ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

Е. А. Колпакова

Статья посвящена исследованию системы уравнений первого порядка типа Гамильтона — Якоби. Рассматривается сильно связанная иерархическая система: первое уравнение не зависит от второго, а гамильтониан второго уравнения зависит от градиента решения первого уравнения. Данная система допускает последовательное решение. Решение первого уравнения понимается в смысле теории минимаксных (вязкостных) решений и получается с использованием формулы Лакса — Хопфа. Подстановка решения первого уравнения во второе уравнение Гамильтона — Якоби приводит к уравнению Гамильтона — Якоби с разрывным гамильтонианом. Его решение основано на концепции М-решений, введенной А. И. Субботиным и выбирается в классе многозначных отображений. Таким образом, решение исходной системы является прямым произведением однозначного и многозначного отображений, удовлетворяющих первому и второму уравнениям в минимаксном смысле и в смысле М-решений. Для случая, когда решение первого уравнения недифференцируемо лишь вдоль одной линии Ранкино — Гюгонио доказаны теоремы существования и единственности. Для решения системы получена репрезентативная формула в терминах характеристик Коши. Исследованы свойства решения и их зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: система уравнений Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, М–решение, метод характеристик Коши.

E. A. Kolpakova. On the solution of a system of Hamilton–Jacobi equations of special form.

The paper is concerned with the investigation of a system of first-order Hamilton–Jacobi equations. We consider a strongly coupled hierarchical system: the first equation is independent of the second, and the Hamiltonian of the second equation depends on the gradient of the solution of the first equation. The system can be solved sequentially. The solution of the first equation is understood in the sense of the theory of minimax (viscosity) solutions and can be obtained with the help of the Lax–Hopf formula. The substitution of the solution of the first equation in the second Hamilton–Jacobi equation results in a Hamilton–Jacobi equation with discontinuous Hamiltonian. This equation is solved with the use of the idea of M-solutions proposed by A.I. Subbotin, and the solution is chosen from the class of set-valued mappings. Thus, the solution of the original system of Hamilton–Jacobi equations is the direct product of a single-valued and set-valued mappings, which satisfy the first and the second equations in the minimax and M-solution sense, respectively. In the case when the solution of the first equation is nondifferentiable only along one Rankine–Hugoniot line, existence and uniqueness theorems are proved. A representative formula for the solution of the system is obtained in terms of Cauchy characteristics. The properties of the solution and their dependence on the parameters of the problem are investigated.

Keywords: system of Hamilton–Jacobi equations, minimax solution, M-solution, Cauchy method of characteristics.

MSC: 35D35, 49J15, 49J53

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-158-170

Введение

Сильно связанные системы уравнений Гамильтона — Якоби описывают функцию цены в неантагонистических дифференциальных играх [1]. В настоящее время эта область изучена недостаточно полно: нет общепринятого определения обобщенного решения сильно связанной системы уравнений Гамильтона — Якоби. Вопрос о связи систем уравнений Гамильтона — Якоби и нэшевских равновесий исследован в работах [2; 3]. В работе Д. Острова [4] решение

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №14-01-00168).

системы уравнений Гамильтона — Якоби рассматривалось как предел вязких решений. Он показал неединственность предложенного решения. Таким образом, вопросы существования и единственности обобщенного решения остаются открытыми.

В данной статье рассматривается вопрос о построении обобщенного решения сильно связанной системы уравнений Гамильтона — Якоби специального вида. Первое уравнение системы не зависит от второго, а второе уравнение зависит от производной решения первого уравнения. Системы такого вида описывают поведение игроков в иерархических дифференциальных играх [5]: первое уравнение описывает поведения лидера, а второе уравнение — поведение ведомого игрока. Если продифференцировать рассматриваемую систему уравнений Гамильтона — Якоби по фазовой переменной, то полученная система квазилинейных уравнений может быть применена к описанию газовой динамики без давления, а также крупномасштабной структуры вселенной [6; 7].

В рассматриваемой системе уравнений Гамильтона — Якоби классического решения, как правило, не существует глобально. Возникает необходимость рассматривать обобщенные решения. Теория обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби развита А. И. Субботиным в [8]. В этой работе введено понятие минимаксного решения, которое опирается на свойство выживаемости обобщенных характеристик в графике обобщенного решения. Теоремы существования и единственности минимаксного решения доказаны в работе [8]. Естественным обобщением минимаксного решения является понятие М-решения (многозначного решения) [9]. В данной статье предложено определение обобщенного решения для системы уравнений Гамильтона — Якоби, которое опирается на понятия минимаксного решения и М-решения.

Приведен алгоритм построения обобщенного решения, в основе которого лежит метод характеристик Коши. Как известно, метод характеристик Коши применяется для построения классического решения уравнения Гамильтона — Якоби. Однако в нелинейных задачах решение уравнения Гамильтона — Якоби, как правило, теряет гладкость и является только непрерывной функцией. В работах Н. Н. Субботиной [10] метод характеристик получил новое развитие. Опираясь на двойственность задачи оптимального управления и принципа максимума Понтрягина, Н. Н. Субботина получила репрезентативную формулу для минимаксного решения [11].

Цель предлагаемой статьи — обосновать, что метод характеристик Коши может быть использован для построения М-решения. В работе [12] доказано, что в графике минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби выживают и классические характеристики уравнения Гамильтона — Якоби. В настоящей статье доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения системы уравнений Гамильтона — Якоби. В конце статьи приведен пример, иллюстрирующий предложенный алгоритм построения обобщенного решения системы уравнений Гамильтона — Якоби.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему из двух уравнений Гамильтона — Якоби. Эта система описана в работе Ф. Хуанг [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u_x) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v_x g(u_x) = 0, \quad u(T,x) = u_T(x), \quad v(T,x) = v_T(x). \tag{1.1}$$

Здесь $t \in [0,T]$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, функции u, v определены на Π_T со значениями в $\mathbb{R}$, где $\Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}$, функции $F, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Предположим, что

$A1$ функция $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема, $F''(u_x) > 0$. Функция F обладает подлинейным ростом или условием $\lim_{|p|\to\infty} F(p)/|p| = +\infty$;

$A2$ функция $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема, обладает подлинейным ростом, $g'(u_x) > 0$;

$A3$ функция $u_T(\cdot)$ глобально липшицева, функция $v_T(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

Напомним понятие субдифференциала функции.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $D^-u(t,x) \in \mathbb{R}^2$ $\big(D^+u(t,x) \in \mathbb{R}^2\big)$ называется субдифференциалом (супердифференциалом) функции $u(\cdot,\cdot)\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ в точке $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}$, если для любых $\delta t \in \mathbb{R}$, $\delta x \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$D^-u(t,x) = \big\{(\alpha,p) \in \mathbb{R}^2\colon u(t+\delta t, x+\delta x) - u(t,x) \ge \alpha\delta t + p\delta x + o(|\delta t| + |\delta x|)\big\},$$

$$D^+u(t,x) = \big\{(\alpha,p) \in \mathbb{R}^2\colon u(t+\delta t, x+\delta x) - u(t,x) \le \alpha\delta t + p\delta x + o(|\delta t| + |\delta x|)\big\}.$$

Построим решение первого уравнения системы (1.1), применяя теорию минимаксного/вязкостного решения. Напомним определение обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби [13].

О п р е д е л е н и е 2. Минимаксным/вязкостным решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u_x) = 0, \quad u(T,x) = u_T(x)$$

называется непрерывная функция $u : \Pi_T \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\alpha + F(p) \le 0, \quad (\alpha,p) \in D^+u(t,x), \quad \alpha + F(p) \ge 0, \quad (\alpha,p) \in D^-u(t,x);\ u(T,x) = u_T(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь D^-u, D^+u — суб- и супердифференциал функции u соответственно.

В работах [8; 14] доказано, что при выполнении условий $A1$, $A3$ минимаксное/вязкостное решение существует и единственно.

В работе [11] доказаны следующие свойства минимаксного решения.

1. Минимаксное решение u — локально липшицевая функция.

2. $D^-u(t,x) \ne \varnothing$ для любой точки $(t,x) \in \Pi_T$.

3. Функция u непрерывно дифференцируема всюду в полосе Π_T кроме множества точек $(t,x) = (t,\alpha_i(t))$, $t \in [t_0,t_1]$, $t_0,t_1 \in [0,T]$. На указанном множестве точек функция u недифференцируема. Функции $\alpha_i : \Pi_T \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы [15; 16], причем функций α_i не более чем счетное число. Функции α_i удовлетворяют условию Ранкина—Гюгонио:

$$\dot\alpha_i(t) = \frac{[F(u_x)](t)}{[u_x](t)}. \tag{1.2}$$

Здесь символ $[\cdot]$ обозначает скачок функции через кривую α, т. е.

$$[u_x](t) = \lim_{x\to\alpha(t)+0} u_x(t,x) - \lim_{x\to\alpha(t)-0} u_x(t,x),$$

$$[F(u_x)](t) = \lim_{x\to\alpha(t)+0} F(u_x(t,x)) - \lim_{x\to\alpha(t)-0} F(u_x(t,x)).$$

Далее в статье будем предполагать, что u_x имеет одну линию разрыва $\alpha(\cdot)$. Этот случай достаточно часто реализуется, например, при выпуклой u_T.

Обозначим символом F^* функцию сопряженную к F. Согласно формуле Лакса—Хопфа [13] решение первого уравнения имеет вид

$$u(t,x) = \max_{y\in\mathbb{R}}\Big\{(t-T)F^*\Big(\frac{x-y}{t-T}\Big) + u_T(y)\Big\}, \quad 0 \le t < T, \tag{1.3}$$

тогда

$$u_x(t,x) = G\Big(\frac{x-y}{t-T}\Big).$$

Здесь $G = (F^*)'^{-1}$. Функция $(F^*)'^{-1}$ существует, так как $F'' > 0$ в силу условия $A1$. Заметим, что функция u_x может быть разрывной по переменной x в силу свойств минимаксного решения.

Рассмотрим задачу Коши для второго уравнения системы (1.1). Обозначим гамильтониан $H(t,x,s) = sg(u_x(t,x))$. Функция H может быть разрывной по переменной x. А. И. Субботин предложил понятие М-*решения* для уравнения Гамильтона — Якоби с разрывным по x гамильтонианом.

Рассмотрим области

$$D_1 = \{(t,x) \in \Pi_T \colon t \in [t_0,t_1],\ x \geq \alpha(t)\} \cup [t_1,T] \times \mathbb{R},$$

$$D_2 = \{(t,x) \in \Pi_T \colon t \in [t_0,t_1],\ x \leq \alpha(t)\} \cup [t_1,T] \times \mathbb{R}.$$

Обозначим через u_i сужение функции u_x на область D_i, $i = 1,2$. Согласно свойству 2 минимаксного решения функция u субдифференцируема, тогда $u_2(t,\alpha(t)) \leq u_1(t,\alpha(t))$, $t \in [t_0,t_1]$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$E(t,x) = \begin{cases} \{(g(u_x(t,x)),0)\}, & (t,x) \neq (t,\alpha(t)), \\ [g(u_2),g(u_1)] \times \{0\}, & (t,x) = (t,\alpha(t)). \end{cases} \tag{1.4}$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$(\dot{x},\dot{z}) \in E(t,x). \tag{1.5}$$

Покажем, что E является допустимым для H многозначным отображением в смысле определения подразд. 2.5 работы [8]. Действительно, для любых $x \in \mathbb{R}$ множество $E(t,x)$ выпукло и компактно в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Отображение $x \to E(t,x)$ полунепрерывно сверху, так как $u_i(t,x) \in D^-u(t,x)$, $i = 1,2$, отображение $(t,x) \to D^-u(t,x)$ полунепрерывно сверху по включению (см. [8]) и g монотонна. Функция H не зависит от u, следовательно, условие монотонности по u можно не проверять. Для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ при любом выборе $p^0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$H(x,s) = \min\{\varphi s - \psi \colon (\varphi,\psi) \in E(t,x)\} \geq \min\{\varphi s - \psi \colon (\varphi,\psi) \in E(t,x)\}.$$

Поскольку $E(t,x)$ не зависит от p, то неравенство выполняется. Аналогично для любых $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ найдется $p^0 \in \mathbb{R}$ такой, что

$$H(x,s) = \max\{\varphi s - \psi \colon (\varphi,\psi) \in E(t,x)\} \leq \max\{\varphi s - \psi \colon (\varphi,\psi) \in E(t,x)\}.$$

Напомним определение многозначного решения для второго уравнения системы (1.1) [9].

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $w \subset [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — замкнутое множество. Будем говорить, что w слабо инвариантно относительно дифференциального включения (1.5), если для произвольной точки $(t_0,x_0,z_0) \in w$ существуют $\tau > 0$ и траектория (x,z) дифференциального включения (1.5) такая, что $(x(0),z(0)) = (x_0,z_0)$, $(t,x(t),z(t)) \in w$ для всех $t \in [0,\tau]$.

В определении 3 в качестве (1.5) можно использовать любое допустимое дифференциальное включение, которое удовлетворяет условиям, описанным в [8]. Для удобства изложения будем использовать дифференциальное включение (1.5) с правой частью вида (1.4).

О п р е д е л е н и е 4. Замкнутое максимальное по включению многозначное отображение $v \colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется М-решением уравнения Гамильтона — Якоби, если $\mathrm{gr}\ v$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (1.5), $v(T,x) = v_T(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и для любого многозначного отображения $y \colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$, у которого $y(T,x) = v_T(x)$, $\mathrm{gr}\ y$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (1.5), выполнено $\mathrm{gr}\ y \subseteq \mathrm{gr}\ v$.

Дадим определение обобщенного решения системы Гамильтона — Якоби (1.1).

Определение 5. Многозначное отображение (u, v), где $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $v\colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется обобщенным решением системы уравнений Гамильтона — Якоби (1.1), если

функция u — минимаксное решение первого уравнения системы (1.1),

функция v — М-решение второго уравнения системы (1.1).

В зависимости от значений $\dot{\alpha}$, которые определяются формулой (1.2), рассмотрим следующие случаи.

1. $\dot{\alpha}(t) \in [g(u_2(t, \alpha(t))), g(u_1(t, \alpha(t)))], \quad t \in [t_0, t_1]$.

2. $\dot{\alpha}(t) < g(u_2(t, \alpha(t)))$, или $\dot{\alpha}(t) > g(u_1(t, \alpha(t))), \quad t \in [t_0, t_1]$.

Для каждого из указанных случаев будет построено решение системы (1.1).

2. Многозначное решение системы уравнений Гамильтона — Якоби

Предполагаем, что

$$\dot{\alpha}(t) \in [g(u_2(t, \alpha(t))), g(u_1(t, \alpha(t)))], \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

Будем строить решение второго уравнения системы (1.1) с помощью метода характеристик Коши.

В точках непрерывности функции $u_x(\cdot)$ характеристическая система имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = g(u_x(t, x)), \quad \dot{\tilde{z}} = 0 \tag{2.2}$$

с краевым условием

$$\widetilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \widetilde{z}(T, \xi) = v_T(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Покажем, что в окрестности точек непрерывности u_x эта функция является липшицевой. Пусть $x_1, x_2 \in D_i$, и u_x непрерывна в точках (t, x_j), $j = 1, 2$. Тогда

$$|u_x(t, x_1) - u_x(t, x_2)| = \Big|G\Big(\frac{x_1 - y(t, x_1)}{t - T}\Big) - G\Big(\frac{x_2 - y(t, x_2)}{t - T}\Big)\Big| = \Big|G'\Big(\frac{\vartheta}{t - T}\Big)(x_1 - x_2)\Big|.$$

Напомним, что $u_x(T, x) = u'_T(x)$. Функция G непрерывно дифференцируема, так как F дважды дифференцируема и отображение $x \to y(t, x)$ не убывает [13]. Величина $G'\Big(\dfrac{\vartheta}{t - T}\Big)$ ограничена при $\vartheta \in (x_1, x_2)$, $t \in [t_0, \tau]$, $\tau < T$, поскольку G' непрерывна.

Решение характеристической системы (2.2), (2.3) существует и единственно. Отметим, что характеристики $\widetilde{x}(\cdot, \xi)$ системы (2.2), (2.3) приходят в каждую точку (t, x) полосы Π_T, так как первое уравнение характеристической системы $\dot{x} = g(u_x(t, x))$ решается независимо от других уравнений, и задача Коши для него корректна для любой точки из области непрерывности u_x. Пусть точка $(t_0, x_0) \in D_1$. Тогда все решения задач Коши

$$\dot{x} = g(u_1(t, x)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D_1$$

лежат не ниже кривой α, поскольку $\dot{\alpha}(t) \le g(u_1(t, \alpha(t)))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Аналогично для произвольной точки $(t_0, x_0) \in D_2$ решения задач Коши

$$\dot{x} = g(u_2(t, x)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D_2$$

лежат не выше α. Таким образом, характеристика $\tilde{x}(\cdot)$, стартующая из начальной точки (t_0, x_0) в области D_i, остается в этой области на отрезке $[t_0, T]$.

Решение $(x_i(\cdot, \alpha(t^0)), z_i(\cdot, \alpha(t^0)))$, $t^0 \in [t_0, t_1]$, задач Коши

$$\dot{x} = g(u_i(t, x)), \quad x(t^0) = \alpha(t^0)$$

существует, единственно при фиксированном t^0. Решения $(x_i(\cdot,\alpha(t^0)),z_i(\cdot,\alpha(t^0)))$, $t^0\in[t_0,t_1]$, лежат в области D_i, $i=1,2$ в силу условия (2.1). Заметим, что решения $(x_i(\cdot,\alpha(t^0)),z_i(\cdot,\alpha(t^0)))$ совпадают с характеристиками системы (2.2), (2.3). Отсюда следует, что для точек $(t,\alpha(t))\in D_1\cap D_2$, $t\in[t_0,t_1]$, существуют две характеристики $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $i=1,2$, такие, что $\alpha(t)=\tilde{x}(t,\xi_i)\in D_i$, $t\in[t_0,t_1]$, $i=1,2$. Если существует i такое, что $\dot{\alpha}=g(u_i(t,\alpha(t)))$, то одна из указанных характеристик совпадает с α.

Рассмотрим многозначное отображение v вида

$$v(t,x)=\begin{cases}\{\tilde{z}(t,\xi)\}, & x=\tilde{x}(t,\xi)\neq\alpha(t),\\ \operatorname{co}\{\tilde{z}_1(t,\xi_1),\tilde{z}_2(t,\xi_2)\}, & x=\alpha(t),\end{cases}$$

где $(\tilde{x}_i,\tilde{z}_i)$, $i=1,2$, — решения характеристической системы (2.2), (2.3) в области D_i, $i=1,2$.

Уточним вид v, подставив решение характеристической системы:

$$v(t,x)=\begin{cases}v_T\Big(x-\displaystyle\int_T^t g(u_x(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big), \quad x\neq\alpha(t),\\ \operatorname{co}\Big\{v_T\Big(\alpha(t)-\displaystyle\int_T^t g(u_2(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big),v_T\Big(\alpha(t)-\displaystyle\int_T^t g(u_1(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)\Big\}, \quad x=\alpha(t).\end{cases} \tag{2.4}$$

Утверждение 1. *Если выполнены условия A_1–A_3, то график многозначного отображения $v\colon \Pi_T\rightrightarrows\mathbb{R}$ вида* (2.4) *слабо инвариантен относительно дифференциального включения* (1.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $(t_0,x_0)\in D_i$, $z_0=v_T(x_0-\widetilde{x}_i(t_0))$, тогда выберем селектор $\{(g(u_i(t,x)),0)\}\subseteq E(t,x)$, где E вида (1.4). Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) удовлетворяют уравнениям $\dot{x}=g(u_i(t,x))$, $\dot{z}=0$ с начальным условием $x(t_0)=x_0$, $z(t_0)=z_0$. Видно, что решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ совпадают с характеристиками $(\tilde{x}(\cdot,\xi),\tilde{z}(\cdot,\xi))$. Из вида v следует, что $(t,\tilde{x}(t,\xi),\tilde{z}(t,\xi))\in\operatorname{gr}v$, а значит, решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения выживают в графике v. Следовательно, для любой (t_0,x_0,z_0) такой, что $x_0>\alpha(t_0)$ $(x_0<\alpha(t_0))$, $z_0=v_T(x_0-\widetilde{x}(t_0))$, получаем выживаемость траекторий дифференциального включения (1.5) в графике v.

2. Пусть $(t_0,x_0)=(t_0,\alpha(t_0))$ и $v_T(\alpha(t_0)-\widetilde{x}_1(t_0))\le z_0\le v_T(\alpha(t_0)-\widetilde{x}_2(t_0))$. Можно выбрать селектор многозначного отображения вида (1.4)

$$\{(\dot{\alpha}(t),0)\}\subset E(t,x),\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{2.5}$$

Очевидно, что траектории $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) при выборе селектора (2.5) с начальным условием $x(t_0)=\alpha(t_0)$, $z(t_0)=z_0$ имеют вид $x(t)=\alpha(t)$, $z(t)\equiv z_0$, $t\in[t_0,t_1]$.

Существует момент $\tau\in(t_0,t_1]$ такой, что $\forall\ t\in(t_0,\tau]$ $(t,x(t),z(t))\in\operatorname{gr}v(t,\alpha(t))$ и $z(\tau)\equiv z_0=v_T\Big(\alpha(\tau)-\displaystyle\int_T^\tau g(u_i(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$. Это следует из вида v (2.4). Рассмотренный момент τ существует, так как решение v однозначно при $(t,x)\in(t_1,T]\times\mathbb{R}$ согласно (2.4). Поэтому всегда найдется момент τ — момент выхода траекторий $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) из области многозначности $\operatorname{gr}v$.

Если $\tau<t_1$, то существуют решения характеристической системы (2.2), (2.3) $\tilde{z}_i(\cdot,\xi)$, $i=1,2$, для которых выполнено $z_0=v_T\Big(\alpha(\tau)-\displaystyle\int_T^\tau g(u_i(t,\tilde{x}(t,\xi)))dt\Big)=\tilde{z}_i(\tau,\xi)$. Если $\tau=t_1$, то $z_0=v_T\Big(\alpha(t_1)-\displaystyle\int_T^{t_1} g(u_x(t,\tilde{x}(t,\xi)))dt\Big)=\tilde{z}(t_1,\xi)$.

Как отмечалось ранее, в каждую точку $(t,x)\in D_i$ приходит хотя бы одна характеристика $(\tilde{x},\tilde{z})$. Поэтому для $t>\tau$ выберем селектор $\{(g(u_i(t,x)),0)\}\subseteq E(t,x)$. Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5), $t\in[\tau,T]$ выживают в графике v, как это было показано в п. 1.

Если $(t_0,x_0)=(t_1,\alpha(t_1))$, $z_0=v_T\Big(\alpha(t_1)-\displaystyle\int_T^{t_1}g(u_x(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$, то для $t>t_1$ выберем селектор $\{(g(u_i(t,x)),0)\}\subseteq E(t,x)$. Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) выживают в графике v как это было показано в п. 1. $\square$

Утверждение 2. *Многозначное отображение* $v\colon \Pi_T\rightrightarrows\mathbb{R}$, *определенное* (2.4), *является максимальным по включению, то есть для любого многозначного отображения* $\tilde{v}\colon\Pi_T\rightrightarrows\mathbb{R}$, *у которого* $\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$, *gr* $\tilde{v}$ *слабо инвариантен относительно дифференциального включения* (1.5), *выполнено* *gr* $\tilde{v}\subseteq$ *gr* v.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что многозначное отображение $\tilde{v}$ удовлетворяет условию $v(T,x)=\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$, слабо инвариантно относительно (1.5) и существует точка (t_0,x_0) такая, что $(t_0,x_0,z_0)\in$ gr $\tilde{v}$ и $(t_0,x_0,z_0)\notin$ gr v.

Согласно утверждению 1 отображение v слабо инвариантно относительно (1.5). Покажем, что отображение $\tilde{v}$ не может быть слабо инвариантно относительно (1.5).

Если $(t_0,x_0)\neq(t_0,\alpha(t_0))$, тогда траектории дифференциального включения (1.5), выживающие в графике $\tilde{v}$, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}=g(u_i),\quad \dot{z}=0$$

с начальным условием $x(t_0)=x_0$, $z(t_0)=z_0$. Траектория $x(\cdot)$ не может несколько раз пересекать кривую α, так как выполнено условие (2.1). Решения $x(\cdot)$ продолжимы до $t=T$, тогда $z(t)\equiv z_0=z(T)\neq v_T(x(T))$. Противоречие с тем, что $\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$.

Если $(t_0,x_0)=(t_0,\alpha(t_0))$, то траектории дифференциального включения (1.5), выживающие в графике $\tilde{v}$, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}=\dot{\alpha},\quad \dot{z}=0.$$

Существует момент $\tau\in(t_0,t_1]$ такой, что $\forall\ t\in(t_0,\tau]$ траектории $(x(\cdot),z(\cdot))$ рассматриваемого дифференциального включения лежат в графике $v(t,\alpha(t))$ и $z(\tau)\equiv z_0=v_T\Big(\alpha(\tau)-\displaystyle\int_T^{\tau}g(u_i(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$, так как v имеет вид (2.4). Если $\tau<t_1$, то существуют решения характеристической системы (2.2), (2.3) $\tilde{z}_i(\cdot,\xi)$, $i=1,2$, для которых выполнено $z_0=v_T\Big(\alpha(\tau)-\displaystyle\int_T^{\tau}g(u_i(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)=\tilde{z}_i(\tau,\xi)$. Если $\tau=t_1$, то $z_0=v_T\Big(\alpha(t_1)-\displaystyle\int_T^{t_1}g(u_x(t,\tilde{x}(t,\xi)))dt\Big)=\tilde{z}(t_1,\xi)$. Рассмотренный момент τ существует, так как решение v однозначно при $(t,x)\in(t_1,T]\times\mathbb{R}$ согласно (2.4). Поэтому всегда найдется момент τ — момент выхода траекторий $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) из области многозначности gr v.

Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5), где $(\dot{x},\dot{z})=(g(u_i(t,x)),0)$, $t\in(\tau,T]$, выживают в графике v, как это было показано в утверждении 1. Тогда $z(t)=z(T)\neq v_T(x(T))$. Противоречие с тем, что $\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$. Следовательно отображение v, заданное (2.4), является максимальным по включению слабо инвариантным множеством относительно дифференциального включения (1.5). $\square$

Из утверждений 1, 2 следует, что многозначное отображение v, заданное (2.4), является М-решением второго уравнения задачи (1.1).

Из утверждения 2 следует единственность М-решения v второго уравнения системы (1.1).

З а м е ч а н и е. М-решение v второго уравнения системы (1.1) многозначно вдоль $x=\alpha(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. В точках $(t,x)\neq(t,\alpha(t))$, $t\in[t_0,t_1]$, М-решение v однозначно и дифференцируемо, так как v_T непрерывно дифференцируема, u_x липшицева в областях D_i, $i=1,2$, решение $\tilde{x}(\cdot,\xi)$ характеристической системы (2.2), (2.3) дифференцируемо по начальному условию.

3. Непрерывное решение системы уравнений Гамильтона — Якоби

Рассмотрим функцию $\alpha\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ такую, что существует $\dot\alpha$, определенная (1.2), и выполнено одно из условий:

$$\dot\alpha(t) < g(u_2(t, \alpha(t))) \text{ или } \dot\alpha(t) > g(u_1(t, \alpha(t))), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.1}$$

Тогда может возникнуть ситуация, когда характеристики $\widetilde{x}_i$ заполняют не всю полосу Π_T. Область, не заполненную характеристиками, назовем M. Далее рассмотрим случай, когда область M пересекается только с областью D_2. Тогда область M имеет вид

$$M = \{(t, x) \in D_2\colon t \in [t_0, t_1],\ \tilde{x}(t, \alpha(t_1)) \le x \le \alpha(t)\}.$$

Рассмотрим момент t^*, удовлетворяющий уравнению

$$\alpha(t^*) = \int\limits_t^{t^*} g(u_2(\tau, x(\tau))d\tau + x, \quad (t, x) \in M. \tag{3.2}$$

Момент t^* определяется единственным образом. Как было показано ранее, в каждую точку $(t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, приходит единственная характеристика из каждой области D_i, $i = 1, 2$, поэтому характеристики $\widetilde{x}_i$, $i = 1, 2$, пересекают $\alpha(\cdot)$ один раз.

Покажем, что формула (3.2) определяет функцию $t^*\colon [t_0, t_1] \times M \to [t_0, t_1]$. Продифференцируем (3.2) по t^*. Видно, что $\dot\alpha(t^*) - g(u_2(t^*, x)) \ne 0$ и непрерывна, в частности

$$\lim_{(t,x)\to(t,\tilde{x}(t,\alpha(t_1))} t^*(t, x) = t_1.$$

Отсюда следует, что функция t^* является непрерывной и дифференцируемой на $(t_0, t_1) \times \mathbb{R}$. Существуют и непрерывны частные производные $\partial t^*/\partial t$, $\partial t^*/\partial x$.

Определим функцию $v : \Pi_T \to \mathbb{R}$

$$v(t, x) = \begin{cases} v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big), & (t, x) \in D_1, \\ v_T\Big(x - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau - \int\limits_{t^*}^t g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big), & (t, x) \in M, \\ v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big), & (t, x) \in D_2 \setminus M. \end{cases} \tag{3.3}$$

Заметим, что внутри областей M, D_i, $i = 1, 2$, функция v является непрерывной по всем аргументам, так как $\int_T^t g(u_i(\tau, x(\tau)))d\tau$, $i = 1, 2$, является непрерывной функцией и v_T непрерывно дифференцируема. Проверим непрерывность v на границах областей. Рассмотрим соответствующие пределы:

$$\lim_{x\to\alpha(t)+0} v(t, x) = \lim_{x\to\alpha(t)+0} v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big) = v_T\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big),$$

$$\lim_{x\to\alpha(t)-0} v(t, x) = \lim_{x\to\alpha(t)-0} v_T\Big(x - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau - \int\limits_{t^*}^t g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big)$$

$$= v_T\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big).$$

Видно, что пределы функции v совпадают, значит v непрерывна в точках $(t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1]$. Напомним, что другой границей области M является характеристика $\tilde{x}(\cdot, \alpha(t_1))$. Проверим непрерывность v в точках $(t, x) = (t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1)))$, $t \in [t_0, t_1]$. Имеем

$$\lim_{x\to\tilde{x}(t,\alpha(t_1))+0} v(t,x) = \lim_{x\to\tilde{x}(t,\tilde{x}(t,\alpha(t_1))+0} v_T\Big(x - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau - \int\limits_{t^*}^{t} g(u_2(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$$

$$= v_T\Big(\tilde{x}(t,\alpha(t_1)) - \int\limits_T^{t} g(u_2(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big),$$

$$\lim_{x\to\tilde{x}(t,\alpha(t_1))-0} v(t,x) = \lim_{x\to\tilde{x}(t,\tilde{x}(t,\alpha(t_1))-0} v_T\Big(x - \int\limits_T^{t} g(u_2(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$$

$$= v_T\Big(\tilde{x}(t,\alpha(t_1)) - \int\limits_T^{t} g(u_2(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big).$$

Пределы функции v совпадают, значит v непрерывна в точках $(t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1)))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Утверждение 3. *Функция v, заданная* (3.3)*, является M-решением задачи Коши для второго уравнения системы* (1.1).

Доказательство. Проверим определение 4. Выберем $(t_0, x_0) \in D_i$, $z_0 = v_T\Big(x_0 - \int_T^{t_0} g(u_i(\tau, x(\tau)))d\tau\Big)$, $(x_0, z_0) \in \mathrm{gr}\ v$. Рассмотрим селектор $\{(g(u_i(t,x)), 0)\} \subseteq E(t,x)$. Значение v вдоль решений $\dot{x} = g(u_i)$ постоянно и равно z_0 согласно построению. Выберем начальную точку $(t_0, x_0) \in M$ и $z_0 = v_T\Big(x_0 - \int_T^{t_0} g(u_2(\tau, x(\tau)))d\tau\Big)$, т.е. $(x_0, z_0) \in \mathrm{gr}\ v$. Рассмотрим правую часть дифференциального включения вида

$$E(t,x) = \begin{cases} \{(g(u_2(t,\tilde{x}(t,\xi))), 0)\}, & t \in [t_0, t^*], \\ \{(g(u_1(t,\tilde{x}(t,\xi))), 0)\}, & t \in (t^*, T]. \end{cases}$$

Здесь t^* определяется формулой (3.2). Траектории (x, z) введенного дифференциального включения $(\dot{x}, \dot{z}) \in E(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$ выживают в графике v до момента $t = T$.

Выберем $(t_0, x_0) = (t_0, \alpha(t_0))$, тогда рассмотрим селектор $\{(g(u_1(t,x)), 0)\} \subseteq E(t,x)$. Траектории $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) выживают в графике v. Таким образом, график v слабо инвариантен относительно (1.5).

Покажем, что v является максимальным по включению отображением. Предположим, что существует многозначное отображение $\tilde{v} : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ такое, что $v(T,x) = \tilde{v}(T,x) = v_T(x)$, $\mathrm{gr}\ \tilde{v}$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (1.5) и существует (t_0, x_0, z_0): $(t_0, x_0, z_0) \notin \mathrm{gr}\ v(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0, z_0) \in \mathrm{gr}\ \tilde{v}(t_0, x_0)$. В зависимости от того, в какой области лежит (t_0, x_0), выберем селектор $\{(g(u_i), 0)\} \subseteq E(t,x)$. Решения $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) продолжимы до $t = T$ и $z(t) = z(T) \equiv z_0$. Кроме того, решения $(t, x(t), z(t)) \in \mathrm{gr}\ \tilde{v}$, $t \in [t_0, T]$. Противоречие с тем, что $\tilde{v}(T,x) = v_T(x)$. $\square$

Из утверждения (3) следует, что M-решение второго уравнения системы (1.1) однозначно.

Утверждение 4. *Решение второго уравнения системы* (1.1) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существует М-решение второго уравнения системы (1.1) $\tilde{v}\colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ такое, что $v(T,x) = \tilde{v}(T,x) = v_T(x)$, и существует

$$(t_0, x_0, z_0)\colon (t_0, x_0, z_0) \notin \ \mathrm{gr}\ v(t_0, x_0), \quad (t_0, x_0, z_0) \in \ \mathrm{gr}\ \tilde{v}(t_0, x_0).$$

Следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве утверждения 3 о максимальности по включению М-решения, приходим к противоречию о том, что $\tilde{v}$ является М-решением второго уравнения системы (1.1). Следовательно, М-решение второго уравнения системы (1.1) единственно. □

Из утверждений 3, 4 следует, что М-решение второго уравнения системы (1.1) существует и единственно.

Исследуем поведение функции v, определенной (3.3), на границах области M. Напомним, что граница M состоит из точек $\{(t,x)\colon t \in [t_0, t_1],\ x = \tilde{x}(t, \alpha(t_1))\}$.

Утверждение 5. *Функция v, определенная* (3.3), *дифференцируема в точках* $\{(t,x)]\colon t \in [t_0, t_1],\ x = \tilde{x}(t, \alpha(t_1))\}$.

Доказательство. Рассмотрим точку $(t^0, x^0) = (t^0, \tilde{x}(t^0, \alpha(t_1)))$. Обозначим

$$C = v_T'\Big(\tilde{x}(t^0, \alpha(t_1)) - \int\limits_T^{t^0} g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big).$$

Тогда

$$\lim_{(t,x)\to(t^0,x^0)} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = C\Big(-g(u_2(t^0, x^0)) - \int\limits_T^{t^0} \frac{\partial g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau}{\partial t}\Big),$$

$$\lim_{(t,x)\to(t^0,x^0)} \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = C\Big(1 - \int\limits_T^{t^0} \frac{\partial g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))}{\partial x} d\tau\Big).$$

Функции $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial x$ непрерывны на множестве $(t,x) = (t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1)))$, поэтому функция v дифференцируема на этом множестве. □

Утверждение 6. *В точках* $(t,x) = (t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1)$, *у функции v, определенной* (3.3), *существует D^+v или D^-v.*

Доказательство. Воспользовавшись определением 1, нетрудно проверить, что множество

$$\{(ka_\lambda, b_\lambda) | \lambda \in [0,1]\}, \qquad \text{где } k = v_T'\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^{t} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big),$$

$$a = \lambda\Big(g(u_2(t, \alpha(t))) - g(u_1(t, \alpha(t)))\Big)\frac{\partial t^*}{\partial t} - \lambda g(u_2(t, \alpha(t))) - \lambda \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x}))}{\partial t} d\tau$$

$$- (1-\lambda) g(u_1(t, \alpha(t))) - (1-\lambda) \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x}))}{\partial t} d\tau,$$

$$b = \lambda\Big(g(u_2(t, \alpha(t))) - g(u_1(t, \alpha(t)))\Big)\frac{\partial t^*}{\partial x} - \lambda \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x})))}{\partial x} d\tau + 1 - (1-\lambda) \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x}))}{\partial x} d\tau,$$

является $D^{-}v(t,\alpha(t))$, $t\in[t_0,t_1)$, при $k\geq 0$ и $D^{+}v(t,\alpha(t))$, $t\in[t_0,t_1)$ при $k\leq 0$.

Пример. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2=0,\quad u(T,x)=|x|,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big(\beta+\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=0,\quad v(T,x)=x,$$

$x\in\mathbb{R}$, $T=2$, $t\in[0,T]$. Применяя формулу (1.3), получим решение первого уравнения

$$u(t,x)=|x|-t+T.$$

Видно, что функция u негладкая вдоль кривой $\alpha(t)=0$, $t\in[0,2]$. Тогда $u_1(t,\alpha(t))=1$, $u_2(t,\alpha(t))=-1$.

Пусть $|\beta|\leq 1$, тогда $g(u_1(t,\alpha(t)))=\beta+1\geq 0$, $g(u_2(t,\alpha(t)))=\beta-1\leq 0$. Следовательно, выполняется случай, когда $\dot\alpha$ удовлетворяет условию (2.1). Применяя формулу (2.4), получим решением второго уравнения

$$v(t,x)=\begin{cases} x-(\beta+1)(t-T), & x>0,\\ x-(\beta-1)(t-T), & x<0,\\ [(\beta-1)(t-T),(\beta+1)(t-T)], & x=0.\end{cases}$$

Видно, что решение v вдоль $x=\alpha(t)$ является многозначным.

Пусть $|\beta|>1$. В этом случае $\dot\alpha$ удовлетворяет условию (3.1). Непрерывное решение второго уравнения описывается формулой (3.3) и имеет вид

$$v(t,x)=\begin{cases} x-(\beta+1)(t-T), & x\geq 0,\\ x-(\beta-1)(t-T), & x<(\beta-1)(t-T),\\ \dfrac{\beta+1}{\beta-1}x-(\beta+1)(t-T), & (\beta-1)(t-T)<x<0.\end{cases}$$

Заметим, что решение v дифференцируемо в точках $x=(\beta-1)(t-T)$, а в точках $(t,\alpha(t))$ существует $D^{-}v(t,\alpha(t))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Friedman A.** Differential games. Courier corporation, 2013. 368 p.
2. **Bressan A., Shen W.** Small BV solutions of hyperbolic noncooperative differential games // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 1. P. 194–215. doi: 10.1137/S0363012903425581 .
3. **Averboukh Yu.** Universal Nash equilibrium strategies for differential games // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 329–350. doi: 10.1007/s10883-014-9224-9 .
4. **Ostrov D.N.** Nonuniqueness in systems of Hamilton–Jacobi equations // Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis. Berlin: Springer, 2004. Vol. 301. P. 49–59 (Lect. Notes Control Inf. Sci.; vol. 301). doi: 10.1007/978-3-540-39983-4_3 .
5. **Zheng Y.P., Basar T., Cruz J.B.** Stackelberg strategies and incentives in multiperson deterministic decision problems // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 1984. Vol. 14. P. 10–24. doi: 10.1109/TSMC.1984.6313265 .
6. **Huang F.** Existence and uniqueness of discontinuous solutions for a class of nonstrictly hyperbolic systems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1997. No. 6. P. 1193–1205. doi: 10.1017/S0308210500027013 .
7. **Шелкович В.М.** Условия Ренкина — Гюгонио и балансовые законы для δ-ударных волн // Фундаментальная и прикл. математика. 2006. Т. 12, вып. 6. С. 213–229.
8. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

9. **Лахтин А.С., Субботин А.И.** Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка // Мат. сб. 1998. Т. 189. С. 33–59.
10. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
11. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091. (Modern Math. Appl.; vol. 20). doi: 10.1007/s10958-006-0146-2 .
12. **Колпакова Е.А.** Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона — Якоби и законов сохранения// Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №5. С. 95–102.
13. **Evans L.C.** Partial differential equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 662 p. (Grad. Stud. Math.; vol. 19.) ISBN 0-8218-0772-2 .
14. **Crandall M.G, Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
15. **Олейник О.А.** Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Тр. Моск. мат. общества. 1956. Т. 5. С. 433–454.
16. **Dafermos C.M.** Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 636 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).
doi: 10.1007/978-3-642-04048-1 .

Колпакова Екатерина Алексеевна
канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kolpakova@imm.uran.ru

Поступила 30.10.2016

REFERENCES

1. Friedman A. *Differential games.* Courier corporation, 2013. 368 p.
2. Bressan A., Shen W. Small BV solutions of hyperbolic noncooperative differential games. *SIAM J. Control Optim.*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 194–215. doi: 10.1137/S0363012903425581 .
3. Averboukh Yu. Universal Nash equilibrium strategies for differential games. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 329–350. doi: 10.1007/s10883-014-9224-9 .
4. Ostrov D.N. Nonuniqueness in systems of Hamilton–Jacobi equations. *Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis*, Berlin: Springer, 2004, Lect. Notes Control Inf. Sci., vol. 301, pp. 49–59.
doi: 10.1007/978-3-540-39983-4_3 .
5. Zheng Y.P., Basar T., Cruz J.B. Stackelberg strategies and incentives in multiperson deterministic decision problems. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 1984, vol. 14, pp. 10–24.
doi: 10.1109/TSMC.1984.6313265 .
6. Huang F. Existence and uniqueness of discontinuous solutions for a class of nonstrictly hyperbolic systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.*, 1997, no. 6, pp. 1193–1205.
doi: 10.1017/S0308210500027013 .
7. Shelkovich V.M. The Rankine–Hugoniot conditions and balance laws for δ-shocks. *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), 2008, vol. 151, no. 1, pp. 2781–2792. doi:10.1007/s10948-008-0173-y .
8. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, Ser. System & Control: Foundations & Applications, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p.
9. Lakhtin A.S., Subbotin A.I. Multivalued solutions of first-order partial differential equations. *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 6, pp. 849–873. doi: 10.1070/SM1998v189n06ABEH000323 .
10. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi– Bellmana* [The method of characteristics for the Hamilton — Jacobi — Bellman equation]. Yekaterinburg, 2013, 244 p.
11. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 3, Ser. Modern Math. Appl., vol. 20, pp. 2955–3091. doi: 10.1007/s10958-006-0146-2 .

12. Kolpakova E.A. A generalized method of characteristics in the theory of Hamilton–Jacobi equations and conservation laws. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 95–102.
13. Evans L.C. *Partial differential equations.* Providence: Amer. Math. Soc., 1998, Ser. Grad. Stud. Math., vol. 19., 662 p. ISBN 0-8218-0772-2 .
14. Crandall M.G, Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
15. Oleinik O.A. The problem of Cauchy for non-linear differential equations of the first order with discontinuous initial conditions. *Tr. Mosk. Mat. Obshchestva*, Moscow: GITTL Publ., 1956, vol. 5, pp. 433–454.
16. Dafermos C.M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 636 p. doi: 10.1007/978-3-642-04048-1 .

E. A. Kolpakova Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: kolpakova@imm.uran.ru .