ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ И НЕВЫПУКЛЫМ ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ[1]

Л. В. Камнева, В. С. Пацко

Рассматриваются антагонистические дифференциальные игры на плоскости с простыми движениями, фиксированным моментом окончания и многоугольным терминальным множеством. Геометрическое ограничение на управление каждого из игроков является выпуклым многоугольником или отрезком. Для выпуклого терминального множества известна явная формула, описывающая множество разрешимости задачи (множество уровня функции цены, максимальный u-стабильный мост, множество выживаемости). Соответствующий этой формуле алгоритм опирается на операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского). В статье предлагается алгоритм точного построения множества разрешимости для случая многоугольного невыпуклого терминального множества. При этом не требуется дополнительного разбиения рассматриваемого промежутка времени и восстановления промежуточных множеств разрешимости в дополнительные моменты. Алгоритм заключается в формировании и последующей конечной рекурсивной обработке списка полупространств в трехмерном пространстве времени и фазовых координат. Список строится на основе многоугольного терминального множества с использованием нормалей многоугольных ограничений на управления игроков.

Ключевые слова: дифференциальные игры с простыми движениями на плоскости, множество разрешимости, попятная процедура.

L. V. Kamneva, V. S. Patsko. Construction of the solvability set in differential games with simple motions and nonconvex terminal set.

We consider planar zero-sum differential games with simple motions, fixed terminal time, and polygonal terminal set. The geometric constraint on the control of each player is a convex polygonal set or a straight line segment. In the case of a convex terminal set, an explicit formula is known for the solvability set (the level set of the value function, maximal u-stable bridge, viability set). The algorithm corresponding to this formula is based on the set operations of algebraic sum and geometric difference (the Minkowski difference). We propose an algorithm for the exact construction of the solvability set in the case of a nonconvex polygonal terminal set. The algorithm does not involve the additional partition of the time interval and the recovery of intermediate solvability sets at additional instants. A list of half-spaces in the three-dimensional space of time and state coordinates is formed and processed by a finite recursion. The list is based on the polygonal terminal set with the use of normals of the polygonal constraints on the controls of the players.

Keywords: differential games with simple motions in the plane, solvability set, backward procedure.

MSC: 49N70, 49M25, 93B03, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-143-157

Введение

Р. Айзекс в книге [1] объектами с простыми движениями назвал объекты, поведение которых описывается соотношением

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Здесь x — фазовый вектор, u — управление первого игрока, v — второго, P и Q — множества, ограничивающие выбор управлений. Таким образом, в правой части нет фазовой переменной, вектор скорости $\dot{x}$ изменяется мгновенно в зависимости от текущего выбора управлений u, v.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-07909) и Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления".

При рассмотрении содержательных задач конфликтного управления указанное описание динамики применяют тогда, когда нужно ответить на какие-либо главные вопросы конфликтного взаимодействия, не вдаваясь в детали, связанные с реальным инерционным поведением объектов. Такое описание используют и при численном решении дифференциальных игр общего вида. Например, пусть $x(t_*)$ — разностное фазовое положение двух движущихся объектов. Учитывая положение каждого их них, можно в качестве множеств P и Q взять "вектограммы" [1] их скоростей в момент t_* с должным знаком и на основе этого исследовать возможности локального изменения разностного вектора.

Еще более целенаправленным является использование систем с простыми движениями при численном решении (см., например, [2]) линейных дифференциальных игр вида

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u + C(t)v, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}$$

с фиксированным моментом окончания T и заданной функцией платы φ, подсчитываемой в момент окончания. Пусть функция φ зависит от некоторых выделенных m координат вектора z. Тогда, рассматривая матрицу $Z_m(T,t)$, составленную из m соответствующих строк фундаментальной матрицы Коши линейной системы, при помощи преобразования $x(t) = Z_m(T,t)z(t)$ переходим к системе

$$\dot{x} = Z_m(T,t)B(t)u + Z_m(T,t)C(t)v, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}$$

без фазовой переменной в правой части. Сохраняя прежний момент окончания T и функцию платы φ, получаем дифференциальную игру, эквивалентную (с точки зрения цены игры) исходной линейной дифференциальной игре [3, с. 354; 4, с. 89–91]. Пусть M_c — множество уровня Лебега функции платы φ в координатах x. Пятимся по времени от множества M_c, "замораживая" на каждом шаге $[t_i, t_{i+1}]$ попятной процедуры коэффициенты динамики. Получаем рекуррентную процедуру приближенного построения множеств уровня $W_c(t_i)$ ($W_c(T) = M_c$) функции цены. При этом на каждом шаге попятной процедуры имеем дело с системой с простыми движениями, в которой вместо P и Q используем множества

$$P_i = Z_m(T,t_i)B(t_i)\mathcal{P}, \quad Q_i = Z_m(T,t_i)C(t_i)\mathcal{Q}.$$

Естественно, мы заинтересованы в "хорошем" алгоритме перехода от множества $W_c(t_{i+1})$ к множеству $W_c(t_i)$. Сегодняшнее состояние теории дифференциальных игр говорит о том, что для получения хорошего результата при рассмотрении на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ динамики

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P_i, \quad v \in Q_i$$

следует разбить этот промежуток на достаточно большое количество частей с шагом h моментами

$$t_i^N = t_{i+1}, \quad t_i^{N-1} = t_i^N - h, \ldots, t_i^0 = t_i$$

и для каждого из дополнительных промежутков $[t_i^j, t_i^{j+1}]$ приближенно построить множество $W_c(t_i^j)$ на основе множества $W_c(t_i^{j+1})$.

Основная цель данной статьи — показать, что при размерности фазового вектора x, равной 2, этого делать не надо. Мы описываем алгоритм, который дает *точное* значение множества разрешимости $W_c(t_i)$ на основе множества $W_c(t_{i+1})$, взятого в момент t_{i+1}, при закрепленной на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ динамике с простыми движениями без какого-либо дополнительного разбиения промежутка $[t_i, t_{i+1}]$.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 дается постановка задачи о точном вычислении множества разрешимости для конфликтно-управляемой системы с простыми движениями в случае $x \in \mathbb{R}^2$ в проблеме наведения на заданное многоугольное множество M в фиксированный момент окончания ϑ. Случай выпуклого многоугольника M разбирается в разд. 2. Результат для выпуклого множества M является известным [5]. В разд. 3 анализируется понятие полупроницаемой трубки в пространстве $\{t, x\}$. Свойством полупроницаемости должна обладать правильно построенная трубка, сечением которой в момент $t = 0$ является множество разрешимости. В разд. 4 вводятся понятия выпуклой и вогнутой последовательности полупространств, а также рассматривается числовая характеристика для упорядоченной тройки полупространств. Раздел 5 описывает построения полупроницаемых поверхностей локально в окрестности точки выпуклости или вогнутости терминального множества. В разд. 6 приводится способ вычисления множества разрешимости при произвольном многоугольнике M, использующий некоторые специальные моменты промежуточного разбиения и рекуррентные построения промежуточных множеств. Затем мы отказываемся от построения промежуточных множеств и излагаем алгоритм точного построения искомого множества разрешимости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему с простыми движениями [1] на плоскости:

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \vartheta > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, каждое из множеств P и Q — выпуклый замкнутый многоугольник или отрезок.

Пусть задан простой многоугольник $M \subset \mathbb{R}^2$, т.е. его граница — замкнутая ломаная без самопересечений. Дифференциальная игра образована задачей M-сближения для первого игрока и задачей M'-сближения для второго игрока, $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$.

Постановка задачи M-сближения для первого игрока на отрезке $[0, \vartheta]$ изложена в [6, § 13.1, с. 150–152] и состоит в следующем. Из начальной позиции $(0, x_0)$ первый игрок стремится гарантировать выполнение условия $x(\vartheta) \in M$. Предполагается, что игрок знает текущую позицию $(t, x(t))$ и формирует управление $u(t, x(t)) \in P$ по принципу обратной связи. Для решения задачи M-сближения используется понятие u-стабильного моста.

Многозначное отображение $[0, \vartheta] \ni t \mapsto W(t) \subset \mathbb{R}^2$ определяет *u-стабильный мост* (график отображения) $W = \{(t, x)\colon t \in [0, \vartheta],\ x \in W(t)\}$ в задаче M-сближения на отрезке $[0, \vartheta]$, если $W(\vartheta) \subset M$, множество W замкнуто в $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ и при любом $v \in Q$ слабо инвариантно относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in P + v. \tag{1.2}$$

Условие слабой инвариантности означает, что для любой точки $(t_0, x_0) \in W$ существует движение $x(\cdot)\colon [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^2$, которое удовлетворяет дифференциальному включению (1.2), начальному условию $x(t_0) = x_0$ и условию выживаемости: $x(t) \in W(t)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В теории дифференциальных игр это свойство (в эквивалентной формулировке) называется условием u-стабильности.

Аналогично формулируется задача M'-сближения для второго игрока и вводится понятие v-стабильного моста в задаче M'-сближения.

Первоначальные (эквивалентные) понятия стабильных мостов были введены в [7, с. 52–54; 4, с. 53, 58]. Символом W_0 обозначим максимальный (по включению) u-стабильный мост, заданный на отрезке $[0, \vartheta]$, в задаче M-сближения в момент ϑ.

Множество $W_0(0)$ будем называть *множеством разрешимости* задачи M-сближения в момент ϑ на интервале $[0, \vartheta]$.

Ставится задача разработки алгоритма, сопоставляющего множеству $M = W_0(\vartheta)$ множество разрешимости $W_0(0)$ и не требующего какого-либо дополнительного разбиения промежутка $[0, \vartheta]$.

З а м е ч а н и е 1. Известно [7, § 16], что множество W является максимальным u-стабильным мостом в задаче M-сближения тогда и только тогда, когда W есть u-стабильный мост в задаче M-сближения и множество $W' = \{(t,x)\colon t \in [0,\vartheta],\ x \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus W(t)}\}$ есть v-стабильный мост в задаче M'-сближения. Стало быть, построив максимальный u-стабильный мост W_0, получаем как решение задачи M-сближения, так и решение задачи M'-сближения.

З а м е ч а н и е 2. Максимальный u-стабильный мост является замкнутым множеством [7, с. 67, лемма 16.1; 8, с. 92].

Непосредственно из замкнутости и свойства u-стабильности множества W_0 получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $W_0 \subset [0,\vartheta]\times\mathbb{R}^2$ — максимальный u-стабильный мост в задаче M-сближения и $t_* \in [0,\vartheta)$. Тогда*

$$W_0(t_*) = \big\{x_* \in \mathbb{R}^2\colon \exists (t_n,x_n) \to (t_*,x_*),\ n\to\infty,\ t_n > t_*,\ x_n \in W_0(t_n)\big\}.$$

2. Случай выпуклого терминального множества

А) Пусть терминальное множество M является выпуклым многоугольником. В выпуклом случае известна [5] формула

$$W_0(t) = \Big(M + \big(-(\vartheta - t)P\big)\Big) \overset{*}{-} (\vartheta - t)Q \ =: T_{\vartheta - t}(M), \tag{2.1}$$

описывающая сечения $W_0(t)$ максимального u-стабильного моста W_0. Здесь используются операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского) [9; 10]:

$$A + B = \{a + b\colon a \in A,\ b \in B\}, \quad A \overset{*}{-} B = \{d\colon d + B \subset A\} = \bigcap_{b\in B}(A - b).$$

Правую часть равенства (2.1) будем рассматривать как определение оператора T_τ, действующего на множество M при $\tau = \vartheta - t$.

Пусть Π_η — полуплоскость в $\mathbb{R}^2$ с единичным вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$. Тогда непосредственно из определения оператора T_τ имеем

$$T_\tau(\Pi_\eta) = \Pi_\eta - \tau\big(u_0(\eta) + v_0(\eta)\big), \quad \tau > 0, \tag{2.2}$$

где $u_0(\eta) \in \operatorname{Arg}\min\limits_{u\in P}\langle u,\eta\rangle$, $\ v_0(\eta) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{v\in Q}\langle v,\eta\rangle$.

Будем использовать обозначение ∂A для границы множества A.

Нетрудно проверить, что для произвольной полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ множество

$$\{(t,x)\colon t \in [0,\vartheta],\ x \in \partial T_{\vartheta - t}(\Pi)\}$$

является плоским в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{t,x\}$. Следовательно, любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ соответствует единственное *полупространство* $\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, t-сечение которого для любого $t \in [0,\vartheta]$ совпадает с множеством $T_{\vartheta-t}(\Pi)$.

Введем обозначение $\Pi_\eta[A]$ для *опорной* к множеству A полуплоскости с вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$:

$$\Pi_\eta[A] = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \langle x,\eta\rangle \le \rho(\eta;A) < +\infty\}.$$

Здесь $\rho(\eta;A) = \sup\{\langle a,\eta\rangle\colon a \in A\}$ — значение опорной функции множества A на векторе η.

Выпуклый многоугольник M представим в виде

$$M = \bigcap\Big\{\Pi_\eta[M]\colon \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P)\Big\}, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{N}(M)$ и $\mathcal{N}(-P)$ — множества единичных внешних нормалей к ребрам многоугольников M и $-P$ соответственно. Если P — отрезок, то $\mathcal{N}(-P) = \mathcal{N}(P) = \{\nu, -\nu\}$, где вектор ν ортогонален P.

Заметим, что полуплоскости $\Pi_\eta[M]$, соответствующие нормалям $\eta \in \mathcal{N}(-P)$, являются *несущественными* для пересечения (2.3), т.е. могут быть удалены из правой части (2.3) без изменения результата пересечения. Однако такие полупространства участвуют, вообще говоря, в построении максимального u-стабильного моста W_0. Поэтому мы включаем их в описание многоугольника M.

Для выпуклого многоугольника M и $t \in [0, \vartheta]$ справедливо равенство (см., например, [11])

$$W_0(t) = T_{\vartheta-t}(M) = \bigcap \Big\{ T_{\vartheta-t}(\Pi_\eta[M]) \colon \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P) \Big\}. \tag{2.4}$$

Из равенства (2.4) и определения оператора $\mathcal{T}_\vartheta(\cdot)$ получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Для выпуклого множества M выполнено равенство*

$$W_0 = \Theta \cap \Big(\bigcap \big\{ \mathcal{T}_\vartheta(\Pi_\eta[M]) \colon \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P) \big\} \Big), \tag{2.5}$$

где $\Theta := \{(t, x) \colon t \in [0, \vartheta]\}$.

Таким образом, мост W_0 представим в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{t, x\}$ как пересечение полупространств, ограниченных плоскостями.

Б) Пусть выпуклым является множество $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$. В этом случае, изменяя роли игроков, приходим к уже рассмотренному выпуклому случаю.

Аналогично (2.3) имеем $M' = \bigcap \big\{ \Pi_\eta[M'] \colon \eta \in \mathcal{N}(M') \cup \mathcal{N}(-Q) \big\}$. Для любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ определяем *полупространство* $\mathcal{T}^*_\vartheta(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, t-сечение которого для любого $t \in [0, \vartheta]$ совпадает с множеством $T^*_{\vartheta-t}(\Pi)$. Здесь оператор $A \to T^*_\tau(A)$ определяется равенством

$$T^*_\tau(A) = \Big(A + \big(-\tau Q \big) \Big) \overset{*}{-} \tau P, \quad \tau > 0.$$

Следовательно, справедлива следующая лемма, аналогичная лемме 2.

Лемма 3. *Для выпуклого множества $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$ выполнено равенство*

$$\Theta \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus W_0}) = \Theta \cap \Big(\bigcap \big\{ \mathcal{T}^*_\vartheta(\Pi_\eta[M']) \colon \eta \in \mathcal{N}(M') \cup \mathcal{N}(-Q) \big\} \Big). \tag{2.6}$$

Опираясь на (2.2) и на аналогичное представление для оператора T^*_τ, получаем равенство

$$\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{T}_\vartheta(\Pi_\eta)} = \mathcal{T}^*_\vartheta(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_\eta}),$$

которое позволяет использовать в дальнейших построениях только операторы $T_\tau(\cdot)$ и $\mathcal{T}_\vartheta(\cdot)$.

3. Полупроницаемые трубки и поверхности

Простым многогранником в $\mathbb{R}^3$ назовем односвязное множество, ограниченное конечным числом плоских многоугольников (граней), соединенных таким образом, что каждая сторона любого многоугольника является стороной ровно одного другого многоугольника.

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ называется *многогранной трубкой на отрезке* $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$, если найдется такой простой многогранник $D \subset [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^2$, что справедливо представление

$$\Gamma = \big\{ (t, x) \in \partial D \colon t \in [t_1, t_2],\ x \in \partial D(t) \big\},$$

где $\partial D(t)$ — граница множества $D(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon (t,x) \in D\} \neq \varnothing$, $t \in [t_1, t_2]$. Грани (ребра, вершины) многогранника D, принадлежащие Γ, будем называть *гранями* (*ребрами*, *вершинами*) многогранной трубки Γ.

Таким образом, сечения $\Gamma(t)$ многогранной трубки Γ при $t \in [t_1, t_2]$ являются замкнутыми ломаными без самопересечений.

Замечание 3. Из леммы 2 следует, что в случае выпуклого многоугольника M боковая поверхность
$$\Gamma_0 = \{(t,x) \colon t \in [0,\vartheta],\ x \in \partial W_0(t)\}$$
максимального u-стабильного моста W_0 является многогранной трубкой на отрезке $[t_1, \vartheta]$, где $t_1 > \min\{t \in [0,\vartheta] \colon W_0(t) \neq \varnothing\}$.

В теории дифференциальных игр *полупроницаемой* [1] называют поверхность, обладающую следующим свойством: первый игрок способен предотвратить пересечение этой поверхности траекторией системы в одном направлении, а второй игрок — в противоположном.

Дадим формальное определение свойства полупроницаемости для произвольной многогранной трубки.

Пусть $O(x,\varepsilon)$ — открытый круг в $\mathbb{R}^2$ радиусом $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^2$;
$$C_\varepsilon^+(z_0) = \bigl\{(t,x) \colon t \in [t_0, t_0+\varepsilon],\ x \in O(x_0,\varepsilon)\bigr\}$$
— цилиндрическая положительная ε-полуокрестность точки $z_0 = (x_0, t_0)$.

Для $\varepsilon > 0$ определим такое значение $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}^2$ любая траектория системы (1.1) с начальной точкой x не покидает множество $O(x,\varepsilon)$ на отрезке времени $[0, \Delta(\varepsilon)]$.

Определение. Трубку Γ назовем *полупроницаемой* на отрезке $[t_1, t_2]$, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $z_0 = (t_0, x_0) \in \Gamma$, $\varepsilon_* = \min\{\Delta(\varepsilon),\ t_2 - t_0\}$ и представления
$$C_\varepsilon^+(z_0) = G^+ \cup S \cup G^-, \quad S \subset \Gamma, \quad G^+ \cap G^- = \varnothing, \quad G^+ \cap \Gamma = \varnothing, \quad G^- \cap \Gamma = \varnothing,$$
выполнены свойства:

1) для любого $v \in Q$ существует такое измеримое программное управление $u(t) \in P$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u(t) + v$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_*]$ выполнено включение $(t, x(t)) \in G^+ \cup S$;

2) для любого $u \in P$ существует такое измеримое программное управление $v(t) \in Q$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u + v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_*]$ выполнено включение $(t, x(t)) \in S \cup G^-$.

Учитывая определение, будем говорить о *стороне* $(+)$, примыкающей к G^+ полупроницаемой трубки и *стороне* $(-)$, примыкающей к G^-. Если сторона $(+)$ внутренняя относительно трубки, а сторона $(-)$ внешняя, то полупроницаемая трубка имеет *тип* $\pm$.

Замечание 4. Если боковая поверхность Γ_0 множества W_0 является многогранной трубкой, то она обладает свойством полупроницаемости.

Из определения полупроницаемости и замечаний 1, 2, 4 получаем следующие свойства.

а) Если Γ — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[0,\vartheta]$ и $\Gamma(\vartheta) = \partial M$, то Γ — боковая поверхность максимального u-стабильного моста W_0 на отрезке $[0,\vartheta]$ в задаче M-сближения.

б) Если Γ_1 — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[t_1, t_2]$, Γ_2 — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[t_2, t_3]$ и $\Gamma_1(t_1) = \Gamma_2(t_1)$, то $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[t_1, t_3]$.

Эти свойства позволяют свести построение максимального u-стабильного моста от множества M на отрезке $[0,\vartheta]$ к последовательному построению полупроницаемых трубок типа $\pm$ на конечном числе смежных отрезков.

Понятие полупроницаемости без изменений распространяется на многогранные неограниченные поверхности в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что для любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ граница полупространства $\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)$ является полупроницаемой поверхностью.

4. Упорядоченные тройки полупространств в $\mathbb{R}^3$

Пару различных полуплоскостей Π_1 и Π_2 будем называть *выпуклой* (*вогнутой*), если $\Pi_1 \cap \Pi_2$ — угол на плоскости, граница которого в положительном (отрицательном) направлении обходится сначала по прямой $\partial\Pi_1$ до точки пересечения с $\partial\Pi_2$, а затем по прямой $\partial\Pi_2$; *сонаправленной* — если $\Pi_1 \subset \Pi_2$ или $\Pi_2 \subset \Pi_1$. Положительным (отрицательным) направлением обхода границы множества считаем направление, при котором множество находится слева (справа).

Для упорядоченной пары полупространств в $\mathbb{R}^3 = \{(t,x)\}$, не перпендикулярных оси времени t, также определены свойства выпуклости, вогнутости и сонаправленности, поскольку при $t = \mathrm{const}$ получаем пару различных полуплоскостей в $\mathbb{R}^2$, которая сохраняет одно из свойств выпуклости, вогнутости или сонаправленности для всех $t \in \mathbb{R}$.

Упорядоченный набор $L_1, L_2, \ldots, L_m$ полупространств будем называть *выпуклым* (*вогнутым*), если любая пара (L_i, L_{i+1}), $j = \overline{1, m-1}$, является выпуклой (вогнутой).

Полуплоскость $L_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будем называть *несущественной* для пересечения

$$L_1(t) \cap L_2(t) \cap \ldots \cap L_m(t),$$

если ее можно удалить без изменения результата пересечения, иначе полуплоскость $L_i(t)$ — *существенная*.

Отдельно рассмотрим упорядоченные наборы из трех полупространств — тройки полупространств в $\mathbb{R}^3 = \{t, x\}$.

Обозначим через Λ множество таких троек $\lambda = (L_a, L, L_b)$ полупространств, что границы этих полупространств (плоскости в $\mathbb{R}^3$) не перпендикулярны оси времени t и

$$\partial L_a \cap \partial L = l_a, \quad \partial L \cap \partial L_b = l_b,$$

где l_a, l_b — прямые в $\mathbb{R}^3$, $l_a \neq l_b$. Пусть $L(t)$ — сечение полупространства L плоскостью $t = \mathrm{const}$.

Дадим определение *веса* $\mu_t(\lambda)$ *тройки* $\lambda = (L_a, L, L_b) \in \Lambda$ относительно момента $t \in \mathbb{R}$.

В случае, если прямые l_a и l_b параллельны, положим $\mu_t(\lambda) = +\infty$.

Поскольку $l_a \neq l_b$, то рассмотрим оставшийся случай пересечения прямых в одной точке. Обозначим $l_a \cap l_b = \{(t^*_\lambda, x^*_\lambda)\}$.

Определим вспомогательные двугранные углы C_a и C_b в $\mathbb{R}^3$. Если пара L_a, L выпукла, то $C_a = L_a \cap L$, иначе $C_a = (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_a}) \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L})$. Если пара L, L_b выпукла, то $C_b = L_b \cap L$, иначе $C_b = (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_b}) \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L})$. Пусть

$$\gamma_\lambda(t) = C_a(t) \cap C_b(t) \cap \partial L(t).$$

Заметим, что $\gamma_\lambda(t^*_\lambda) = \{x^*_\lambda\}$ и либо $\gamma_\lambda(t)$ — отрезок при $t < t^*_\lambda$ и пустое множество при $t > t^*_\lambda$, либо $\gamma_\lambda(t)$ — отрезок при $t > t^*_\lambda$ и пустое множество при $t < t^*_\lambda$. В первом случае положим $\mu_t(\lambda) = +\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Во втором случае условимся, что $\mu_t(\lambda) = t - t^*_\lambda$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Через Λ^0_t обозначим такие тройки $\lambda = (L_a, L, L_b) \in \Lambda$, что границы полуплоскостей $L_a(t)$, $L(t)$, $L_b(t)$ проходят через одну точку.

Лемма 4. *Пусть $t_1 \in \mathbb{R}$ и $\lambda = (L_a, L, L_b) \in \Lambda^0_{t_1}$. Тогда $\mu_{t_1}(\lambda) \in \{0, +\infty\}$. В случае выпуклой тройки λ равенство $\mu_t(\lambda) = +\infty$ равносильно существенности полуплоскости $L(t)$ в пересечении $L_a(t) \cap L(t) \cap L_b(t)$ для всех $t < t_1$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \Lambda^0_{t_1}$, то $t_1 = t^*_\lambda$. Из определения веса тройки получаем, что $\mu_{t_1}(\lambda) \in \{0, +\infty\}$.

Для выпуклой тройки λ при определении веса имеем

$$C_a \cap C_b = L_a \cap L \cap L_b, \quad \gamma_\lambda(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \partial L(t).$$

Равенство $\mu_t(\lambda) = +\infty$ равносильно тому, что $\gamma_\lambda(t)$ — отрезок при $t < t^*_\lambda = t_1$, т. е. полуплоскость $L(t)$ существенна в пересечении $L_a(t) \cap L(t) \cap L_b(t)$ для всех $t < t_1$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $t_1 < t_2$, $\lambda_1 = (L_a, L_1, L_b) \in \Lambda^0_{t_1}$ — выпуклый набор, L_a, L_b — выпуклая пара, $\lambda_2 = (L_a, L_2, L_b) \in \Lambda^0_{t_2}$, полупространства L_1 и L_2 сонаправлены. Тогда $\mu_{t_1}(\lambda_1) = \mu_{t_2}(\lambda_2)$.*

Доказательство. Поскольку $\lambda_1 \in \Lambda^0_{t_1}$ и $\lambda_2 \in \Lambda^0_{t_2}$, то $t_1 = t^*_{\lambda_1}$, $t_2 = t^*_{\lambda_2}$. Из выпуклости троек λ_1, λ_2 имеем

$$\gamma_{\lambda_1}(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \partial L_1(t), \quad \gamma_{\lambda_2}(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \partial L_2(t).$$

Предположим, что $\gamma_{\lambda_1}(t)$ — отрезок при $t > t^*_{\lambda_1}$. Тогда $\mu_{t_1}(\lambda_1) = t_1 - t^*_{\lambda_1} = 0$. Поскольку полупространства L_1 и L_2 сонаправлены и L_a, L_b — выпуклая пара, то $\gamma_{\lambda_2}(t)$ — отрезок при $t > t^*_{\lambda_2}$. Таким образом, $\mu_{t_2}(\lambda_2) = t_2 - t^*_{\lambda_2} = 0$. Случай пустого множества $\gamma_{\lambda_1}(t)$ при $t > t^*_{\lambda_1}$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

5. Формирование наборов дополнительных полупространств

Заметим, что в окрестности вершины выпуклости (вогнутости) множества M максимальный u-стабильный мост будет локально описываться формулой (2.5) (формулой (2.6)), примененной к вспомогательному выпуклому множеству (множеству с выпуклым дополнением), которое в окрестности рассматриваемой вершины совпадает с множеством M. Исходя из этого, для каждой выпуклой (вогнутой) пары последовательных полупространств L_a, L_b, соответствующих углу выпуклости (вогнутости) множества M, определим дополнительный выпуклый (вогнутый) набор упорядоченных полупространств $I_\vartheta = I_\vartheta(L_a, L_b)$, соответствующих некоторым нормалям из $\mathcal{N}(-P)$ (из $\mathcal{N}(-Q)$).

Дадим определение набора $I_\vartheta = I_\vartheta(L_a, L_b)$ для произвольной выпуклой пары полупространств L_a, L_b, не связанных с множеством M. Пусть η_a, η_b — единичные внешние нормали полуплоскостей $L_a(\vartheta)$, $L_b(\vartheta)$ соответственно, $A = L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta)$. Рассмотрим набор

$$\mathcal{A} = \bigl\{\Pi_\eta[A] \colon \eta \in \mathcal{N}(-P) \setminus \{\eta_a, \eta_b\}, \quad \rho(\eta; A) < +\infty\bigr\} \tag{5.1}$$

полуплоскостей, опорных к углу A. Если $\mathcal{A} = \varnothing$, то положим $I_\vartheta(L_a, L_b) = \varnothing$. Иначе введем непустой набор полупространств

$$I_* = \{\mathcal{T}_\vartheta(\Pi) \colon \Pi \in \mathcal{A}\} \tag{5.2}$$

и рассмотрим пересечение полуплоскостей

$$L_a(t) \cap L_b(t) \cap \{L(t) \colon L \in I_*\}, \quad t < \vartheta. \tag{5.3}$$

Определим набор $I_\vartheta(L_a, L_b)$ как набор тех полупространств из I_*, сечения которых существенны для пересечения (5.3). Если в наборе $I_\vartheta(L_a, L_b)$ более одного полупространства, то упорядочим его так, чтобы он был выпуклым.

Опишем процедуру формирования набора $I_\vartheta(L_a, L_b)$ с помощью индукции по количеству элементов множества I_*.

а) Рассмотрим случай, когда множество I_* одноэлементно, т. е. $I_* = \{L_1\}$. Пусть $\lambda_1 = (L_a, L_1, L_b)$. По лемме 4 имеем $\mu_\vartheta(\lambda_1) \in \{0, +\infty\}$.

Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = +\infty$, то по лемме 4 полуплоскость $L_1(t)$ является существенной в (5.3). Поэтому полагаем $I_\vartheta(L_a, L_b) = I_*$. Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = 0$, то полупространство L_1 является несущественным в (5.3) и $I_\vartheta(L_a, L_b) = \varnothing$.

б) Для наглядности рассмотрим еще случай двуэлементного множества $I_* = \{L_1, L_2\}$. Тогда набор $I_{ab} = \{L_a, L_1, L_2, L_b\}$ также является выпуклым.

Положим $\lambda_1 = (L_a, L_1, L_2)$, $\lambda_2 = (L_1, L_2, L_b)$. Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = +\infty$ и $\mu_\vartheta(\lambda_2) = +\infty$, то полуплоскости $L_1(t)$ и $L_2(t)$ являются существенными в (5.3). Поэтому примем $I_\vartheta(L_a, L_b) = I_*$.

Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = 0$, то полуплоскость $L_1(t)$ является несущественной для пересечения

$$L_a(t) \cap L_1(t) \cap L_2(t), \quad t < \vartheta,$$

а значит и для пересечения (5.3). Тогда осталось рассмотреть полуплоскость $L_2(t)$ на существенность в (5.3).

Пусть $\lambda_3 = (L_a, L_2, L_b)$. Аналогично случаю a), полагаем $I_\vartheta(L_a, L_b) = \{L_2\}$ при $\mu_\vartheta(\lambda_3) = +\infty$ и $I_\vartheta(L_a, L_b) = \varnothing$ при $\mu_\vartheta(\lambda_3) = 0$.

в) Предположим, что есть правило обработки набора I_*^k из k полупространств. Опишем правило обработки $(k+1)$-элементного выпуклого набора

$$I_* = \{L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}\}.$$

Пусть

$$I_{ab} = \{L_a, L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}, L_b\}.$$

Набор I_{ab} также является выпуклым.

Если для любой тройки λ последовательных полупространств из I_{ab} имеем $\mu_\vartheta(\lambda) = +\infty$, то сечения всех полупространств из I_* являются существенными в (5.3). Поэтому полагаем $I_\vartheta(L_a, L_b) = I_*$.

Если нашлась тройка λ_0 последовательных полупространств из набора I_{ab}, для которой $\mu_\vartheta(\lambda_0) = 0$, то формируется набор

$$I_*^k = \{L_1, L_2, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{k+1}\}$$

из k элементов, где L_i — среднее полупространство в тройке λ_0. Набор I_*^k может быть обработан по предположению индукции.

Лемма 6. *Пусть пара L_a, L_b полупространств выпукла. Тогда граница ∂K пересечения*

$$K(L_a, L_b) = L_a \cap L_b \cap \{L\colon L \in I_\vartheta(L_a, L_b)\} \tag{5.4}$$

является полупроницаемой поверхностью на отрезке $[0, \vartheta]$ и множество $K(L_a, L_b)$ находится со стороны $(+)$ поверхности ∂K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим квадрат с вершинами в точках $(\pm R, \pm R)$, $R > 0$:

$$\Omega_R = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon |x_1| \le R,\ |x_2| \le R\}.$$

Найдется такое $R > 0$, что пересечение $M^R = L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta) \cap \Omega_R$ — выпуклый многоугольник. Используя лемму 2, построим максимальный u-стабильный мост W^R для терминального множества M^R на отрезке $[0, \vartheta]$, который является пересечением конечного числа полупространств. При этом все полуплоскости в пересечении

$$K(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \{L(t)\colon L \in I_\vartheta(L_a, L_b)\}, \quad t < \vartheta, \tag{5.5}$$

являются существенными. Величину R можно выбрать настолько большой, что полуплоскости в (5.5) остаются существенными для сечений $W^R(t)$ моста W^R для всех $t \in [0, \vartheta]$. Тогда, учитывая замечание 4, получаем полупроницаемость поверхности ∂K. Лемма доказана.

Для вогнутой пары L_a, L_b набор (5.1) формируется для угла $A = L'_a(\vartheta) \cap L'_b(\vartheta)$, $L'_a = \overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_a}$, $L'_b = \overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_b}$, аналогично выпуклому случаю с заменой множества $-P$ на множество $-Q$. Набор I_* задается формулой (5.2). Упорядоченный вогнутый набор дополнительных полупространств $I_\vartheta(L_a, L_b)$ определяется как все полупространства из I_*, сечения которых существенны для пересечения

$$L'_a(t) \cap L'_b(t) \cap \{\overline{\mathbb{R}^2 \setminus L(t)}\colon L \in I_*\}, \quad t < \vartheta.$$

Опираясь на лемму 3, получаем следующее утверждение, аналогичное лемме 6.

Лемма 7. *Пусть пара L_a, L_b полупространств вогнута. Тогда граница ∂K_* пересечения*

$$K_*(L_a, L_b) = (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_a}) \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_b}) \cap \{\, \overline{\mathbb{R}^3 \setminus L} \colon L \in I_\vartheta(L_a, L_b)\,\} \tag{5.6}$$

является полупроницаемой поверхностью на отрезке $[0, \vartheta]$ и множество $K_*(L_a, L_b)$ находится со стороны $(-)$ поверхности ∂K_*.

6. Алгоритм построения полупроницаемой трубки от невыпуклого терминального множества

6.1. Формирование наборов полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$ и $\mathcal{L}(M, \vartheta)$

Пусть терминальное множество M является невыпуклым n-угольником, ребра которого перенумерованы от 1 до n в порядке положительного обхода границы ∂M множества M, т. е. множество остается слева при обходе границы.

Сформируем упорядоченный список полупространств в $\mathbb{R}^3$, аналогичных пересекающимся полупространствам в формулах (2.5) и (2.6), комбинируя эти формулы в зависимости от участка выпуклости или вогнутости границы множества M.

За основу возьмем список полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$, соответствующих набору нормалей $\mathcal{N}(M)$, который определяется следующим образом.

Множеству M поставим в соответствие упорядоченный набор полуплоскостей $\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \{\widetilde{\Pi}_i\}_{i=1}^n$. Полуплоскость $\widetilde{\Pi}_i$ определим как полуплоскость, содержащую ребро многоугольника ∂M с номером i, вектор внешней нормали к которой является внешней нормалью к множеству M в точках i-го ребра.

Будем рассматривать набор $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ полуплоскостей как циклический, т. е. для первой полуплоскости предыдущей является полуплоскость с номером n, а последующей для полуплоскости с номером n является первая полуплоскость.

Заметим, что любая пара последовательных полуплоскостей в наборе $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ является либо выпуклой, либо вогнутой.

Полуплоскость в наборе $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ будем называть *полуплоскостью зацепления* (соответствующее ребро многоугольника ∂M — *ребром зацепления*), если она образует с одной из соседних полуплоскостей выпуклую пару, а с другой соседней полуплоскостью — вогнутую пару.

Положим $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \{\mathcal{T}_\vartheta(\Pi) \colon \Pi \in \widetilde{\mathcal{M}}_1\}$. Набор полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ однозначно строится по множеству M и моменту ϑ. Обозначим результат такого построения через $\widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$.

Полупространство в наборе $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ будем называть *полупространством зацепления*, если оно образует с одним из соседних полупространств выпуклую пару, а с другим соседним полупространством — вогнутую пару.

Сформируем из набора $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ расширенный набор $\mathcal{L}_1$ полупространств, вставляя между каждой выпуклой (вогнутой) парой последовательных полупространств $L_a, L_b \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$ выпуклый (вогнутый) набор $I_\vartheta(L_a, L_b)$ дополнительных полупространств.

Таким образом, расширенный набор $\mathcal{L}_1$ полупространств в $\mathbb{R}^3$ однозначно определяется множеством M и значением ϑ. Обозначим результат такого построения через $\mathcal{L}(M, \vartheta)$, т. е. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(M, \vartheta)$.

6.2. Построения на первом смежном отрезке

Любое $L \in \mathcal{L}_1$ имеет в списке $\mathcal{L}_1$ предыдущее полупространство L_* и последующее полупространство L^*. Пусть $\lambda = (L_*, L, L^*)$. Поскольку $\lambda \in \Lambda$, то для $t \in [0, \vartheta]$ определен вес $\mu_t(\lambda)$, который обозначим через $\mu(L; \mathcal{L}_1, t)$.

По построению набора $\mathcal{L}_1$ имеем $\mu(L; \mathcal{L}_1, \vartheta) > 0$ для любого $L \in \mathcal{L}_1$.

Для построения многогранной трубки на основе семейства полупространств $\mathcal{L}_1$ определим отрезок на оси времени, смежный с моментом ϑ слева. Положим

$$\tau_1 := \min\{\,\mu(L;\mathcal{L}_1,\vartheta)\colon L\in\mathcal{L}_1\}\in(0,+\infty],\quad \vartheta_1 := \begin{cases}\vartheta-\tau_1, & \tau_1\in(0,\vartheta),\\ 0, & \tau_1\in[\vartheta,+\infty].\end{cases}$$

Заметим, что для любого $L\in\mathcal{L}_1$ плоскость ∂L пересекается с границами соседних полупространств в семействе $\mathcal{L}_1$ по прямым, которые не имеют общих точек при $t\in(\vartheta_1,\vartheta)$ и могут иметь общие точки при $t=\vartheta_1$ и $t=\vartheta$. Это позволяет определить многогранную поверхность E_1 на промежутке $(\vartheta_1,\vartheta]$ как результат последовательного пересечения границ полупространств из семейства $\mathcal{L}_1$. Для $t=\vartheta_1$ многогранную поверхность E_1 доопределим по непрерывности. Гранями многогранной поверхности E_1 на отрезке $[\vartheta_1,\vartheta]$ являются треугольники и трапеции.

Обозначим через $E_1(t)$ сечение поверхности E_1 плоскостью $t=\mathrm{const}$, $t\in[\vartheta_1,\vartheta]$, а через M_1 — ограниченное множество, определяемое равенством $E_1(\vartheta_1)=\partial M_1$.

Теорема 1. *Пусть для $t\in(\vartheta_1,\vartheta]$ множество $E_1(t)$ является замкнутой ломаной без самопересечений. Тогда*

$$\partial W_0(t)=E_1(t),\quad t\in[\vartheta_1,\vartheta].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta\in(0,\tau_1)$. При отсутствии самопересечений на интервале $(\vartheta_1,\vartheta]$ поверхность E_1 является многогранной трубкой на отрезке $[\vartheta_1+\delta,\vartheta]$. Докажем полупроницаемость E_1 на этом отрезке.

Пусть набор $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, введенный в подразд. 6.1, имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{L}}_1=\{\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\,\ldots\,\widetilde{L}_n\}.$$

Поверхность E_1 образована конечным числом кусков многогранных поверхностей ∂K_i, $i\in\overline{1,n}$, построенных на основе выпуклых или вогнутых пар $\widetilde{L}_i$, $\widetilde{L}_{i+1}$ последовательных полупространств из $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, $\widetilde{L}_{n+1}=\widetilde{L}_1$. Поверхность ∂K_i определяется как граница множества $K(\widetilde{L}_i,\widetilde{L}_{i+1})$, задаваемого формулой (5.4) (множества $K_*(\widetilde{L}_i,\widetilde{L}_{i+1})$, задаваемого формулой (5.6)), если пара L_a, L_b выпуклая (вогнутая), $i\in\overline{1,n}$. В силу лемм 6 и 7 многогранные поверхности ∂K_i, $i\in\overline{1,n}$, являются полупроницаемыми.

Множество $\partial K_i\cap\partial K_{i+1}$, $i\in\overline{1,n}$, содержит одну грань поверхности E_1, смежную с ребром терминального множества M, $\partial K_{n+1}=\partial K_1$. По определению момента ϑ_1 сечения граней поверхности E_1 не вырождаются в точку для $t\in[\vartheta_1+\delta,\vartheta]$. Следовательно, для выбранного δ найдется такое $\varepsilon>0$, что для любой точки $z_0\in E_1(t)$, $t\in[\vartheta_1+\delta,\vartheta]$, имеем $C^+_\varepsilon(z_0)\cap E_1\subset\partial K_j$ для некоторого $j\in\overline{1,n}$. Тогда в силу полупроницаемости ∂K_j получаем выполнение свойств 1), 2) из определения полупроницаемости для $C^+_\varepsilon(z_0)$.

Таким образом, учитывая замечание 4, имеем $\partial W_0(t)=E_1(t)$ для $t\in(\vartheta_1,\vartheta]$. Опираясь на лемму 1, заключаем, что $\partial W_0(\vartheta_1)=E_1(\vartheta_1)$. Теорема доказана.

6.3. Последовательное построение на других смежных отрезках

Определение первого отрезка $[\vartheta_1,\vartheta]$, построение на нем поверхности E_1 и определение множества M_1 описано в предыдущем подразделе. Далее будем предполагать, что для $t\in(\vartheta_1,\vartheta]$ множество $E_1(t)$ является замкнутой ломаной без самопересечений.

Если $\vartheta_1=0$, то по теореме 1 имеем $W_0(0)=M_1$. Далее рассмотрим случай $\vartheta_1>0$.

Предположим, что множество M_1 имеет пустую внутренность. Опираясь на полупроницаемость многогранных поверхностей, основанных на продолжении соответствующих смежных граней поверхности E_1 на отрезок $[0,\vartheta_1]$, можно доказать, что $W_0(t)=\varnothing$, $t\in[0,\vartheta_1)$. Доказательство опускаем.

Пусть внутренность множества M_1 непуста и его гранца $E_1(\vartheta_1)$ — замкнутая ломаная, имеющая самопересечения. Тогда либо множество M_1 не односвязно, либо множество его внутренних точек не связно, либо множество M_1 имеет "усики" в виде отрезков. В этом случае продолжение построений на интервале $[0, \vartheta_1)$ в статье не рассматривается.

Предположим теперь, что $E_1(\vartheta_1)$ — замкнутая ломаная без самопересечений. Тогда делаем второй шаг построений для промежутка времени $[0, \vartheta_1]$ и терминального множества M_1. На основе множества M_1 определяем семейство $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(M_1, \vartheta_1)$, находим значения

$$\tau_2 = \min\{\, \mu(L; \mathcal{L}_2, \vartheta_1) \colon L \in \mathcal{L}_2\} > 0, \quad \vartheta_2 = \begin{cases} \vartheta_1 - \tau_2, & \tau_2 \in (0, \vartheta_1), \\ 0, & \tau_2 \in [\vartheta_1, +\infty] \end{cases}$$

и формируем поверхность E_2 из полупространств $\mathcal{L}_2$ на отрезке $[\vartheta_2, \vartheta_1]$ аналогично поверхности E_1. Обозначим через M_2 множество, определяемое равенством $E_2(\vartheta_2) = \partial M_2$.

Покажем, что набор $\mathcal{L}_2$ может быть построен на основе набора $\mathcal{L}_1$ без восстановления множества M_1. Непосредственно из определения поверхности E_1 заключаем, что набор $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \widetilde{\mathcal{L}}(M_1, \vartheta)$ получается из набора $\mathcal{L}_1$ удалением "лишних" полупространств, не участвующих в образовании ребер множества M_1. Сначала из набора $\mathcal{L}_1$ должны быть удалены полупространства, ставшие несущественными относительно соседей в момент $t = \vartheta_1$, т. е. имеющие вес τ_1. В результате получаем набор

$$\mathcal{L}_1^0 = \mathcal{L}_1 \setminus \{L \in \mathcal{L}_1 \colon \mu(L; \mathcal{L}_1, \vartheta) = \tau_1\}.$$

При этом в наборе $\mathcal{L}_1^0$ могут возникнуть группы одинаковых соседних полупространств. Оставив в каждой из таких групп только одно полупространство, обозначим новый набор через $\mathcal{L}_1^*$. Тогда последовательное пересечение границ полуплоскостей $\{L(\vartheta_1) \colon L \in \mathcal{L}_1^*\}$ образует ломаную $E_1(\vartheta_1)$, т. е. границу множества M_1. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_1^*$.

Для получения набора $\mathcal{L}_2$ осталось добавить между каждой парой L_a, L_b последовательных полупространств из $\mathcal{L}_1^*$ набор дополнительных полупространств $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$.

Сформулируем условия на пару L_a, L_b, при которых $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \varnothing$. Определим упорядоченный набор

$$J_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \{L_a, L_1, L_2, \ldots, L_{m-1}, L_b\} \subset \mathcal{L}_1 \tag{6.1}$$

следующим образом. Пусть x_* — вершина угла $L_a(\vartheta_1) \cap L_b(\vartheta_1)$ для случая выпуклой пары L_a, L_b или вершина угла $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus (L_a(\vartheta_1) \cup L_b(\vartheta_1))}$ для случая вогнутой пары L_a, L_b. Точка x_* совпадает с одной из вершин многоугольника M_1. Имеем $z_* = (\vartheta_1, x_*) \in E_1$. Точка z_* является общим концом m ребер поверхности E_1, другие концы которых лежат в плоскости $t = \vartheta$, $m \geq 1$. При $m = 1$ положим $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \{L_a, L_b\}$. При $m > 1$ каждое полупространство L_j ($j \in \overline{1, m-1}$) соответствует грани поверхности E_1, содержащей два ребра с общим концом в точке x_*.

Теорема 2. *Пусть набор $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ является выпуклым или вогнутым. Тогда*

$$I_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай выпуклого набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ вида (6.1). Выпуклость набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ возможна только для выпуклой пары L_a, L_b. Пусть $z_* = (\vartheta_1, x_*)$, где x_* — вершина угла $L_a(\vartheta_1) \cap L_b(\vartheta_1)$.

От противного предположим, что найдется полупространство $L_* \in I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Для выпуклой пары L_a, L_b набор $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ также является выпуклым по определению. Следовательно, тройка $\lambda_* = (L_a, L_*, L_b)$ будет выпуклой.

1) Покажем, что

$$\mu_{\vartheta_1}(\lambda_*) = +\infty. \tag{6.2}$$

Обозначим через $\lambda_1 = (L_*^1, L_*, L_*^2)$ тройку последовательных полупространств в наборе $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Заметим, что L_*^1 может совпадать с L_a, а L_*^2 может совпадать с L_b.

По построению дополнительного набора $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ полуплоскости $L_a(t)$, $L_*^1(t)$, $L_*(t)$, $L_*^2(t)$, $L_b(t)$ являются существенными для пересечения

$$L_a(t) \cap L_*^1(t) \cap L_*(t) \cap L_*^2(t) \cap L_b(t), \quad t < \vartheta_1.$$

Следовательно, полуплоскость $L_*(t)$ является существенной для пересечения

$$L_a(t) \cap L_*(t) \cap L_b(t), \quad t < \vartheta_1.$$

Отсюда получаем (6.2).

2) Выпуклость набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ влечет вложение

$$\bigcap \{L(\vartheta)\colon L \in J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)\} \subset \bigl(L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta)\bigr). \tag{6.3}$$

Из (6.2) получаем, что $L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta) \subset L_*(\vartheta)$. Поскольку точка z_* принадлежит плоскости ∂L_* и границам всех полупространств из $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$, то полуплоскость $L_*(\vartheta)$ не сонаправлена и не совпадает ни с одной из полуплоскостей $L(\vartheta)$, $L \in J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Следовательно, найдется такая пара последовательных полупространств $L_1^*, L_2^* \in J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$, что тройка $\lambda_2 = (L_1^*, L_*, L_2^*)$ является выпуклой.

3) Рассмотрим ребро e_* поверхности E_1, смежное с гранями, соответствующими полупространствам L_1^* и L_2^*. Пусть z^ϑ — конец отрезка e_*, лежащий в плоскости $t = \vartheta$. Из (6.3) следует, что $e_* \subset L_a \cap L_b$.

Обозначим через $\bar{L}$ полупространство, сонаправленное с L_* и проходящее через точку z^ϑ. Поскольку $e_* \cap \partial L_* = \{z_*\}$, $e_* \cap \partial \bar{L} = \{z^\vartheta\}$ и $\bar{L} \subset L_*$, то $\mu_\vartheta(\lambda_2) = +\infty$.

Учитывая лемму 5, для тройки $\lambda_3 = (L_1^*, \bar{L}, L_2^*)$ имеем $\mu_\vartheta(\lambda_3) = +\infty$. В этом случае согласно процедуре построения расширенного набора $\mathcal{L}(M, \vartheta)$ имеем $\bar{L} \in I_\vartheta(L_1^*, L_2^*)$ и полупространства L_1^*, L_2^* не могут быть соседними в наборе $\mathcal{L}(M, \vartheta)$, что противоречит выбору полупространств L_1^* и L_2^*.

Полученное противоречие доказывает, что $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \varnothing$ в случае выпуклого набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Случай вогнутого набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, построение полупроницаемой трубки $E_1 \cup E_2$ на отрезке времени $[\vartheta_2, \vartheta]$ сводится к обработке первоначального набора $\mathcal{L}_1$, состоящей из следующих шагов: а) удаление “лишних” полупространств относительно момента времени ϑ_1; б) добавление дополнительных полупространств относительно момента ϑ_1 между теми соседними полупространствами, между которыми было удалено хотя бы одно полупространство зацепления; в) удаление “лишних” полупространств относительно момента ϑ_2. Заметим, что при удалении полупространства зацепления эта роль может перейти к одному из соседних оставшихся полупространств.

Опишем построения для произвольного шага $k > 1$. Предполагая, что $\vartheta_{k-1} > 0$ и $E_{k-1}(\vartheta_{k-1})$ — замкнутая ломаная без самопересечений, обозначим символом M_{k-1} множество, ограниченное ломаной $E_{k-1}(\vartheta_{k-1})$. Делаем следующий шаг построений для промежутка времени $[0, \vartheta_{k-1}]$ и терминального множества M_{k-1}. На основе множества M_{k-1} формируем семейство $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(M_{k-1}, \vartheta_{k-1})$, находим значения

$$\tau_k = \min\{\, \mu(L; \mathcal{L}_k, \vartheta_{k-1})\colon L \in \mathcal{L}_k\} > 0, \quad \vartheta_k = \begin{cases} \vartheta_{k-1} - \tau_k, & \tau_k \in (0, \vartheta_{k-1}), \\ 0, & \tau_k \in [\vartheta_{k-1}, +\infty] \end{cases}$$

и строим поверхность E_k из полупространств $\mathcal{L}_k$ на отрезке $[\vartheta_k, \vartheta_{k-1}]$. Обозначаем через M_k множество, ограниченное ломаной $E_k(\vartheta_k)$.

Набор $\mathcal{L}_k$ может быть построен на основе набора $\mathcal{L}_{k-1}$ без восстановления множества M_{k-1}. Следовательно, построение полупроницаемой трубки $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ типа $\pm$ на отрезке времени $[\vartheta_k, \vartheta]$ сводится к обработке первоначального набора $\mathcal{L}_1$, состоящей из повторения двух шагов для каждого момента ϑ_s, $s = 1, \dots, k-1$:

а) удаление “лишних” полупространств относительно момента ϑ_s;

б) добавление дополнительных полупространств относительно момента ϑ_s между теми соседними полупространствами, между которыми было удалено хотя бы одно полупространство зацепления.

Таким образом, на каждом шаге $k \geq 1$ возможен один из следующих вариантов.

1. $\vartheta_k = 0$ и множество $W_0(0) = M_k$ непусто.
2. $\vartheta_k > 0$ и множество M_k имеет пустую внутренность, что соответствует вырождению максимального u-стабильного моста в момент ϑ_k, т. е. $W_0(0) = \varnothing$.
3. Возникает ситуация самопересечения замкнутой ломаной $E_k(\vartheta_k)$ и дальнейшие построения в статье не рассматриваются.
4. Можно сделать следующий шаг и построить полупроницаемую трубку типа $\pm$ на отрезке $[\vartheta_{k+1}, \vartheta]$, $\vartheta_{k+1} < \vartheta_k$.

Алгоритм конечен, поскольку не существует точки $\vartheta_* \in [0, \vartheta)$ предельной для монотонно убывающей последовательности моментов времени $\{\vartheta_k\}$. Доказательство этого утверждения в статье не приводится.

Предложенным алгоритмом были просчитаны множества разрешимости для нескольких вариантов невыпуклого многоугольника M, отрезков P, Q и значений ϑ. Алгоритм может быть реализован на вычислительной машине в общем случае произвольного многоугольника M, многоугольников или отрезков P, Q и значения ϑ. Заметим, что проверка отсутствия самопересечений границы множества достижимости является самостоятельной алгоритмической задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S.** Zero-sum Pursuit-Evasion differential games with many objects: Survey of publications // Dyn. Games Appl. 2016. P. 1–25. doi: 10.1007/s13235-016-0209-z .
3. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 518 p.
5. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
9. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры, II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
10. **Хадвигер Г.** Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с.
11. **Kamneva L.V., Patsko V.S.** Maximal stable bridge in game with simple motions in the plane // Advances in Dynamic and Evolutionary Games: Theory, Applications, and Numerical Methods / eds. Frank Thuijsman, Florian Wagener. 2016. P. 139–163. (Ann. Internat. Soc. Dynam. Games; vol. 14). doi: 10.1007/978-3-319-28014-1 .

Поступила 19.12.2016

Камнева Людмила Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Пацко Валерий Семенович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: patsko@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games.* New York: John Wiley and Sons, 1965, 408 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow, Mir Publ., 1967, 480 p.
2. Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications. *Dyn. Games Appl.*, 2016, pp. 1–25. doi: 10.1007/s13235-016-0209-z .
3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 420 p.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988, 518 p.
5. Pshenichnyy B.N., Sagaydak M.I. Differential games with fixed time. *J. Cybernet.*, vol. 1, no. 1, pp. 117–135. doi: 10.1080/01969727108545833 .
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, Ser. System & Control: Foundations & Applications, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
8. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona — Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p.
9. Pontryagin L.S. Linear differential games, II. *Soviet Math. Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 910–912.
10. Hadwiger H. Vorlesungen uber Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie. Berlin: Springer-Verlag, 1957. 312 p. Translated under the title *Lektsii ob ob"eme, ploshchadi poverkhnosti i izoperimetrii*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 416 p.
11. Kamneva L.V., Patsko V.S. Maximal stable bridge in game with simple motions in the plane. *Advances in Dynamic and Evolutionary Games: Theory, Applications, and Numerical Methods*, eds. Frank Thuijsman, Florian Wagener, 2016, Ser. Ann. Internat. Soc. Dynam. Games, vol. 14, pp. 139–163. doi: 10.1007/978-3-319-28014-1 .

Kamneva L. V. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Patsko V. S. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru