ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977, 630*624

БИЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ РУБКОЙ ЛЕСА[1]

А. А. Красовский, А. С. Платов

В предложенной математической модели управляющий лесом в каждый момент времени принимает решение о рубке деревьев определенного типа (породы) и возраста (возрастной группы) с целью максимизации прибыли. При планировании лесозаготовки управляющий ориентируется на ценовые прогнозы и учитывает экономические затраты. В работе для решения дискретно-временной задачи оптимального управления, возникающей в модели, применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина. Решение получено в конструктивном виде без больших вычислительных затрат, связанных с высокой размерностью задачи. В статье представлены аналитические результаты, поясняющие оптимальное решение. Для достаточно общей постановки задачи получено условие оптимальности, отвечающее управлению релейного типа. Условие включает в себя дискретную динамику сопряженной переменной, трактуемой как теневая цена древесины. Полученное правило интерпретируется как динамическая оценка рациональности рубки древостоя определенного типа и возраста. Структурная гибкость предложенной математической модели способствует практическому применению в менеджменте леса. При доказательстве теоретических результатов в статье предложен метод, который не встречался авторам в литературе.

Ключевые слова: принцип максимум Понтрягина, дискретная модель управления лесом.

A. A. Krasovskii, A. S. Platov. Bilinear optimal control problem of a discrete logging.

In the proposed mathematical model a forest manager at each specified moment of time makes decisions on harvesting the trees of a certain type (species) and age (age group) in order to maximize their profit. When planning logging, the manager focuses on price projections and takes into account economic costs. The Pontryagin maximum principle is applied for solving the discrete-time optimal control problem arising in the model. A solution is derived in a constructive manner without computational costs associated with the problem's high-dimensionality. Analytical results, explaining the optimal solution, are provided. For a typically defined problem the optimality condition is derived, which determines the bang-bang solution. The condition includes the discrete dynamics of the adjoint variable, interpreted as the wood shadow price. The rule that is obtained is treated as the dynamic rationale for logging a certain type and age of forest. Structural flexibility of the proposed mathematical model facilitates its application in forest management. In proving theoretical results in the paper, the authors propose a method that they have not come across in the literature.

Keywords: Pontryagin's maximum principle, discrete forest management model.

MSC: 93C55, 49J30, 91B76
DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-188-194

Введение

Историю математических моделей регулирования пользования древесиной принято вести с публикации М. Фаустмана [1]. Предлагаемая в данной статье задача так или иначе связана с моделями биоэкономики [2], называемыми: оптимальная ротация леса, менеджмент леса или модель Фаустмана. В статье формулируется задача оптимального управления дискретной системой, образованной некоторой возрастной последовательностью древостоев. С позиций лесоведения такая постановка задачи может быть классифицирована как динамическая породно-возрастная модель [3]. Выполненное моделирование ориентировано на экономический

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке научной программы "Future Forests" Шведского фонда стратегического исследования окружающей среды, а также программы "Tropical Futures Initiative (TFI)" Международного института прикладного системного анализа (IIASA). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-08075а).

аспект лесопользования, что обусловлено потенциальной привязкой к моделям секторов экономики, представляющих потребителей лесной продукции. Для решения задачи максимизации дисконтированной прибыли на конечном интервале времени применяется принцип максимума Понтрягина [4] для дискретных систем [5].

Заметим, что для решения оптимизационных задач, возникающих в подобных моделях, исследователи, как правило, применяют методы линейного программирования (см., например, [6]) или динамического программирования (см., например, [7]). Известно, что при этом на практике используются решатели (солверы), поставляемые программным обеспечением (софтом). Их использование приводит к большим вычислительным затратам, вызванным высокими размерностями задач, и не дает возможности отследить ход решения. Отчасти это обусловлено громоздкостью прикладных моделей. Однако их основные конструкции могут быть сформулированы в лаконичной математической форме. В настоящее время ведется работа с теоретическими моделями, в том числе с использованием принципа максимума [8].

В данной работе предложена модель, которая удовлетворяет базовым лесоводственным требованиям и в то же время сформулирована с соблюдением основных требований математической строгости. Решение задачи оптимального управления, формализованной в процессе моделирования, является конструктивным. Это позволяет избежать больших вычислительных затрат, упомянутых выше. При доказательстве теоретического результата в статье предложен метод, который не встречался авторам в литературе.

Авторы благодарны Александру Михайловичу Тарасьеву и Анатолию Зиновьевичу Швиденко за внимание к работе и ценные замечания.

1. Постановка задачи

Расположим каждый тип индивидуальных древостоев в ячейку с номером i, $i = 1, \dots, N$. На практике ячейка соответствует некоторому обособленному участку леса с древостоем одной породы. Деревья в каждой ячейке разбиты по возрасту $a \in [0, A]$. Обозначим символом $x_i(a, t)$ площадь деревьев в ячейке i, возрастной группе a, в момент времени $t \in [0, T]$. В модели рассматривается дискретное время. Шаг по времени Δt и шаг по возрастным группам Δa задаются соотношениями

$$a_{j+1} = a_j + \Delta a, \quad a_1 = \Delta a, \quad a_M = A, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_K = T, \quad \Delta t = \Delta a,$$

$$j = 1, \dots, M-1, \quad k = 1, \dots, K-1,$$

где M — количество возрастных групп, K — количество временных отрезков. Для каждого типа деревьев имеется фактор, переводящий их в биомассу (древесину) в зависимости от возраста. Обозначим его символом $\beta_i(a_j) \geq 0$. Символом $u_i(a_j, t_k) \in [0, 1]$ обозначим управляющее воздействие, т. е. долю леса типа i, возраста a_j, которая вырубается в момент времени t_k.

Удобно представить переменные в векторной форме:

$$\mathbf{x}_i(t_k) := \big(x_i(a_1, t_k), \dots, x_i(a_M, t_k)\big)^T, \quad \mathbf{u}_i(t_k) := \big(u_i(a_1, t_k), \dots, u_i(a_M, t_k)\big)^T.$$

В дальнейшем для сокращения записи будем писать

$$\mathbf{x}_i(k) := \mathbf{x}_i(t_k) \in \mathbb{R}^M, \quad \mathbf{u}_i(k) := \mathbf{u}_i(t_k) \in \mathbb{R}^M.$$

Обозначим $\mathbf{x}(k) := \big(\mathbf{x}_1(k)), \dots, \mathbf{x}_N(k)\big)$, $\boldsymbol{\beta}_i := \big(\beta_i(a_1), \dots, \beta_i(a_M)\big)^T \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{u}(k) := \big(\mathbf{u}_1(k)), \dots, \mathbf{u}_N(k)\big) \in \mathrm{Mat}_{M\times N}$, $\mathbf{u}$ — совокупность всех $\mathbf{u}(k)$ при $k = 1, \dots, M$.

Динамика процесса в векторной форме задается выражением

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \big(\mathbf{L} + \mathbf{M}\,\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k))\big)\,\mathbf{x}_i(k), \tag{1.1}$$

где матрицы $\mathbf{L}, \mathbf{M} \in \mathrm{Mat}_{M\times M}$ определены следующим образом:

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{Dg}$ преобразует вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ в следующую матрицу:

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}.$$

Интерпретация динамики такова: площадь леса, оставшегося после вырубки в возрастной группе a_j в k-й период времени, в следующий $(k+1)$-й временной период переходит в возрастную группу a_{j+1}; в последней возрастной группе площадь аккумулируется; все вырубленные площади засаживаются — лесовосстановительные мероприятия обязательны.

Древесина, заготовленная в k-й момент времени, вычисляется по формуле

$$H(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\beta}_i^T \, \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \, \mathbf{x}_i(k).$$

Рассмотрим множество

$$\mathbf{U} := \big\{ \{u_i^j\} \in \mathrm{Mat}_{M\times N} \big| 0 \le u_i^j \le 1 \big\}.$$

Управление $\mathbf{u}$ называется *допустимым*, если $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{U}$ для любого $k = 1, \dots, K$.

Функция затрат состоит из следующих слагаемых: рубка $C^L = C^L(a)$, доставка $C^E = C^E(a)$, посадка $C^P = C^P(a)$. Все затраты можно выразить в у.е. за гектар. Суммарная стоимость управляющих воздействий $\mathbf{u}(k)$ задана выражением

$$C(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \big[C_i^L(a_j) + C_i^E(a_j) + C_i^P(a_j) \big] x_i(a_j, t_k) u_i(a_j, t_k).$$

Таким образом, функцию затрат можно записать в виде

$$C(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{C}_i^T \, \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \, \mathbf{x}_i(k).$$

При известной динамике цен $p(k)$ на древесину прибыль вычисляется по формуле

$$\Pi(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := p(k) H(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) - C(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)),$$

а чистый дисконтированный доход определяется как

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{K} \rho_k \Pi(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)),$$

где ρ_k — фактор дисконтирования.

Для описанного процесса ставится следующая задача оптимального управления.

Пусть заданы динамика древостоя $\mathbf{x}_i(k)$ (1.1) и начальное распределение

$$\mathbf{x}_i(1) = \mathbf{x}_i^1, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Требуется среди допустимых управлений $\mathbf{u}$ найти оптимальное управление $\hat{\mathbf{u}}$, максимизирующее чистый дисконтированный доход:

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} J(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \tag{1.3}$$

где $\mathcal{U}$ — множество всех допустимых управлений.

З а м е ч а н и е 1. В силу содержательного смысла задачи все компоненты векторов $\mathbf{x}_i^1$ неотрицательны.

2. Новый подход к решению задачи (1.1)–(1.3)

Отметим справедливость следующего утверждения, доказательство которого непосредственно следует из вида матриц $\mathbf{L}, \mathbf{M}$.

Утверждение 1. *Если все компоненты векторов* $\mathbf{x}_i^1$ *неотрицательны, то для любого допустимого управления* $\mathbf{u}$ *все компоненты решений задачи* (1.1), (1.2) *также неотрицательны.*

З а м е ч а н и е 2. В дальнейшем операции взятия max и sign, применяемые к вектор-строке, предполагаются выполняемыми по компонентам.

Согласно принципу максимума Понтрягина [5] компоненты $\hat{\mathbf{u}}_i$ оптимального управления $\hat{\mathbf{u}}$ в каждый k-й момент времени максимизируют каждую компоненту вектора-строки:

$$\hat{\mathbf{u}}_i(k) = \arg \max_{\mathbf{u}(k) \in \mathbf{U}} \Big\{ \big(\rho_k (p(k)\, \boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\, \mathbf{M} \big)\, \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{x}}_i(k))\, \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \Big\}. \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)$ — решение сопряженного уравнения

$$\boldsymbol{\lambda}_i(k) = \rho_k \big(p(k)\, \boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T \big)\, \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k)) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1) \, \big(\mathbf{L}^T + \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k))\, \mathbf{M}^T \big), \tag{2.2}$$

вычисляемое в обратном времени, начиная с *условия трансверсальности*:

$$\boldsymbol{\lambda}_i(K+1) = 0, \tag{2.3}$$

при этом динамика $\hat{\mathbf{x}}_i(k)$ определяется уравнением (1.1): $\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = \big(\mathbf{L} + \mathbf{M}\, \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k)) \big)\, \hat{\mathbf{x}}_i(k)$ и начальным распределением $\hat{\mathbf{x}}_i(1) := \mathbf{x}_i^1$.

Важно отметить, что условие (2.1) не позволяет явно определить компоненту вектора $\hat{\mathbf{u}}_i(k)$ в случае, когда перед ней стоит множитель, равный нулю. При решении прикладных задач появление нулевых значений в векторах

$$\big(\rho_k (p(k)\, \boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\, \mathbf{M} \big) \tag{2.4}$$

оказывается крайне редким для релейных управлений. В свою очередь, зачастую нулевые компоненты возникают в векторе $\hat{\mathbf{x}}_i(k)$. Действительно, компонента $\hat{u}_i(a_j, k)$ управления $\hat{\mathbf{u}}_i(k)$, определенная условием (2.1), принимает значение либо 0, либо 1. Пусть $\hat{u}_i(a_j, k) = 1$, $1 < j < M - 1$, тогда, согласно уравнению динамики (1.1) в следующий момент времени $k+1$ получим $\hat{x}_i(a_{j+1}, k+1) = 0$.

Ниже сформулируем условие, соответствующее *типичной ситуации*, т. е. когда компоненты вектора (2.4) не обращаются в нуль.

Как отмечено выше, даже в такой ситуации условие (2.1) не всегда однозначно определяет компоненты оптимального управления. Тем не менее оптимальное управление можно получить упрощением (2.1), отбрасывая множитель $\mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{x}}_i(k))$.

Приступим к обоснованию такого упрощения.

Вместо условия (2.1) рассмотрим новое условие

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(k) = \arg\max_{\mathbf{u}(k)\in\mathbf{U}} \Big\{ \big(\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\,\mathbf{M}\big)\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k))\Big\}. \tag{2.5}$$

Опишем условие типичности.

У с л о в и е **T**. Существует $\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ — решение задачи (2.2), (2.3), (2.5) такое, что векторы $\rho_k\big(p(k)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T\big) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(k+1)\,\mathbf{M}$ не имеют нулевых компонент при всех i, k.

Утверждение 2. *Если выполнено условие* **T***, то задача* (2.2), (2.3), (2.5) *разрешима единственным образом, и все компоненты* $\tilde{\mathbf{u}}$ *принимают значение из* $\{0,1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий (2.3) и **T** вектор $\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T)$ не имеет нулевых компонент, поэтому $\tilde{\mathbf{u}}_i(K)$ определяются однозначно, и их компоненты принимают значение из $\{0,1\}$. По этому $\tilde{\mathbf{u}}_i(K)$ однозначно в силу (2.2) находится $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(K)$. Затем процесс построения $\tilde{\mathbf{u}}_i(k)$ и $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(k)$ продолжается до $k = 1$. □

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнено условие* **T** *и* $\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ *— решение задачи* (2.2), (2.3), (2.5), *а* $\tilde{\mathbf{x}}$ *— решение задачи* (1.1), (1.2), *соответствующее* $\tilde{\mathbf{u}}$. *Тогда* $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ *есть решение задачи* (1.1)–(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности положим $N = 1$, при этом индекс i можно опустить во всех обозначениях, где он встречается.

Рассмотрим *новые вспомогательные задачи оптимального управления*, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$, оставив без изменения динамику системы, множество допустимых управлений и взяв в качестве критерия оптимальности следующий критерий:

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{x}) := J(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \varepsilon \bar{J}(\mathbf{u}),$$

где

$$\bar{J}(\mathbf{u}) := \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{\sigma}(k)\mathbf{u}(\mathbf{k}), \quad \boldsymbol{\sigma}(k) = \operatorname{sign}\big[\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)\,\mathbf{M}\big], \tag{2.6}$$

т. е.

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ пара $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ является также решением вспомогательной задачи оптимального управления (1.1), (1.2), (2.7).

Будем решать *вспомогательную задачу* (2.7), применяя принцип максимума Понтрягина [5]. Пусть $\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{x}}\}$ — решение этой задачи; оно удовлетворяет принципу максимума

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \arg\max_{\mathbf{u}(k)\in\mathbf{U}} \Big[\big(\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)\,\mathbf{M}\big)\,\mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}(k)\Big]\,\mathbf{Dg}(\mathbf{u}(k)). \tag{2.8}$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ — решение сопряженного уравнения (2.2):

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}(k) = \rho_k\big(p(k)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T\big)\,\mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{u}}(k)) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)\,\big(\mathbf{L}^T + \mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{u}}(k))\,\mathbf{M}^T\big),$$

вычисляемое в обратном времени, начиная с условия трансверсальности:

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = 0.$$

Используя эти условия, будем по шагам вычислять сопряженную переменную $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ и соответствующее оптимальное управление $\bar{\mathbf{u}}$. В момент времени K из (2.3), (2.6) получаем

$$\boldsymbol{\sigma}(K) = \operatorname{sign}\left[\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T)\right].$$

Подставим $\boldsymbol{\sigma}(K)$ и $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = 0$ в условие (2.8):

$$\bar{\mathbf{u}}(K) = \arg\max_{\mathbf{u}(K)\in\mathbf{U}}\left[\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T)\,\mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{x}}(K)) + \varepsilon\operatorname{sign}\left[\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T)\right]\right]\mathbf{Dg}(\mathbf{u}(K)). \quad (2.9)$$

Условие (2.9) для определения управления $\bar{\mathbf{u}}(K)$ совпадает с условием (2.5) для определения $\tilde{\mathbf{u}}(K)$. Действительно, так как $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = \bar{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = 0$, а в силу утверждения 1 все компоненты вектора $\bar{\mathbf{x}}(K)$ неотрицательны, то все компоненты вектора, стоящего перед $\mathbf{Dg}(\mathbf{u}(K))$ в формуле (2.9), имеют такой же знак, что и соответствующие компоненты вектора в (2.5) (вне зависимости от конкретных значений вектора $\bar{\mathbf{x}}(K)$). Поэтому $\bar{\mathbf{u}}(K) = \tilde{\mathbf{u}}(K)$.

Далее по индукции получаем, что имеет место полное совпадение управлений и сопряженных переменных: $\bar{\mathbf{u}}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k)$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(k) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(k)$, $k = 1, \ldots, K$. Таким образом, мы показали, что $\bar{\mathbf{u}}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k)$, $\bar{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k)$, т. е. решение $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\}$ есть единственное решение системы принципа максимума для вспомогательной задачи. Поэтому оно является решением вспомогательной задачи при любом $\varepsilon > 0$.

Пусть $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}\}$ — произвольный допустимый процесс исходной задачи (1.1), (1.2). Тогда в силу предыдущей части доказательства для любого $\varepsilon > 0$ получим

$$J(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) + \varepsilon\bar{J}(\tilde{\mathbf{u}}) = J_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) \geq J_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon\bar{J}(\hat{\mathbf{u}}).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $\varepsilon \to +0$, имеем $J(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) \geq J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}})$. Тем самым $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ — решение задачи (1.1)–(1.3). □

З а м е ч а н и е 3. Теорема обосновывает использование условий (2.2), (2.3), (2.5) для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Отметим, что полученное правило допускает следующую экономическую интерпретацию. Первое слагаемое

$$\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T)$$

отвечает прибыли, соответствующей рубке в k-й момент времени, а второе слагаемое

$$\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\,\mathbf{M}$$

содержит теневую цену λ, которая оценивает решения, принятые в другие моменты времени; в прошлом и будущем. Управление выбирается путем сопоставления обозначенных экономических альтернатив. Отметим, что управление релейного типа отвечает сплошной рубке в лесоводственной практике. Однако оно может быть сведено к выборочной рубке, благодаря гибкой формализации модели, допускающей разбивку лесного участка на виртуальные ячейки. Реализация полученных условий в виде алгоритма позволяет создавать программные комплексы для моделирования менеджмента лесными ресурсами и апробации результатов на реальных данных.

З а м е ч а н и е 4. Множество задач, для которых выполнено условие $\mathbf{T}$, непусто. Например, если при всех k, i $\rho_k(p(k)\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) = (2, 2, \ldots, 2)$, то для такой задачи условие $\mathbf{T}$ выполнено и все $u_i^j(k) = 1$.

В заключение несколько слов о практическом применении. Моделирование было выполнено на данных для региона Баден, Нижняя Австрия. Рассматривалась динамика древостоя бука. Функции затрат были заданы на уровне европейских значений. Динамика цены на древесину отвечала трендам реальных данных. Алгоритмы были реализованы в среде программирования Python, используя библиотеки Matplotlib и Toolkits. В процессе компьютерных вычислений выполнялись условия типичности, оговоренные в статье. Результаты вычислительных экспериментов подтвердили работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Faustmann M.** Berechnung des Werthes, welchen Waldboden, sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirthschaft besitzen // Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung. 1849. S. 441–455.
2. **Clark C.** Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1990. 400 p. ISBN-10: 0471508837.
3. Лесные ресурсы: динамика, прогнозирование и оптимальное управление / Г.Н. Коровин, Н.В. Зукерт, М.Д. Корзухин, В.В. Нефедьев; науч. ред. М.Д. Корзухин; авт. вступит. ст. В.В. Нефедьев / Центр по проблемам экологии и продуктивности лесов Российской академии наук. М., 2013. 176 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 393 с.
5. **Болтянский В.Г.** Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 446 с.
6. **Reed W.J., Errico D.** Optimal harvest scheduling at the forest level in the presence of the risk of fire // Can. J. For. Res. 1986. Vol. 16, no. 2. P. 266–278. doi:10.1139/x86-047.
7. **Sohngen B., Mendelsohn R., Sedjo R.** Forest management, conservation, and global timber markets // Am. J. Agric. Econ. 1999. Vol. 81, no. 1. P. 1–13. doi:10.2307/1244446.
8. **Tahvonen O.** Economics of rotation and thinning revisited: the optimality of clearcuts versus continuous cover forestry // For. Policy Econ. 2016. Vol. 62. P. 88–94. doi:10.1016/j.forpol.2015.08.013.

Поступила 22.08.2016

Красовский Андрей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия
e-mail: krasov@iiasa.ac.at

Платов Антон Сергеевич
старший преподаватель
Владимирский государственный университет
им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: platovmm@mail.ru

REFERENCES

1. Faustmann M. Calculation of the value which forest land and immature stands possess for forestry. *J. For. Econ.*, 1995, vol. 1, pp. 7–44.
2. Clark C. *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources.* 2nd ed, New York: John Wiley & Sons Inc., 1990, 400 p. ISBN-10: 0471508837.
3. Korovin G.N., Zukert N.V., Korzukhin M.D., Nefed'ev V.V. *Lesnye resursy: dinamika, prognozirovanie i optimal'noe upravlenie* [Forest resources: dynamics, forecasting and optimal control]. Moscow, Tsentr po problemam ekologii i produktivnosti lesov Rossiiskoi akademii nauk, 2013, 176 p.
4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
5. Boltyanskii V.G. *Optimal control of discrete systems.* A Halsted Press Book, New York, Toronto: John Wiley & Sons, 1978, 392 p. ISBN-10: 0470265302.
6. Reed W.J., Errico D. Optimal harvest scheduling at the forest level in the presence of the risk of fire. *Can. J. For. Res.*, 1986, vol. 16, no. 2, pp. 266–278. doi:10.1139/x86-047.
7. Sohngen B., Mendelsohn R., Sedjo R. Forest management, conservation, and global timber markets. *Am. J. Agric. Econ.*, 1999, vol. 81, no. 1, pp. 1–13. doi:10.2307/1244446.
8. Tahvonen O. Economics of rotation and thinning revisited: the optimality of clearcuts versus continuous cover forestry. *For. Policy Econ.*, 2016, vol. 62, pp. 88–94. doi:10.1016/j.forpol.2015.08.013.

A. A. Krasovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria, e-mail: krasov@iiasa.ac.at

A. S. Platov, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, 600000 Russia, e-mail: platovmm@mail.ru