

УДК 004.932

**МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОЕКТОР В МЕТРИКЕ L_0 И ЗАДАЧА
ЛОКАЛИЗАЦИИ СТРУКТУРНЫХ РАЗЛИЧИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ****В. Б. Костюсов, Д. С. Перевалов**

В работе рассматривается задача локализации структурных различий двух изображений, которые представлены борелевскими функциями на ограниченном подмножестве плоскости. Для случая конечных изображений предложен новый алгоритм вычисления области различий, основанный на морфологической проекции в метрике L_0 , и показано, что он дает точное решение для достаточно широкого класса структурных различий. Оказалось, что алгоритм, основанный на морфологической проекции в L_2 , не дает точного решения в классе ограниченных структурных изменений. Для случая дискретных изображений, когда одно из них зашумлено дискретным независимым нормальным белым шумом, построен алгоритм вычисления области различий и показано, что симметрическая мера разности результата работы алгоритма и истинного множества различий стремится по вероятности к нулю при неограниченном росте отношения величины минимального скачка яркости к среднеквадратическому отклонению шума. Получена новая оценка положения точек глобального максимума гауссовой смеси специального вида.

Ключевые слова: морфологический анализ изображений, морфологический проектор, гауссова смесь, метрика L_0 , структурные различия.

V. B. Kostousov, D. S. Perevalov. Morphological projector in the L_0 metric and the problem of localization of structural differences between images.

We consider the problem of localization of structural differences between two images given by Borel functions on a bounded planar set. For the case of finite-valued images, we propose a new algorithm for the calculation of the difference domain based on the morphological projection in the L_0 metric. It is shown that the algorithm gives an exact solution for a wide class of structural differences. It turned out that the algorithm based on the morphological projection in L_2 does not give an exact solution in the class of bounded structural changes. For the case of discrete images, when one of them is perturbed by a discrete independent normal white noise, we construct an algorithm for the calculation of the difference domain and show that the symmetric measure of the difference between the algorithm's output and the true difference set vanishes in probability under the unbounded growth of the ratio of the minimum jump to the standard deviation of the noise. We obtain a new estimate for the location of global maximum points for a Gaussian mixture of a special form.

Keywords: morphological analysis of images, morphological projector, Gaussian mixture, metric L_0 , structural changes.

MSC: 62M40, 65D18, 68U10**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-1-171-187**Введение**

В настоящее время весьма актуальными становятся задачи, связанные с извлечением целевой информации из изображений. Это вызвано, в частности, массовым внедрением видеокамер и других источников изображений в самые различные области человеческой деятельности, такие как безопасность, охрана природы, сельское хозяйство, управление технологическими процессами, системы жизнеобеспечения, индустрия развлечений, современное искусство и т.д. Огромный поток видеoinформации становится невозможным переработать и эффективно использовать без автоматического отбора и обработки с целью извлечения необходимой информации для решения конкретной прикладной проблемы. Одной из задач обработки изображений является задача локализации на изображениях изменений, произошедших вследствие появления или исчезновения объектов в наблюдаемой сцене. При этом важно, чтобы алгоритм, решающий эту задачу, различал существенные изменения (называемые в данной работе

структурными), произошедшие по указанной причине, от несущественных, которые произошли, например, вследствие изменения условий освещенности сцены.

Данная статья посвящена исследованию одного класса алгоритмов локализации структурных различий изображений. Рассматриваемый метод относится к области обработки изображений, известной как морфологический анализ [1–3]. Работа продолжает исследования [4–6]. Представленная в статье конструкция морфологической проекции в метрике L_0 укладывается в контекст обобщенной проективной морфологии, предложенной в [3].

Пусть имеются два изображения f и g , представленные борелевскими конечнозначными функциями, определенными на ограниченном борелевском подмножестве ненулевой меры $X \subset \mathbb{R}^2$. Будем считать, что оба изображения являются результатом съемки одной и той же сцены в разное время; при этом, быть может, некоторые объекты сцены исчезли или появились и, как следствие, возникли различия на изображениях в некоторой области $U \subseteq X$. Задача состоит в том, чтобы найти множество U , несмотря на то что изображения могут отличаться условиями съемки, в частности иметь разную среднюю яркость и контрастность.

В данной работе будет рассматриваться развитие алгоритма [2, с. 237], построенного в рамках морфологического анализа. В этом алгоритме для изображения f рассматривается множество изображений V_f , называемых *формой* f , которые могут быть получены из f всевозможными попиксельными изменениями яркостей. Вводится оператор $P_f g$, называемый *морфологическим проектором*, который сопоставляет изображению g его метрическую проекцию на V_f . Для порогового значения $T > 0$ в качестве оценки искомой области U полагается множество

$$\tilde{U} = \{x \in X : |g(x) - P_f g(x)| \geq T\}.$$

Оказывается, что при достаточно широких предположениях проектирование в метрике L_0 (см. [7]) позволяет точнее оценить U по сравнению со стандартным проектированием в L_2 .

В разд. 1 вводятся определения и обозначения. В разд. 2 строится формальная постановка задачи вычисления структурных различий двух изображений как задача однозначного вычисления носителя функции структурных возмущений. В разд. 3 выясняются необходимые и достаточные условия на семейство допустимых носителей функций структурных возмущений для того, чтобы решение задачи существовало. В разд. 4 для одного, достаточно широкого, семейства допустимых носителей структурных возмущений предлагается метод построения решения задачи на основе проектора в метрике L_0 . Кроме того, показывается, что для этого семейства проектор в пространстве L_2 в общем случае не дает точного решения. В разд. 5 рассматривается и исследуется алгоритм оценки носителя функции структурных возмущений для случая дискретных изображений, одно из которых зашумлено дискретным независимым нормальным белым шумом, а также получены новые результаты об оценке положения точек максимума гауссовой смеси специального вида. В разд. 6 приводятся результаты вычислительного эксперимента.

1. Определения и обозначения

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ — *поле зрения*, ограниченное борелевское множество ненулевой меры [2].

$\mathfrak{B}(X)$ — семейство всех борелевских подмножеств X .

$\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ — некоторое семейство борелевских подмножеств X .

$\mu(U)$ — мера Лебега множества $U \in \mathfrak{B}(X)$.

χ_U — характеристическая функция множества $U \in \mathfrak{B}(X)$.

$U \sqcup W$ — дизъюнктивная сумма множеств U и W .

$U \Delta W$ — симметрическая разность множеств, $U \Delta W = (U \setminus W) \cup (W \setminus U)$.

$\mathcal{I}(X)$ — *пространство изображений*, линейное пространство кусочно-постоянных борелевских функций на X , принимающих конечное число значений (за исключением, быть может, множеств меры нуль). Элементы этого пространства будем называть *изображениями*.

$\text{supp } h = \{x \in X : h(x) \neq 0\}$ — носитель функции $h : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$h|_W$ — сужение функции h на множество W .

\mathcal{F} — множество всех борелевских ограниченных функций на \mathbb{R} .

$F \circ f$ — изображение, определенное для $f \in \mathcal{I}$, $F \in \mathcal{F}$ по правилу [2]:

$$(F \circ f)(x) = F(f(x)), \quad x \in X.$$

$\text{card } M$ — мощность конечного множества M .

$[r]$ — целая часть числа $r \in \mathbb{R}$.

Все равенства множеств и функций, если не оговорено противное, предполагаются с точностью “почти всюду”: $U = W$ значит $\mu(U \Delta W) = 0$, $U \neq W$ значит $\mu(U \Delta W) > 0$, $U \subseteq W$ значит $\mu(U \setminus W) = 0$, $U \in \mathfrak{U}$ значит $\exists U' \in \mathfrak{U} \quad \mu(U \Delta U') = 0$.

2. Задача вычисления области структурного различия изображений

Рассмотрим изображение $f \in \mathcal{I}(X)$. Будем считать, что оно получено при съемке некоторой физической сцены неподвижно закрепленной камерой. Пусть сцена была снята повторно, и в результате получено изображение $g \in \mathcal{I}(X)$. При этом в момент съемки g на сцене появились или исчезли объекты в некоторой области $U \in \mathfrak{B}(X)$ и съемка проводилась в других условиях освещения. Здесь мы предполагаем, что при съемке обоих изображений отсутствуют шумы (случай наличия шумов на g будет рассмотрен в разд. 5). Построим математическую модель связи g и f .

Факт появления или исчезновения объектов на изображении f в области U можно описать функцией $\bar{\delta} \in \mathfrak{B}(X)$, для которой $\text{supp } \bar{\delta} = U$, так что при съемке сцены с неизменными условиями освещения получилось бы изображение

$$f_1 = f + \bar{\delta}.$$

Изменение условий освещения можно представить в виде функции $F \in \mathcal{F}$, действующей на одинаковые значения яркостей изображения одинаково [2]; тогда $g = F \circ f_1$, откуда

$$g = F \circ (f + \bar{\delta}). \quad (2.1)$$

Множество U является областью, в которой изображение f изменилось существенно, так что данное изменение не компенсируется изменением яркостей точек по правилу F . Будем называть U *областью структурных различий g относительно f* .

С точки зрения анализа изображений представляет интерес следующая задача.

З а д а ч а. Вычислить U из уравнения (2.1) по известным $f, g \in \mathcal{I}(X)$ и неизвестным $F, \bar{\delta}$ с условием $U = \text{supp } \bar{\delta}$.

Обозначим $\delta = F \circ (f + \bar{\delta}) - F \circ f$. Прямой подстановкой доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1. Если F является биекцией, то задача вычисления U из уравнения (2.1) эквивалентна вычислению U из уравнения

$$g = F \circ f + \delta \quad (2.2)$$

с условием $U = \text{supp } \delta$. Кроме того, область структурных различий g относительно f совпадает с областью структурных различий f относительно g .

Из утверждения 1 следует, что в случае биективных F задача поиска области структурных различий симметрична относительно f и g и она эквивалентна задаче вычисления $U = \text{supp } \delta$, удовлетворяющей выражению (2.2).

Естественным условием в данной постановке задачи вычисления U по известным f и g является требование существования и единственности U (с точностью до множества меры 0). Это требование можно реализовать, задавая какие-либо ограничения на f , g , F и δ . В данной работе мы рассмотрим следующий вариант ограничений:

- 1) $f \in \mathcal{I}(X)$ — произвольное изображение;
- 2) $g \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}}$, где

$$\mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}} = \{F \circ f + \delta: F \in \mathcal{F}_b, \delta \in \mathcal{I}(X), \text{supp } \delta \in \mathfrak{U}\}. \quad (2.3)$$

Здесь $\mathcal{F}_b \subset \mathcal{F}$ — класс биективных функций на \mathbb{R} , $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ — некоторое заданное семейство борелевских подмножеств X , описывающее априорную информацию о возможных областях, на котором может произойти структурное изменение. Самый существенный момент — требование $\text{supp } \delta \in \mathfrak{U}$. Оно означает, что мы ограничиваем семейство возможных областей структурных изменений изображений некоторым классом \mathfrak{U} множеств из $\mathfrak{B}(X)$.

Можно заметить, что в отличие от исходной постановки задачи поиска структурных различий здесь f и g рассматриваются несимметрично: f может быть произвольной, а на g накладываются ограничения, в общем случае зависящие от f . В контексте задач анализа изображений данную ситуацию можно трактовать так: f считается эталоном, а g — его возмущенным вариантом.

В отличие от подхода [2] мы рассматриваем в качестве отображений F не произвольные, а только биективные функции, для того чтобы задача поиска структурных различий была симметрична относительно обоих изображений. В то же время полученные результаты относительно единственности разложения применимы и для небиективных F .

В этой постановке для произвольных $f \in \mathcal{I}(X)$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и $g \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}}$ задача поиска $U = \text{supp } \delta$ всегда разрешима, но, быть может, не единственным образом. Для обозначения случаев, когда задача разрешима единственным образом, введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. Изображение $f \in \mathcal{I}(X)$ и семейство множеств $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ *структурно согласованы*, если любое изображение $g \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}}$ раскладывается в сумму (2.2) единственным образом относительно $\text{supp } \delta$, т. е.

$$g = F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2 \Rightarrow \text{supp } \delta_1 = \text{supp } \delta_2.$$

В силу требования единственности разложения в определении 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Структурная согласованность f и \mathfrak{U} эквивалентна существованию оператора $\mathbf{U}_{f, \mathfrak{U}}: \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}} \rightarrow \mathfrak{U}$ такого, что $\forall g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}}, \mathbf{U}_{f, \mathfrak{U}}(g) = \text{supp } \delta$.

Согласно построению оператор $\mathbf{U}_{f, \mathfrak{U}}$, который в дальнейшем называется *оператором структурных различий*, по заданному g вычисляет область структурных различий.

Так как единственность разложения на семействе влечет единственность разложения и на его подмножестве, справедливо следующее.

Утверждение 3. Если f и \mathfrak{U} структурно согласованы, то $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ также структурно согласовано с f .

Ниже исследуются условия, при которых f и \mathfrak{U} структурно согласованы.

3. Условия структурной согласованности

Для сокращения последующих выкладок введем обозначение для разложения f в линейную сумму характеристических функций [2]. Для $f \in \mathcal{I}(X)$ в силу его конечнозначности существуют $n^f > 0$ и последовательность чисел $r_1^f < \dots < r_{n^f}^f \in \mathbb{R}$ таких, что

$$f = \sum_{i=1}^{n^f} r_i^f \chi_{S_i^f}, \quad \mu(S_i^f) > 0, \quad X = \bigsqcup_{i=1}^{n^f} S_i^f, \quad (3.1)$$

где $S_i^f = \{x \in X : f(x) = r_i^f\}$ — множество уровня r_i^f изображения f . Семейство $\{S_i^f\}_{i=1}^{n^f}$ образует разбиение X .

Из (2.2) и (3.1) следует

Лемма 1. Для $f \in \mathcal{I}(X)$, $g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}}$ справедливо

$$\text{supp } \delta = \text{supp} \left(g - \sum_{i=1}^{n^f} F(r_i^f) \chi_{S_i^f} \right).$$

Теорема 1. Пусть заданы $f \in \mathcal{I}(X)$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и существует отображение

$$P : \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^f}$$

такое, что для всех $g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}}$ выполняется $P_i(g) = F(r_i^f)$, $i = \overline{1, n^f}$.

Тогда f и \mathfrak{M} структурно согласованы и

$$\mathbf{U}_{f, \mathfrak{M}}(g) = \text{supp} \left(g - \sum_{i=1}^{n^f} P_i(g) \chi_{S_i^f} \right).$$

Доказательство следует из леммы 1. \square

Данная теорема утверждает, что для структурной согласованности f и \mathfrak{M} достаточно, чтобы для всех $g = F \circ f + \delta$ было возможно однозначно вычислить $F(r_i^f)$, $i = \overline{1, n^f}$, и указывает способ конструктивного построения $\mathbf{U}_{f, \mathfrak{M}}$.

Далее мы будем преимущественно исследовать такие f и \mathfrak{M} , для которых применим этот способ доказательства структурной согласованности. В то же время следующий пример показывает, что условия теоремы 1 не являются необходимыми.

Пример 1. Рассмотрим $X = [0, 1]^2$ и его разбиение на три непересекающихся борелевских множества одинаковой меры A, B, C .

Положим $f = 0 \cdot \chi_{A \cup B} + 1 \cdot \chi_C$. Тогда $n^f = 2$, $r_1^f = 0$, $r_2^f = 1$, $S_1^f = A \cup B$, $S_2^f = C$.

Для $\mathfrak{M} = \{\emptyset, A \cup C\}$ f и \mathfrak{M} структурно согласованы:

$$\mathbf{U}_{f, \mathfrak{M}}(g) = \begin{cases} \emptyset & : g|_{S_1^f} \equiv \text{const}, \\ A \cup C & : \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зададим $g = 1 \cdot \chi_A + 0 \cdot \chi_B + 2 \cdot \chi_C$, $F_1(r) = r$, $F_2(r) = 3r$. Хотя $F_1(1) \neq F_2(1)$, в то же время, $g = F_1 \circ f + 1 \cdot \chi_A + 1 \cdot \chi_C = F_2 \circ f + 1 \cdot \chi_A - 1 \cdot \chi_C$.

Теорема 2. Для того чтобы $f \in \mathcal{I}(X)$ и $\mathfrak{M} \in \mathfrak{B}(X)$ были структурно согласованы, достаточно выполнения условия

$$\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{M}, \forall i = \overline{1, n^f} \quad S_i^f \not\subseteq U_1 \cup U_2. \quad (3.2)$$

Иначе говоря, никакое объединение двух произвольных элементов из \mathfrak{M} не покрывает целиком ни одно из множеств уровня f .

Доказательство. Рассмотрим $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_b$, $U_1, U_2 \in \mathfrak{M}$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{I}(X)$ такие, что

$$F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2, \quad \text{supp } \delta_1 = U_1, \quad \text{supp } \delta_2 = U_2.$$

По условию для $i = \overline{1, n^f}$ множество $W_i = S_i^f \setminus (U_1 \cup U_2)$ имеет ненулевую меру. В силу того что $(F_1 \circ f)|_{W_i} = (F_2 \circ f)|_{W_i}$, получаем $F_1(r_i^f) = F_2(r_i^f)$. Отсюда существует $P : \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^f}$ такое, что для всех $g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}}$ и всех $i = \overline{1, n^f}$ выполняется $P_i(g) = F(r_i^f)$. По теореме 1 f и \mathfrak{M} структурно согласованы. \square

Теорема 3. Если $f \in \mathcal{I}(X)$ и $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}(X)$ структурно согласованы, то выполняется условие

$$\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{U} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad \forall K \in \mathbb{N}, \quad \forall \{i_k\}_{k=1}^K \subseteq \{1, \dots, n^f\} \quad \bigcup_{k=1}^K S_{i_k}^f \neq U_1 \cup U_2. \quad (3.3)$$

Иначе говоря, никакое объединение из двух непересекающихся элементов из \mathfrak{U} не совпадает с объединением множеств уровня f .

Доказательство. Допустим противное, пусть существуют $\{i_k\}_{k=1}^K$ и непересекающиеся множества $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ такие, что $\bigcup_{k=1}^K L_{i_k} = U_1 \cup U_2$.

Положим $F_1(r) = r$, $r \in \mathbb{R}$,

$$F_2(r_i^f) = \begin{cases} r_i^f + 1/2 & : i = i_k, k = \overline{1, K}, \\ r_i^f & : \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Продолжим F_2 на \mathbb{R} произвольным образом с сохранением условия биективности. Зададим $\delta_1 = 1/2 \chi_{U_1}$, $\delta_2 = -1/2 \chi_{U_2}$, тогда $F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2$. В силу того что $\text{supp } \delta_1 = U_1 \neq \text{supp } \delta_2 = U_2$, мы получили противоречие со структурной согласованностью f и \mathfrak{U} . \square

Следующий пример показывает, что условие теоремы 3 не является достаточным для структурной согласованности.

Пример 2. Рассмотрим $X = [0, 1]^2$ и его разбиение на три непересекающихся борелевских множества одинаковой меры A, B, C . Положим $f = 0 \cdot \chi_{A \cup B} + 1 \cdot \chi_C$. Тогда $n^f = 2$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $L_1 = A \cup B$, $L_2 = C$.

При $\mathfrak{U} = \{\emptyset, U_1, U_2\}$, где $U_1 = A \cup C$, $U_2 = B \cup C$, условие теоремы 3 выполнено для f и \mathfrak{U} . Зададим $F_1(r) = 1 - r$, $F_2(r) = 2r$, $\delta_1 = -1 \cdot \chi_A + 1 \cdot \chi_C$, $\delta_2 = 1 \cdot \chi_B - 1 \cdot \chi_C$. Тогда $F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2$. Так как $\text{supp } \delta_1 = U_1 \neq \text{supp } \delta_2 = U_2$, то f и \mathfrak{U} не являются структурно согласованными.

В следующем подразделе показано, что для случая, когда \mathfrak{U} обладает свойством наследственности относительно подмножеств [8], условия теорем 2 и 3 являются необходимыми и достаточными для структурной согласованности.

3.1. Характеризация структурной согласованности для семейств со свойством наследственности

Для $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ обозначим через $[\mathfrak{U}]_{\subseteq}$ семейство, полученное пополнением \mathfrak{U} операцией взятия подмножеств: $[\mathfrak{U}]_{\subseteq} = \{U' \in \mathfrak{B}(X) : \exists U \in \mathfrak{U}, U' \subseteq U\}$.

Определение 2. Будем называть $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ наследственным семейством (замкнутым относительно операции взятия подмножеств), если $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}]_{\subseteq}$.

Пример 3. $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}(X)$ является наследственным, но не является структурно согласованным ни с каким $f \in \mathcal{I}(X)$ в силу теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}(X)$ и $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}]_{\subseteq}$. Тогда f и \mathfrak{U} структурно согласованы тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{1, n^f}$

$$U \in \mathfrak{U}, \quad U \subseteq S_i^f \Rightarrow S_i^f \setminus U \notin \mathfrak{U}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Для доказательства достаточности рассмотрим $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ и произвольный $i = \overline{1, n^f}$. Тогда $U'_1 = U_1 \cap S_i^f \in \mathfrak{U}$, поэтому, $S_i^f \setminus U'_1 \notin \mathfrak{U}$. В то же время $U'_2 = (U_2 \setminus U_1) \cap S_i^f \in \mathfrak{U}$, следовательно, $U'_2 \neq S_i^f \setminus U'_1$. Это значит, что объединение U_1 и U_2 не покрывает S_i^f , а потому выполняется утверждение теоремы 2.

Для доказательства необходимости рассмотрим произвольные $i = \overline{1, n^f}$ и $U \in \mathfrak{U}$, $U \subseteq S_i^f$. Для $W = S_i^f \setminus U$ выполняется $U \cup W = S_i^f$, откуда по теореме 3 $W \notin \mathfrak{U}$. \square

Следствие 1. Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}]_{\subseteq}$. Условие структурной согласованности f и \mathfrak{U} эквивалентно выполнению одного из условий, (3.2) или (3.3).

Пример 4. Рассмотрим $f \in \mathcal{I}(X)$ и некоторое множество $U^* \in \mathfrak{B}(X)$ такое, что для всех $i = \overline{1, n^f}$ выполняется $\mu(U^* \cap S_i^f) < \mu(S_i^f)$. Тогда по следствию 1 $\mathfrak{U} = [\{U^*\}]_{\subseteq}$ является наследственным семейством, структурно согласованным с f .

В следующем подразделе показывается, что для заданного f среди наследственных семейств \mathfrak{U} , обладающих свойством так называемой однородности, существует единственное максимальное семейство, структурно согласованное с f .

3.2. Существование и единственность наследственного семейства, однородного и структурно согласованного с заданным изображением

Для $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$, $f \in \mathcal{I}(X)$ обозначим через $[\mathfrak{U}]_f$ семейство, полученное из \mathfrak{U} по следующему правилу:

$$[\mathfrak{U}]_f = \left\{ W \in \mathfrak{B}(X) : \exists U \in \mathfrak{U}, \forall i = \overline{1, n^f} (\mu(U \cap S_i^f) = \mu(W \cap S_i^f)) \right\}.$$

То есть $[\mathfrak{U}]_f$ состоит из множеств, значения мер которых внутри S_i^f совпадают со значениями соответствующих мер элементов из \mathfrak{U} .

Определение 3. Будем говорить, что семейство \mathfrak{U} однородно относительно f , если $[\mathfrak{U}]_f = \mathfrak{U}$.

Прямой проверкой доказывается следующее утверждение.

Утверждение 4. Для $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и $f \in \mathcal{I}(X)$ операция пополнения по подмножествам $[\cdot]_{\subseteq}$ и операция пополнения по однородности $[\cdot]_f$ коммутируют: $[[\mathfrak{U}]_{\subseteq}]_f = [[\mathfrak{U}]_f]_{\subseteq}$.

Следствие 2. Для $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и $f \in \mathcal{I}(X)$, семейство $[[\mathfrak{U}]_{\subseteq}]_f$ является наследственным и однородным относительно f .

Для $f \in \mathcal{I}(X)$ обозначим

$$\mathfrak{U}_f = \left\{ U \in \mathfrak{B}(X) : \forall i = \overline{1, n^f} (\mu(U \cap S_i^f) < \frac{1}{2} \mu(S_i^f)) \right\}. \quad (3.5)$$

Теорема 5. Для $f \in \mathcal{I}(X)$ семейство \mathfrak{U}_f является единственным семейством, максимальным по включению среди всех наследственных семейств, однородных относительно f и структурно согласованных с f .

Доказательство. Наследственность и однородность \mathfrak{U}_f следуют из (3.5). Для $U \in \mathfrak{U}_f$, $i = \overline{1, n^f}$ из (3.5) имеем $\mu(S_i^f \setminus U) > 1/2 \mu(S_i^f)$, поэтому $S_i^f \setminus U \notin \mathfrak{U}_f$, следовательно, по теореме 4 f структурно согласовано с \mathfrak{U}_f .

Для доказательства максимальной и единственности \mathfrak{U}_f достаточно проверить, что ни один элемент $W \in \mathfrak{B}(X) \setminus \mathfrak{U}_f$ не может содержаться ни в каком однородном замкнутом семействе, структурно согласованном с f . В силу утверждения 3 и следствия 2 достаточно доказать, что для $W \in \mathfrak{B}(X) \setminus \mathfrak{U}_f$, $\mathfrak{U}' = [[W]_{\subseteq}]_f$ не является структурно согласованным с f .

По построению W существует $i = \overline{1, n^f}$ такой, что $\mu(W \cap S_i^f) \geq 1/2 \mu(S_i^f)$. Обозначим $W' = W \cap S_i^f$. В силу замкнутости \mathfrak{U}' справедливо $W' \in \mathfrak{U}'$.

Так как $\mu(S_i^f \setminus W') < 1/2 \mu(S_i^f) \leq \mu(W')$, то можно построить множество $W'' \subseteq S_i^f$ такое, что $S_i^f \setminus W'' \subseteq W'$ и $\mu(W'') = \mu(W')$. В силу однородности \mathfrak{U}' справедливо $W'' \in \mathfrak{U}'$.

Имеем $W', W'' \in \mathfrak{U}'$, $S_i^f \subseteq W' \cup W''$. Таким образом, условие (3.2) не выполняется и по следствию 1 \mathfrak{U}' не является структурно согласованным с f . \square

4. Вычисление оператора структурных различий на \mathfrak{U}_f

В данном разделе обсуждается алгоритм вычисления оператора $\mathbf{U}_{f, \mathfrak{U}_f}$. Для его вычисления требуется понятие так называемой метрики L_0 [7]. Для $h_1, h_2 \in \mathcal{I}(X)$ расстояние между ними в L_0 определяется как $\|h_1 - h_2\|_{L_0} = \lim_{p \rightarrow 0} \|h_1 - h_2\|_{L_p}^p$. В силу ограниченности $h_1 - h_2$, данный предел существует, и может быть вычислен по формуле

$$\|h_1 - h_2\|_{L_0} = \mu(\text{supp}(h_1 - h_2)).$$

В дискретном случае эта метрика известна как 0-норма [7] и расстояние Хэмминга [9].

О п р е д е л е н и е 4. Для $f \in \mathcal{I}(X)$ формой f [2] называется множество

$$\mathbf{V}_f = \{F \circ f : F \in \mathcal{F}\}. \quad (4.1)$$

Важно отметить, что в определении формы участвуют не только биективные, но и не биективные борелевские функции на \mathbb{R} . В частности, \mathbf{V}_f изоморфно \mathbb{R}^{n^f} .

О п р е д е л е н и е 5. Для $p \in \{0\} \cup [1, +\infty) \cup \{+\infty\}$, $f, g \in \mathcal{I}(X)$ будем говорить, что существует проекция g на форму f в метрике L_p , если $\min\{\|g - \tilde{g}\|_{L_p} : \tilde{g} \in \mathbf{V}_f\}$ достигается на единственном изображении \tilde{g} . В этом случае будем обозначать

$$\text{Proj}_f^{L_p}(g) = \text{argmin}\{\|g - \tilde{g}\|_{L_p} : \tilde{g} \in \mathbf{V}_f\}.$$

Известно [2], что для $p = 2$ проекция на форму f существует для всех $g \in \mathcal{I}(X)$.

Теорема 6. Для $f \in \mathcal{I}(X)$ и $g \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}_f}$ (см. (2.3)) существует проекция g на форму f в метрике L_0 и выполняется равенство

$$\mathbf{U}_{f, \mathfrak{U}_f}(g) = \text{supp}(g - \text{Proj}_f^{L_0}(g)). \quad (4.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g = F \circ f + \delta$, $U = \text{supp} \delta$. Так как $U \in \mathfrak{U}_f$, то для произвольного $i = \overline{1, n^f}$ выполняется $\mu(U \cap S_i^f) < 1/2 \mu(S_i^f)$, откуда

$$F(r_i^f) = \text{argmax}_{\tilde{r} \in \mathbb{R}} \left(\mu(g^{-1}(\tilde{r}) \cap S_i^f) \right) = \text{argmin}_{\tilde{r} \in \mathbb{R}} \left(\|g|_{S_i^f} - \tilde{r} \chi_{S_i^f}\|_{L_0} \right).$$

Следовательно, проекция g на форму f в метрике L_0 существует, и

$$\text{Proj}_f^{L_0}(g) = \sum_{i=1}^{n^f} F(r_i^f) \chi_{S_i^f}.$$

Применение леммы 1 завершает доказательство. \square

Теорема 6 показывает, что для семейства \mathfrak{U}_f проекция на форму f в метрике L_0 позволяет вычислить область структурных различий изображений f и $g \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{U}_f}$ с помощью алгоритма (4.2).

Исследование алгоритма, использующего проекцию в L_2 . В работах [2, п. 9.2.1.; 5] для поиска различий между изображениями $f, g \in \mathcal{I}(X)$ используется пороговая обработка разности g и проекцией g на форму f в L_2 . А именно для порога $T > 0$ определяется оператор $\mathbf{U}_{f, T}^{L_2} : \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathfrak{B}(X)$:

$$\mathbf{U}_{f, T}^{L_2}(g) = \left\{ x \in X : |g(x) - \text{Proj}_f^{L_2}(g)| \geq T \right\}. \quad (4.3)$$

Известно, что данный оператор однозначно определен [1] и может служить оценкой множества структурных различий U [5]. Следующее утверждение показывает, в каких случаях это выполняется на \mathfrak{U}_f .

Лемма 2. Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $g \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}_f}$. Тогда существует $T > 0$ такой, что $\mathbf{U}_{f, T}^{L_2}(g) = \mathbf{U}_{f, \mathfrak{M}_f}(g)$ тогда и только тогда, когда $\|(g - \text{Proj}_f^{L_2}(g))|_{X \setminus U}\|_C < \min_{x \in U} |(g - \text{Proj}_f^{L_2}(g))(x)|$, где $\|\cdot\|_C$ — норма в метрике L_∞ .

Доказательство следует из того, что $\mathbf{U}_{f, \mathfrak{M}_f}(g) = \mathbf{U}_{f, T}^{L_2}(g)$ тогда и только тогда, когда найдется $T > 0$ такой, что

$$\forall x' \in X \setminus U, x \in U \quad |(g - \text{Proj}_f^{L_2}(g))(x')| \leq T < |(g - \text{Proj}_f^{L_2}(g))(x)|. \quad \square$$

Утверждение 5. Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $U \in \mathfrak{M}_f$, $\mu(U) > 0$. Тогда существует $\delta \in \mathcal{I}(X)$ такое, что $\text{supp } \delta = U$, $\|\delta\|_C = 1$, и для любого $T > 0$ для $g = f + \delta$ справедливо $\mathbf{U}_{f, T}^{L_2}(g) \neq U$.

Доказательство. Найдется $i = \overline{1, n^f}$ такое, что $\mu(U \cap S_i^f) > 0$. Разобьем $U \cap S_i^f$ на два непересекающихся множества U_1, U_2 так, что $\mu(U_1) = \mu(U_2) = \alpha \mu(S_i^f)$. Поскольку $U \in \mathfrak{M}_f$, то $\alpha < 1/4$. Положим

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1 - \alpha} & : x \in U_1, \\ 1 & : x \in U \setminus U_1, \\ 0 & : x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Тогда $\text{supp } \delta = U$, $\|\delta\|_C = 1$, $\text{Proj}_f^{L_2}(g)|_{S_i^f} \equiv r_i^f + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \alpha + 1 \cdot \alpha \equiv r_i^f + \frac{\alpha}{1 - \alpha}$.

Следовательно, $(g - \text{Proj}_f^{L_2}(g))|_{S_i^f \setminus U} \equiv \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, $(g - \text{Proj}_f^{L_2}(g))|_{U_1} \equiv 0$. Применение леммы 2 доказывает утверждение. \square

Согласно этому утверждению для произвольного изображения $f \in \mathcal{I}(X)$ и множества ненулевой меры $U \in \mathfrak{M}_f$ существуют такие возмущения δ , для которых оператор $\mathbf{U}_{f, T}^{L_2}$ ни при каком параметре $T > 0$ не позволяет вычислить область структурных различий.

5. Анализ изображений, искаженных случайным шумом

Ранее мы рассматривали случай, когда возмущенное изображение g формировалось путем изменения его значений по детерминированному правилу. В данном разделе мы рассмотрим ситуацию, когда изображение g дополнительно содержит случайный аддитивный некоррелированный нормальный шум.

Для исследования этого вопроса потребуется знание свойств точек глобального максимума гауссовой смеси [10, Ch. 2.2, p. 30] специального вида. В [10–14] исследуются свойства, при которых гауссовы смеси унимодальны, то есть имеют единственный локальный максимум. В то же время, вопрос положения глобальных максимумов не рассмотрен. Этому вопросу посвящен следующий подраздел.

5.1. Свойства глобальных максимумов гауссовой смеси

Обозначим

$$\omega(r, m) = e^{-(r-m)^2/2}. \quad (5.1)$$

Стандартными методами математического анализа доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Рассмотрим $A \in \mathbb{R}$, $A > 2$,

$$\rho_0(r) = \omega(r, 0) + \omega(r, A). \quad (5.2)$$

Функция $\rho_0(r)$ имеет два глобальных максимума, достигаемых в точках

$$r_1 = \gamma(A), \quad r_2 = A - \gamma(A),$$

где $\gamma(r)$ — непрерывная монотонно убывающая функция, определенная на $r \in (2, +\infty)$, со свойствами $0 < \gamma(r) < r/2$, $\gamma(2+0) = 1$, $\gamma(+\infty) = 0$.

Кроме того, $\gamma = \gamma(r)$ для каждого r может быть найдено из трансцендентного уравнения

$$\ln\left(\frac{r}{\gamma} - 1\right)^2 = r(r - 2\gamma), \quad r > 2, \quad 0 < \gamma < r/2. \quad (5.3)$$

Теорема 7. Пусть Δ , $\sigma > 0$, $\Delta/\sigma > 2$, $K \in \mathbb{N}$ и заданы вещественные последовательности $(\Delta_k)_{k=1}^K$, $(\alpha_k)_{k=0}^K$,

$$|\Delta_k| \geq \Delta, \quad k = \overline{1, K},$$

$$\sum_{k=0}^K \alpha_k = 1, \quad \alpha_0 > 1/2, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = \overline{1, K}.$$

Тогда точки глобальных максимумов гауссовой смеси

$$\rho(r) = \alpha_0 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\Delta_k)^2}{2\sigma^2}}$$

лежат на некотором отрезке $[-R, R]$, где $|R| < \gamma(\Delta/\sigma)\sigma$ и $\gamma(r)$ — функция, введенная в лемме 3.

Доказательство. Для сокращения выкладок перейдем от r к r/σ и от α_k к α_k/α_0 и оставим прежние обозначения. Примем $A = \Delta/\sigma$, $A_k = \Delta_k/\sigma$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что глобальные максимумы функции

$$\tilde{\rho}(r) = \omega(r, 0) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \omega(r, A_k)$$

лежат на некотором отрезке $[-R, R]$, где $0 < R < \gamma(\Delta)\sigma$. Для упрощения обозначений в доказательстве будем считать $\rho = \tilde{\rho}$.

Сначала рассмотрим случай, когда все A_k положительны либо отрицательны. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $A_k > 0$, что по условию означает $A_k \geq A$.

На промежутке $r \in (-\infty, 0)$ выполняется $\rho'(r) > 0$, поэтому ρ не имеет экстремумов.

На промежутке $r \in [0, A/2]$, так как $\sum_{k=1}^K \alpha_k < 1$, справедливо $\rho' < \rho'_0$, где ρ_0 задано выражением (5.2). Из леммы 3 $\rho'_0(\gamma(A)) = 0$, следовательно, $\rho'(\gamma(A)) < 0$. Так как $\rho'(0) > 0$, то ρ обладает локальным максимумом в $(0, \gamma(A))$. Рассмотрим точку максимального значения в этом интервале и обозначим ее через r_0 . На отрезке $[\gamma(A), A/2]$ $\rho' < \rho'_0 \leq 0$, а потому максимум ρ на $[0, A/2]$ достигается в r_0 .

На промежутке $r \in (A/2, A]$ справедливо $\rho(r) < \rho(A/2 - (r - A/2))$, откуда максимум ρ на $[0, A]$ достигается на $[0, A/2]$, т. е. в r_0 .

Нам осталось рассмотреть промежутки $r \in (A, +\infty)$ и показать, что значения ρ на нем строго меньше $\rho(r_0)$. От противного допустим, что найдется такое $\tilde{A} > A$, что $\rho(\tilde{A}) \geq \rho(r_0)$. В силу убывания γ $\gamma(\tilde{A}) < \gamma(A)$, а потому

$$\rho(\gamma(\tilde{A})) \leq \rho(r_0) \leq \rho(\tilde{A}). \quad (5.4)$$

Обозначим $\tilde{\rho}_0(r) = \omega(r, 0) + \omega(r, \tilde{A})$. В силу того что $\omega(r, m)$ возрастает при $r < m$ и убывает при $r > m$, верно $\tilde{\rho}_0(\tilde{A}) - \tilde{\rho}_0(\gamma(\tilde{A})) \geq \rho(\tilde{A}) - \rho(\gamma(\tilde{A}))$.

Из (5.4) вытекает, что $\rho(\tilde{A}) - \rho(\gamma(\tilde{A})) \geq 0$, но по лемме 3 $\tilde{\rho}_0(\tilde{A}) < \tilde{\rho}_0(\gamma(\tilde{A}))$. Мы получили противоречие, следовательно, r_0 — глобальный максимум ρ на \mathbb{R} , $r_0 \in (0, \gamma(A))$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда некоторые A_k положительны и некоторые отрицательны. В этом случае согласно доказанной части теоремы максимумы частичных сумм для отрицательных и положительных A_k достигаются в $r_1 \in (-\gamma(A), 0)$ и $r_2 \in (0, \gamma(A))$ соответственно. Тогда глобальные максимумы ρ лежат в $[r_1, r_2]$. Если взять $R = \max(-r_1, r_2)$, то утверждение теоремы выполняется. \square

5.2. Вычисление области структурных различий

Здесь вместо (2.2) рассматривается следующая модель структурных различий изображений:

$$\xi = F \circ f + \delta_\Delta + \nu \in \mathcal{I}(X), \quad (5.5)$$

где ν — дискретный независимый нормальный белый шум, а δ_Δ отличается от δ условием отделимости от нуля на некоторое значение $\Delta > 0$:

$$\forall x \in \text{supp } \delta_\Delta \quad |\delta_\Delta(x)| \geq \Delta. \quad (5.6)$$

В силу того, что идеальный белый шум нереализуем в виде конечной функции [15], будем рассматривать его дискретные аппроксимации на уменьшающихся разбиениях X . Для этого, вместо класса конечнозначных изображений $\mathcal{I}(X)$ в данном подразделе будем рассматривать более узкие классы изображений.

А именно будем считать, что $X = \bigsqcup_{k=1}^K X_k$, где X_k — элементы регулярной сетки, разбивающей поле зрения X на K непересекающихся ячеек площадью $q > 0$ (аналог пикселей в обработке изображений). Обозначим этот набор ячеек через Ω_1 , $\text{card } \Omega_1 = K$. Также нам потребуются разбиения Ω_1 . Для натурального $d \geq 2$ обозначим через $\Omega_d = (X_j^d)_{j=1}^{Kd}$ дизъюнктный набор Kd множеств, полученных разбиением каждого X_k на d частей одинаковой меры q/d и занумерованных по порядку так, что $X_k = \bigsqcup_{j=a_k^d}^{b_k^d} X_j^d$, где $a_k^d = (k-1)d + 1$, $b_k^d = kd$. Справедливо включение $X_j^d \subseteq X_{k_j^d}$, где $k_j^d = \lfloor (j-1)/d + 1 \rfloor$.

Обозначим через $\mathcal{I}_{\Omega_d}(X) \subset \mathcal{I}(X)$ множество изображений, которые имеют постоянное значение в пределах ячеек разбиения Ω_d :

$$\mathcal{I}_{\Omega_d}(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{Kd} c_j \chi_{X_j^d} : c_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

По построению $\mathcal{I}_{\Omega_1}(X) \subseteq \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$. Для удобства определим через $c_j^d(h)$ значение функции $h \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$ на X_j^d , т. е. $h = \sum_{j=1}^{Kd} c_j^d(h) \chi_{X_j^d}$. Для сокращения записи будем обозначать $c_k(h) = c_k^1(h)$.

Будем считать, что $f, \delta_\Delta \in \mathcal{I}_{\Omega_1}(X)$, а $\nu \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$ для некоторого $d \geq 1$, т. е. множества уровней исходного изображения и функции структурного различия заданы на ячейках Ω_1 , а множества уровней функции шума — на разбиении этих ячеек. Как будет показано в теореме 8, выбрав достаточно большой параметр разбиения d , можно добиться устойчивого вычисления статистических свойств ξ на элементах X_k , что позволит перейти от дискретных статистических оценок к анализу свойств функций распределений соответствующих случайных величин.

Опишем более подробно *модель шума* ν . А именно обозначим через $v^d \in \mathbb{R}^{Kd}$ случайный нормальный вектор пространства \mathbb{R}^{Kd} с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2 \mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичная матрица размером $Kd \times Kd$, $\sigma^2 > 0$ — дисперсия шума), $v^d \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. По полю зрения X этот дискретный шум распределен следующим образом:

$$c_j^d(\nu) = v_j^d, \quad \nu(x) = \sum_{j=1}^{Kd} v_j^d \chi_{X_j^d}(x).$$

Рассмотрим схему квантования значений изображений. Для $\tau > 0$ и $h \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$ будем обозначать квантованное изображение $h^\tau \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$, построенное по правилу

$$c_j^d(h^\tau) = \tau \lfloor c_j^d(h) / \tau \rfloor.$$

Это изображение принимает значения из дискретного множества $\{\tau j : j \in \mathbb{Z}\}$ и аппроксимирует h с точностью τ : $c_j^d(h) \in [c_j^d(h^\tau), c_j^d(h^\tau) + \tau)$.

В теореме 6 было показано, что для $h \in \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}_f}$ множество $\text{Argmin}\{\|h - \tilde{h}\|_{L_0} : \tilde{h} \in \mathbf{V}_f\}$ состоит в точности из одного изображения и с учетом этого факта был однозначно определен оператор $\text{Proj}_f^{L_0}$ на $\mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}_f}$. Доопределим $\text{Proj}_f^{L_0}$ на $\mathcal{I}(X) \setminus \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}_f}$. Для произвольного $h \in \mathcal{I}(X) \setminus \mathbf{V}_{f, \mathfrak{M}_f}$ вследствие конечности h и f множество $\mathbf{A} = \text{Argmin}\{\|h - \tilde{h}\|_{L_0} : \tilde{h} \in \mathbf{V}_f\} \subset \mathcal{I}_\Omega(X)$ является конечным. Зададим $\text{Proj}_f^{L_0}(h) = \tilde{h} \in \mathbf{A}$ по правилу $c_k(\tilde{h}) = \min\{c_k(h') : h' \in \mathbf{A}\}$.

Алгоритм оценки $U = \text{supp } \delta_\Delta$ для ξ , заданного выражением (5.5), определим следующим образом:

$$\mathbf{U}_{f, \Delta, \tau}^{L_0}(\xi) = \left\{ x \in X : |\xi^\tau(x) - \text{Proj}_f^{L_0}(\xi^\tau(x))| \geq \frac{\Delta}{2} \right\}. \quad (5.7)$$

Обозначим через $\mathcal{I}_{\Omega_d}^\Delta(X)$ множество изображений из $\mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$, для которых выполняется условие (5.6).

Теорема 8. Пусть $\Delta, \sigma > 0$, $\Delta/\sigma > 2$, $q > 0$, $f \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ с вероятностью не менее $1 - \varepsilon$ найдутся такие $d_0 \in \mathbb{N}$, $\tau_0 > 0$, что для любых $d > d_0$, $\tau \in (0, \tau_0)$ и любых $F \in \mathcal{F}_b$, $U \in \mathfrak{M}_f$, $\delta_\Delta \in \mathcal{I}_{\Omega_d}^\Delta(X)$, $\text{supp } \delta_\Delta = U$, справедлива оценка

$$\mu(\mathbf{U}_{f, \Delta, \tau}^{L_0}(\xi) \triangle U) \leq 3\mu(X) \Phi\left(\gamma\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - \frac{\Delta}{2\sigma}\right) + \varepsilon, \quad (5.8)$$

где $\Phi(r)$ — функция стандартного нормального распределения, функция $\gamma(r)$ определяется уравнением (5.3), непрерывна и монотонно убывает к нулю при $r \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$.

Рассмотрим $d \in \mathbb{N}$. Обозначим $f_k = c_k(f)$, $\Delta_k = c_k(\delta_\Delta)$, $k = \overline{1, K}$. Для k таких, что $X_k \subseteq U$, выполняется

$$|\Delta_k| \geq \Delta, \quad (5.9)$$

в противном случае $\Delta_k = 0$. Имеем

$$\xi = \sum_{j=1}^{Kd} (F(f_{k_j^d}) + \Delta_{k_j^d} + v_j) \chi_{X_j^d}, \quad (5.10)$$

$$\xi^\tau = \sum_{j=1}^{Kd} \tau \left[\frac{F(f_{k_j^d}) + \Delta_{k_j^d} + v_j}{\tau} \right] \chi_{X_j^d}.$$

Для $i = \overline{1, n^f}$ обозначим $K_i = \text{card}\{k : X_k \subseteq S_i^f\}$,

$$\Psi^{\xi, i}(r) = \frac{1}{K_i d} \text{card}\{j : X_j^d \subseteq S_i^f, F(r_i^f) + \Delta_{k_j} + v_j < r\},$$

$$\Psi^{\xi^\tau, i}(r) = \frac{1}{K_i d} \text{card}\left\{j : X_j^d \subseteq S_i^f, \tau \left[\frac{F(r_i^f) + \Delta_{k_j} + v_j}{\tau} \right] < r\right\},$$

Для $z \in \mathbb{Z}$ справедливо $\Psi^{\xi, i}(z\tau) = \Psi^{\xi^\tau, i}(z\tau)$.

Для $h^* = \text{Proj}_f^{L_0}(\xi^\tau(x))$ введем $r_k^* = c_k(h^*)$, тогда

$$\begin{aligned} r_i^* &\in \text{Argmax}_{r \in \mathbb{R}} \left\{ \text{card}\left\{j : X_j^d \subseteq S_i^f, \tau \left[\frac{F(r_i^f) + \Delta_{k_j} + v_j}{\tau} \right] = r\right\} \right\} \\ &= \text{Argmax}_{r = z\tau, z \in \mathbb{Z}} \{ \Psi^{\xi^\tau, i}(r + \tau) - \Psi^{\xi^\tau, i}(r) \} = \text{Argmax}_{z \in \mathbb{Z}} \{ \Psi^{\xi, i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi, i}(z\tau) \}. \end{aligned}$$

То есть

$$r_i^* \in \text{Argmax}_{z \in \mathbb{Z}} \{ \Psi^{\xi, i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi, i}(z\tau) \}. \quad (5.11)$$

Займемся оценкой r_i^* . Примем $\Psi_k^\xi(r) = \frac{1}{d} \text{card}\{j = \overline{a_k^d, b_k^d}: F(f_k) + \Delta_k + v_j < r\}$. (Аналогично обозначим через $\Psi_k^{\xi^\tau}(r)$ соответствующее выражение для ξ^τ .) Функция Ψ_k является эмпирической функцией распределения для d реализаций случайной величины Υ_k , имеющей нормальную плотность распределения со средним $F(f_k) + \Delta_k$ и дисперсией σ^2 . Обозначим эту плотность распределения через $\rho_{\Upsilon_k}(r)$.

По теореме Гливленко — Кантелли [16; 17] при $d \rightarrow \infty$ эмпирическая функция распределения $\Psi_k^\xi(r)$ сходится равномерно (почти наверное, а значит и по вероятности) к функции распределения Φ_{Υ_k} случайной величины Υ_k . Следовательно, для произвольного $\varepsilon' > 0$ существует d_0 такое, что для $d > d_0$ с вероятностью не менее ε для всех $k = \overline{1, K}$ справедливо

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \left| \Psi_k^\xi(r) - \Phi_{\Upsilon_k}(r) \right| \leq \varepsilon'/2, \quad (5.12)$$

откуда

$$\left| \Psi_k^\xi((z+1)\tau) - \Psi_k^\xi(z\tau) - \int_{z\tau}^{(z+1)\tau} \rho_{\Upsilon_k}(r) dr \right| \leq \varepsilon'. \quad (5.13)$$

Обозначим через $k_m^i, m = \overline{1, K_i}$, набор k таких, что $X_k \subseteq S_i^f$. В этих обозначениях

$$\Psi^{\xi, i}(r) = \frac{1}{K_i} \sum_{m=1}^{K_i} \Psi_{k_m^i}^\xi(r).$$

Пусть

$$\rho_i(r) = \frac{1}{K_i} \sum_{m=1}^{K_i} \rho_{\Upsilon_{k_m^i}}(r). \quad (5.14)$$

Тогда из (5.13)

$$\left| \Psi^{\xi, i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi, i}(z\tau) - \int_{z\tau}^{(z+1)\tau} \rho_i(r) dr \right| \leq \varepsilon'.$$

Так как $\rho_i(r)$ непрерывна, для каждого $z \in \mathbb{Z}$ найдутся такие $\hat{r}_z, \hat{\varphi}_z \in \mathbb{R}$, что справедливо

$$\Psi^{\xi, i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi, i}(z\tau) = \tau \rho_i(\hat{r}_z) + \hat{\varphi}_z, \quad \hat{r}_z \in [z\tau, (z+1)\tau], \quad |\hat{\varphi}_z| \leq \varepsilon'. \quad (5.15)$$

По условию $U \in \mathfrak{U}_f$, следовательно, $\mu(U) < \mu(X \setminus U)$, а поэтому $\text{card}\{m = \overline{1, K_i}: \Delta_{k_m^i} = 0\} > K_i/2$. По теореме 7, примененной для $\tilde{\rho}_i(\cdot) = \rho_i(\cdot - F(r_i^f))$, глобальные максимумы $\rho_i(r)$ лежат в $[F(r_i^f) - \eta_i, F(r_i^f) + \eta_i]$, где $\eta_i < \gamma(\Delta/\sigma)\sigma$. Полагаем $\eta = \max_i \eta_i$, $\eta_0 = \gamma(\Delta/\sigma)\sigma$.

Рассмотрим $\hat{r}_i \in \text{Argmax}_{r \in \mathbb{R}} \rho_i$. Введем $B_i = \sup_{r \in \mathbb{R} \setminus (-\eta_0, \eta_0)} \rho_i(r)$. Так как $B_i < \rho_i(\hat{r}_i)$, можно выбрать $\varepsilon' > 0$ настолько малым, чтобы для всех i выполнялось

$$\rho_i(\hat{r}_i) - B_i > 4\varepsilon'. \quad (5.16)$$

Будем считать $\tau > 0$ настолько малым, что

$$\tau < (\eta_0 - \eta)/2. \quad (5.17)$$

$$\forall r \quad r \in (-\infty, F(r_i^f) - \eta_0 + 2\tau] \cup [F(r_i^f) + \eta_0 - 2\tau, +\infty), \quad \rho_i(r) \leq B_i + \varepsilon', \quad (5.18)$$

$$\forall r \in [\hat{r}_i - \tau, \hat{r}_i + \tau] \quad \rho_i(r) \geq \rho_i(\hat{r}_i) - \varepsilon', \quad (5.19)$$

Для всех $z \in \mathbb{Z}$ таких, что $|z\tau - F(r_i^f)| \geq \eta_0 - \tau$, имеем $[z\tau, (z+1)\tau] \subset (-\infty, F(r_i^f) - \eta_0 + 2\tau] \cup [F(r_i^f) + \eta_0 - 2\tau, +\infty)$, из (5.15) и (5.18) получаем

$$z \in \mathbb{Z}, \quad |z\tau - F(r_i^f)| \geq \eta_0 - \tau \Rightarrow \frac{\Psi^{\xi, i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi, i}(z\tau)}{\tau} \leq B_i + 2\varepsilon'.$$

Существует $z_i \in \mathbb{Z}$ такой, что $[z_i\tau, (z_i + 1)\tau] \subset [r_i - \tau, r_i + \tau]$. Из (5.15) и (5.19) выводим

$$\frac{\Psi^{\xi, i}((z_i + 1)\tau) - \Psi^{\xi, i}(z_i\tau)}{\tau} \geq \rho_i(r_i) - 2\varepsilon'.$$

Из последних двух соотношений с учетом (5.11) и (5.16) получаем $|r_i^* - F(r_i^f)| \leq \eta_0 - \tau$, т. е.

$$|r_i^* - F(r_i^f)| \leq \gamma(\Delta/\sigma)\sigma - \tau. \quad (5.20)$$

Следовательно, $|h^*(x) - (F \circ f)(x)| \leq \gamma(\Delta/\sigma)\sigma - \tau$.

Теперь мы готовы построить оценку $\mu(\mathbf{U}_{f, \Delta, \tau}^{L_0}(\xi) \Delta U)$ и завершить доказательство теоремы. Определим $\tilde{U} = \mathbf{U}_{f, \Delta, \tau}^{L_0}(\xi) = \{x \in X : |\xi^\tau(x) - h^*| \geq \Delta/2\}$. В этих обозначениях $\mu(\tilde{U} \Delta U) = \mu(\tilde{U} \setminus U) + \mu(U \setminus \tilde{U})$. Для $j = \overline{1, K^d}$ введем индекс i_j^d такой, что $X_j^d \subseteq S_{i_j^d}^f$, и для $k = \overline{1, K}$ введем индекс i_k такой, что $X_k \subseteq S_{i_k}^f$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{U} \setminus U) &= \frac{q}{d} \text{card} \left\{ j : \Delta_{i_j^d} = 0, \left| \tau \left[\frac{F(r_{i_j^d}^f) + \Delta_{i_j^d} + v_j}{\tau} \right] - r_{i_j^d}^* \right| \geq \Delta/2 \right\} \\ &\leq q \sum_{k: \Delta_k = 0} \left(\Psi_k^{\xi^\tau}(r_{i_k}^* - \Delta/2 + \tau) + 1 - \Psi_k^{\xi^\tau}(r_{i_k}^* + \Delta/2) \right) \\ &\leq q \sum_{k: \Delta_k = 0} \left(\Psi_k^\xi(r_{i_k}^* - \Delta/2 + \tau) + 1 - \Psi_k^\xi(r_{i_k}^* + \Delta/2 - \tau) \right). \end{aligned}$$

С учетом (5.12) $\mu(\tilde{U} \setminus U) \leq q \sum_{k: \Delta_k = 0} (\Phi_{\Upsilon_k}(r_{i_k}^* - \Delta/2 + \tau) + 1 - \Phi_{\Upsilon_k}(r_{i_k}^* + \Delta/2 - \tau)) + qK\varepsilon'$.

Считаем ε' настолько малым, что $qK\varepsilon' \leq \varepsilon/2$. Из (5.20) $|r^* - F(r_{0_{i_k}}^f) \pm \tau| \leq \gamma(\Delta/\sigma)\sigma$. Для $k = \overline{1, K}$ таких, что $\Delta_k = 0$, верно $\Phi_{\Upsilon_k}(r) = \Phi((r - F(r_{0_{i_k}}^f))/\sigma)$. Кроме того, $1 - \Phi(r) = \Phi(-r)$, откуда

$$\mu(\tilde{U} \setminus U) \leq 2qK\Phi\left(\frac{\gamma(\Delta/\sigma)\sigma - \Delta/2}{\sigma}\right) + \varepsilon/2 = 2\mu(X)\Phi\left(\gamma(\Delta/\sigma) - \frac{\Delta}{2\sigma}\right) + \varepsilon/2. \quad (5.21)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus \tilde{U}) &\leq q \sum_{k: \Delta_k \neq 0} \left(\Phi_{\Upsilon_k}(r_{i_k}^* + \Delta/2 + \tau) - \Phi_{\Upsilon_k}(r_{i_k}^* - \Delta/2 - \tau) \right) + \varepsilon/2 \\ &\leq q \sum_{k: \Delta_k \neq 0} \Phi_{\Upsilon_k}(r_{i_k}^* + \Delta/2 + \tau) + \varepsilon/2 = q \sum_{k: \Delta_k \neq 0} \Phi\left(\frac{r_{i_k}^* - F(r_{0_{i_k}}^f) + \Delta/2 + \tau - \Delta_k}{\sigma}\right) + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Согласно (5.20) и (5.9) получаем

$$\mu(U \setminus \tilde{U}) \leq q \sum_{k: \Delta_k \neq 0} \Phi\left(\frac{\gamma(\Delta/\sigma)\sigma + \Delta/2 - \Delta_k}{\sigma}\right) + \varepsilon/2 \leq qK\Phi\left(\gamma(\Delta/\sigma) - \frac{\Delta}{2\sigma}\right) + \varepsilon/2.$$

То есть

$$\mu(U \setminus \tilde{U}) \leq \mu(X)\Phi\left(\gamma(\Delta/\sigma) - \frac{\Delta}{2\sigma}\right) + \varepsilon/2. \quad (5.22)$$

Так как $\mu(\tilde{U} \Delta U) = \mu(\tilde{U} \setminus U) + \mu(U \setminus \tilde{U})$, то в силу (5.21) и (5.22) теорема доказана. \square

Из теоремы следует, что для фиксированного f с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, при неограниченном увеличении отношения Δ/σ множество, вычисляемое оператором $\mathbf{U}_{f, \Delta, \tau}^{L_0}(\xi)$, стремится по мере к множеству U равномерно по F, U, δ_Δ, ν .

Заметим, что оценки (5.21) и (5.22) сохраняют свою справедливость, если вместо $\mu(X)$ в них использовать $\mu(\tilde{U})$ и $\mu(U)$ соответственно. В этом случае они позволяют получить оценки сверху для ошибок I и II рода [18, р. 464–465] в задаче нахождения U .

6. Вычислительный эксперимент

В этом разделе приводятся результаты численного эксперимента по применению алгоритма (4.2) для вычисления структурных различий между двумя растровыми цифровыми изображениями и сравнению его с алгоритмом (4.3).

В качестве f рассмотрим изображение Lena [19] размером 512×512 пикселей с 256 градациями яркости от 0 до 255. В качестве g рассмотрим изображение f , к которому применена операция инвертирования яркостей $F(r) = 255 - r$ и которое затем искажено в квадратной области U размером 256×256 пикселей путем установки значения $Q = 127$ (см. рис. 1).

На рис. 2 показаны изображение множества U и результаты его оценки алгоритмами: предложенным (4.2) и стандартным (4.3). При этом в качестве порога второго алгоритма было взято значение $T = 20$, минимизирующего сумму квадратов ошибок первого и второго рода [18] в задаче идентификации пикселей из U .

Частоты ложной тревоги и пропуска пикселей U для предложенного алгоритма составили $E_I \approx 0.0120$, $E_{II} \approx 0.0477$. Для стандартного алгоритма упомянутые частоты составили: $E_I \approx 0.1664$, $E_{II} \approx 0.3071$.



Рис. 1. Изображения f и g для вычислительного эксперимента.

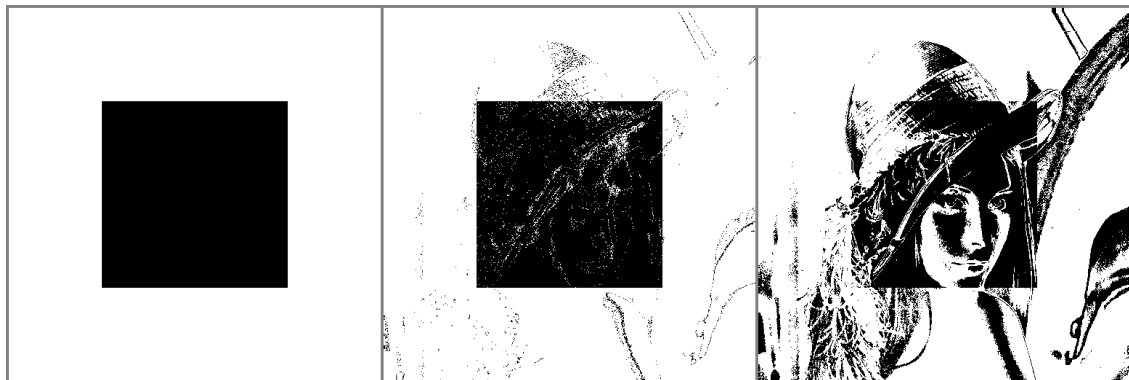


Рис. 2. Изображения множеств U и \tilde{U} для предложенного алгоритма (4.2) и множества \tilde{U} для стандартного алгоритма (4.3) с $T = 20$. Черный цвет означает принадлежность пикселя соответствующему множеству.

Авторы благодарят чл.-корр. А.Г. Ченцова и д-ра физ.-мат. наук А.Л. Агеева за ценные советы при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пытьев Ю.П.** Морфологические понятия в задачах анализа изображений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1283–1286.
2. **Пытьев Ю.П., Чуличков А.И.** Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010. 336 с. ISBN: 978-5-9221-1225-3.
3. **Визильтер Ю.В.** Обобщенная проективная морфология // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 4. С. 384–399. ISSN 0134-2452.
4. **Перевалов Д.С.** Предельная теорема для смещенной метрики Хэмминга в задаче классификации с известным уровнем структурного шума // Современные проблемы математики и ее приложения: тр. 45-й Междунар. мол. шк.-конф. / ИММ УрО РАН; УрФУ. Екатеринбург, 2014. С. 208–211.
5. **Корнилов Ф.А.** Разработка методов распознавания структурных различий изображений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2015, 16 с.
6. **Корнилов Ф.А., Перевалов Д.С.** Об одной проблеме оптимизации, возникающей при использовании метрики Хэмминга в задаче структурного сравнения изображений // Математическое программирование и приложения: 15-я Всерос. конф. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 156–157.
7. Use of the zero norm with linear models and kernel methods / J. Weston, A. Elisseeff, B. Schoelkopf, M. Tipping // J. Mach. Learn. Res. 2003. Vol. 3. Spec. Issue Var. Feature Sel. P. 1439–1461.
8. **Groötschel M., Lovász L.** Combinatorial optimization // Handbook of Combinatorics / eds. R.O. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1995. Vol. 2. P. 1341–1598.
9. **Hamming R.W.** Error detecting and error correcting codes // Bell System Tech. J. 1950. Vol. 29, no. 2. P. 147–160. doi: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x.
10. **Everitt B., Hand D.J.** Finite mixture distributions. London; New York: Chapman and Hall, 1981. 143 p. (Ser. Book Monographs on Applied Probability and Statistics.) doi: 10.1007/978-94-009-5897-5.
11. **Robertson C.A., Fryer J.G.** Some descriptive properties of normal mixture // Scandinavian Actuarial J. 1969. Vol. 1969, iss. 3-4. P. 137–146. doi: 10.1080/03461238.1969.10404590.
12. **Behboodian J.** On the modes of a mixture of two normal distributions // Technometrics. 1970. Vol. 12, no. 1. P. 131–139. doi: 10.2307/1267357.
13. **Апраужева Н. Н., Сорокин С. В.** Об унимодальности простейшей гауссовой смеси // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 5. С. 838–846.
14. **Schilling M.F., Watkins A.E., Watkins W.** Is human height bimodal? // Amer. Statist. 2002. Vol. 56, no. 3. P. 223–229.
15. **Якубов В.П.** Статистическая радиофизика: уч. пособие. Томск: Изд. НТЛ, 2006. 132 с.
16. **Glivenko V.** Sulla determinazione empirica della legge di probabilita // Giorn. Ist. Ital. Attuari. 1933. Vol. 4. P. 92–99.
17. **Cantelli F.P.** Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita // Giorn. Ist. Ital. Attuari. 1933. Vol. 4. P. 221–424.
18. **Roxy P., Devore J.L.** Statistics: The Exploration and analysis of data. New York etc.: Cengage Learning, 2011. 816 p. ISBN-10: 0495390879.
19. Изображение Lena. The USC-SIPI Image Database.
URL: <http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc &image=12>.

Костоусов Виктор Борисович

канд. физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: vkost@imm.uran.ru

Перевалов Денис Сергеевич

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: perevalovds@imm.uran.ru

Поступила 22.11.2016

REFERENCES

1. Pyt'ev Ju.P. Morphological concepts in problems of image analysis. *Sov. Phys. Dokl.*, 1975, vol. 20, no. 10, pp. 664–666.
2. Pyt'ev Yu. P., Chulichkov A.I. *Metody morfologicheskogo analiza izobrazhenii* [Methods of morphological image analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 336 p. ISBN: 978-5-9221-1225-3.
3. Vizil'ter Yu.V. Generalized projective morphology. *Komp'yuternaya optika*, 2008, vol. 32, no. 4, pp. 384–399 (in Russian). ISSN 0134-2452.
4. Perevalov D.S. *Predel'naya teorema dlya smeshchennoi metriki Khemminga v zadache klassifikatsii s izvestnym urovnem strukturnogo shuma* [A limit theorem for the shifted Hamming's metrics in the problem of classification with known level of the structural noise]. *Proceedings of the 45th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications"*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Ural Federal University, Ekaterinburg, 2014, pp. 208–211.
5. Kornilov F.A. Development of the methods of the structural image differences recognition. *Ph.D. Thesis Abstract*, Chelyabinsk, 2015, 16 p. (in Russian)
6. Kornilov F.A., Perevalov D.S. *Ob odnoi probleme optimizatsii, vznikayushchei pri ispol'zovanii metriki Khemminga v zadache strukturnogo sravneniya izobrazhenii* [On one optimization problem that arises when using Hamming's metrics in the problem of structural image comparison]. *Mathematical programming and applications: 15th the Russian national Conference*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, 2015, pp. 156–157.
7. Weston J., Elisseeff A., Schoelkopf B., Tipping M. Use of the zero norm with linear models and kernel methods. *J. Mach. Learn. Res.*, 2003, vol. 3, Spec. Issue Var. Feature Sel., pp. 1439–1461.
8. Groötschel M., Lovász L. Combinatorial optimization. *Handbook of Combinatorics*, eds. R.O. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1995, vol. 2. pp. 1341–1598.
9. Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. J.*, 1950, vol. 29, no. 2, pp. 147–160. doi: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x.
10. Everitt B., Hand D.J. *Finite mixture distributions*. London, New York: Chapman and Hall, 1981, Ser. Book Monographs on Applied Probability and Statistics, 143 p. doi: 10.1007/978-94-009-5897-5.
11. Robertson C.A., Fryer J.G. Some descriptive properties of normal mixture. *Scandinavian Actuarial J.*, 1969, vol. 1969, iss. 3-4, pp. 7–146. doi: 10.1080/03461238.1969.10404590.
12. Behboodian J. On the modes of a mixture of two normal distributions. *Technometrics*, 1970, vol. 12, no. 1, pp. 131–139. doi: 10.2307/1267357.
13. Aprausheva N.N., Sorokin S.V. On the unimodality of simple Gaussian mixtures. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 5, pp. 785–793.
14. Schilling M.F., Watkins A.E., Watkins W. Is human height bimodal? *Amer. Statist.*, 2002, vol. 56, no. 3, pp. 223–229.
15. Yakubov V.P. *Statisticheskaya radiofizika: Uchebnoe posobie* [Statistical radiophysics: Tutorial] Tomsk: Publ. Nauch. Tekh. Lit., 2006, 132 p.
16. Glivenko V. Sulla determinazione empirica della legge di probabilita. *Giorn. Ist. Ital. Attuari.*, 1933, vol. 4, pp. 92–99.
17. Cantelli F.P. Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. *Giorn. Ist. Ital. Attuari.*, 1933, vol. 4, pp. 221–424.
18. Roxy P., Devore J.L. *Statistics: The Exploration and analysis of data*. New York etc.: Cengage Learning, 2011, 816 p. ISBN-10: 0495390879.
19. Image Lena. *The USC-SIPI Image Database*. Available at: <http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc&image=12>.

Kostousov V.B. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia
e-mail: vkost@imm.uran.ru

Perevalov D.S. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia
e-mail: perevalovds@imm.uran.ru