimov V.I. Tracking a given solution of a nonlinear distributed second-order equation. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 128–132. doi:10.1134/S0012266116010110 .
16. Maksimov V.I. Calculation of the derivative of an inaccurately defined function by means of feedback laws. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 219–231. doi: 10.1134/S0081543815080179 .

Maksimov V.I. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .