ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 621.452

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ВОЗДУХОПОДОГРЕВАТЕЛЯХ[1]

А. А. Азамов, М. А. Бекимов

В работе предлагается математическая модель процесса теплообмена во вращающемся регенеративном воздухоподогревателе тепловых электростанций. Модель получена дискретизацией процесса в результате усреднения как временной, так и пространственных переменных. При наложении на процесс ряда упрощающих предположений составлена линейная дискретная система $z(n+1) = Az(n) + r(n)$ порядка $2m$ с мономиальной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $(2m \times 2m)$, в которой $a_{ij} = \alpha_i$ при $i = 1, j = 2m$ и при $i = 2, \ldots, 2m$, $j = i - 1$, а все остальные элементы равны 0. С использованием соотношения $A^{2m} = \big(\prod_{i=1}^{2m} \alpha_i\big)E$ и формулы Коши изучены устойчивость, периодичность, сходимость средних по Чезаро и другие свойства. Далее, рассмотрена задача идентификации системы, состоящая в определении коэффициентов $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, 2m$, на основе значений $z(1), z(2), \ldots, z(2m)$. В предположении $r(n) = r = \mathrm{const}$ при $n = 1, 2, \ldots, 2m$ она приведена к матричному уравнению $AY = B$, где квадратная матрица Y составлена из столбцов $y_1 = t = r-(E-A)z_0$, $y_2 = Ay_1+t, \ldots, y_{2m} = Ay_{2m-1}+t$, а $B = [t-y_2, t-y_3, \ldots, t-y_{2m-1}]$. Выведена рекурентная формула для $detY$. Установлено, что если $\Delta = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m - \alpha_{m+1}\alpha_{m+2} \ldots \alpha_{2m} \neq 0$, то $detY \neq 0$ и $A = BY^{-1}$.

Ключевые слова: процесс теплообмена, мономиальная матрица, усреднение, линейное дискретное уравнение, формула Коши, установившийся режим, периодический режим, средние Чезаро, задача идентификации.

A. A. Azamov, M. A. Bekimov. A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters.

We propose a mathematical model of the heat transfer process in a rotating regenerative air preheater of a thermal power plant. The model is obtained by discretizing the process as a result of averaging both temporal and spatial variables. Making a number of simplifying assumptions, we write a linear discrete system $z(n+1) = Az(n)+r(n)$ of order $2m$ with a monomial $2m \times 2m$ matrix $A = (a_{ij})$ in which $a_{ij} = \alpha_i$ for $i = 1$, $j = 2m$ and for $i = 2, \ldots, 2m$, $j = i-1$, whereas all the other elements are zero. Using the relation $A^{2m} = \left(\prod_{i=1}^{2m} \alpha_i\right) E$ and the Cauchy formula, we study the stability, periodicity, and convergence of the Cesàro means and other properties. We also consider the identification problem consisting in finding unknown coefficients α_i, $i = 1, 2, \ldots, 2m$, from the values $z(1), z(2), \ldots, z(2m)$ of the trajectory. Under the assumption $r(n) = r = \mathrm{const}$ for $n = 1, 2, \ldots, 2m$, we transform the problem to the matrix equation $AY = B$, where the square matrix Y is composed of the columns $y_1 = t = r - (E - A)z_0$, $y_2 = Ay_1 + t$, $\ldots$, $y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$ and $B = [t - y_2, t - y_3, \ldots, t - y_{2m-1}]$. A recurrence relation is derived for $\det Y$. It is proved that, if $\Delta = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m - \alpha_{m+1}\alpha m + 2 \ldots \alpha_{2m} \neq 0$, then $\det Y \neq 0$ and $A = BY^{-1}$.

Keywords: heat transfer process, cyclic process, monomial matrix, averaging, linear discrete equation, Cauchy formula, steady state behavior, periodic mode, Cesáro mean, identification.

MSC: 65Q10, 65F40, 80A20, 97M50

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19

Введение

Вращающийся регенеративный воздухоподогреватель (ВРВП) является специальным агрегатом, подключаемым к теплоэлектростанциям (ТЭС) с целью повышения к.п.д. за счет подогрева воздуха, вдуваемого в котел станции отработанной горячей смесью дыма и газа (в дальнейшем *газ*), образуемой в результате сжигания топлива. Использование ВРВП позволяет также заметно уменьшить тепловое загрязнение атмосферы [1; 2].

[1]Работа выполнена при поддержке Комитета по координации развития науки и технологий при Кабинете министров Республики Узбекистан (проект Ф4-ФА-Ф014).

В настоящее время в ТЭС применяется несколько типов ВРВП. Здесь будет рассмотрен случай агрегата, основной блок которого состоит из вращающего цилиндрического барабана с металлическими насадками высокой теплопроводности. Область пространства, занимаемая барабаном ВРВП, делится на две части, B_A и B_G, фиксированной условной плоскостью, проходящей через ось цилиндра. В процессе работы ВРВП сквозь часть B_A проходит атмосферный воздух в одном направлении, параллельном оси барабана, нагреваясь за счет отбора тепла из насадок, снижая тем самым температуру. Сквозь часть B_G проходит газ в обратном направлении, охлаждаясь за счет отдачи тепла насадкам. Конечная передача тепла из горячего газа в холодный воздух происходит за счет вращения барабана вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

Наблюдение и контроль за температурой насадок и выходящих из ВРВП воздуха и газа (называемых вместе словом “теплоноситель”) составляют задачу, важную для эффективной эксплуатации ВРВП [1–3]. Непосредственное измерение температуры входящих и выходящих теплоносителей легко осуществляется, в то время как наблюдение и контроль за температурой насадок требуют применения сложной измерительной техники. Поэтому на практике широко применяется математическое моделирование ВРВП.

К настоящему времени предложены различные математические модели процесса теплообмена в ВРВП (см. [1–6]). Необходимо отметить, что к математическому моделированию работы ВРВП в принципе можно применять уравнения термодинамики твердого тела и газа [3]. Однако при этом приходится иметь дело с рядом сложностей, влияющих на адекватность модели. Первая из них состоит в том, что конфигурация насадок имеет довольно сложную геометрию, из-за чего граничные условия, в том числе условия сопряжения на поверхности насадок, становятся далеко не простыми. Вторая сложность связана с тем, что потоки теплоносителей, проходящих сквозь барабан ВРВП, не являются ламинарными, сопровождаясь турбулентностью [3; 4]. Дополнительную сложность привносит и необходимость учета вращения барабана. В силу этих и других особенностей все математические модели ВРВП строятся при тех или иных упрощающих предположениях.

В настоящей работе предлагается математическая модель термодинамического процесса теплообмена в ВРВП, основанная на дискретизации параметров, описывающих как сам процесс, так и геометрическую структуру барабана и его вращение. При этом модель описывается линейной дискретной системой с мономиальной матрицей [7], что позволяет достаточно полно рассмотреть вопросы качественного поведения решений и исследовать задачу идентификации.

1. Вывод уравнений начально-краевой задачи

Пусть барабан ВРВП представлен цилиндром $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$. Будем считать, что часть B_A определяется условием $y \ge 0$, а часть B_G — условием $y \le 0$. Температуру в момент времени t в точке (x, y, z), принадлежащей области, занимаемой насадками, обозначим через $\Theta(t, x, y, z)$, а температуру теплоносителя (воздуха или газа) в точке (x, y, z) вне насадок — через $T(t, x, y, z)$. Пара величин $\Theta(t, x, y, z)$, $T(t, x, y, z)$ полностью характеризуют процесс теплообмена в барабане ВРВП, но, как это было отмечено выше, выписать динамические уравнения и начально-граничную задачу для них не является простой задачей, а исследование получаемой таким путем задачи аналитическими методами практически невозможно.

В связи с этим перейдем к дискретной модели ВРВП, а именно, делим каждую из частей B_A и B_G на m равных секторов плоскостями, проходящими через ось барабана. Эти секторы обозначим S_1, $S_2, \ldots$, S_{2m}. (Секторы от S_1 до S_m составляют B_A.)

Пусть h — время, за которое барабан повернется на угол π/m, $I(n) = [nh,\ (n+1)h]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $V(X)$ — объем части X. Обозначим через B_k^* часть сектора S_k, занятую насадками, затем положим $B_k^o = S_k \backslash B_k^*$. Введем в рассмотрение осредненные величины

$$x_k(n) = \frac{1}{hV(B_k^*)} \int\limits_{I(n)} \int\limits_{B_k^*} \Theta(t,\, x,\, y,\, z) dxdydzdt, \quad u_k(n) = \frac{1}{hV(B_k^o)} \int\limits_{I(n)} \int\limits_{B_k^o} T(t,\, x,\, y,\, z) dxdydzdt.$$

Уравнения, связывающие эти величины, выведем при следующих упрощающих предположениях:

1. При $nh \le t < (n+1)h$ барабан ВРВП остается неподвижным, порция теплоносителя, заполнявшая часть $B_k^o,\ k = 1,\, 2\, \dots, m$ (соответственно $B_k^o,\ k = m{+}1,\, \dots, 2m,$) также остается неподвижной, теплообмен между теплоносителем и насадками происходит в соответствии с линейным законом Ньютона [2].

2. В момент времени $t = (n+1)h$ нагретая порция воздуха с температурой $u_k(n),\ k = 1,\, 2\dots, m$, покидает область $B_k^o,\ k = 1,\, 2\, \dots, m$, остывшая до температуры $u_k(n),\ k = m + 1,\, \dots,\, 2m$, порция газа покидает область $B_k^o,\ k = m+1,\, \dots, 2m$, барабан скачком поворачивается на угол $180^o/m$; после этого часть $B_k^o,\ k = 1,\, 2,\, \dots, m$, заполняется новой порцией воздуха из внешней среды (или из калорифера в случае, если он подключен к ВРВП, с температурой $q_k(n),\ k = 1,\, 2\dots, m$, а часть $B_k^o,\ k = m+1,\, \dots, 2m$, заполняется новой порцией газа с температурой $q_k(n),\ k = m+1,\, \dots, 2m$.

В соответствии с законом Ньютона для температуры насадок имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &x_1(n+1) = (1-\bar\alpha_1 h)x_{2m}(n) + \bar\beta_1 h q_1(n), \\ &x_k(n+1) = (1-\bar\alpha_k h)x_{k-1}(n) + \bar\beta_k h q_k(n), \quad k = 2, 3, \dots, 2m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

а для температуры выходящих из ВРВР теплоносителей — соотношения

$$u_k(n) = q_k(n) + \bar\gamma_k h(x_k(n) - q_k(n)), \quad k = 1, 2, \dots, 2m-1, 2m. \tag{1.2}$$

Здесь $\bar\alpha_k,\, \bar\beta_k,\, \bar\gamma_k$ — параметры $(k = 1, 2, \dots, 2m)$, характеризующие процесс теплообмена в ВРВП (геометрию и теплоемкость корпуса барабана и системы насадок, состав, плотность и влажность воздуха и газа, коэффициенты теплопроводности и диффузии; в эти же параметры включены и характеристики теплообмена на поверхностях контакта насадок с теплоносителями). Следует отметить, что значение этих величин может меняться в течение процесса, например из-за износа насадок, осадки сажи, отклонения теплообмена от линейного закона и т. п. На них может влиять и теплообмен на корпусе ВРВП. Здесь предполагается, что набор величин $\bar\alpha_k,\, \bar\beta_k,\, \bar\gamma_k$ остается неизменным. При этом предположении соотношения (1.1), (1.2) представляют собой замкнутую систему линейных дискретных уравнений [8]. Необходимо особо подчеркнуть, что выведенная система не относится к типу разностных уравнений, получаемых из дифференциальных уравнений в результате замены производных отношением приращений, так как при $h \to 0$ равенства (1.1), (1.2) не переходят в систему дифференциальных уравнений. Это обстоятельство связано с вращением барабана ВРВП и поэтому является математическим выражением данной особенности.

Система (1.1), (1.2) получена в результате довольно сильных упрощающих предположений о процессе теплообмена в ВРВП. Тем не менее благодаря такому упрощению она допускает достаточно полный анализ и может служить базовой моделью для описания работы ВРВП.

2. Анализ системы

Матрица системы (1.1), (1.2), как это было подчеркнуто выше, мономиальная: на каждой строке и на каждом столбце лишь один элемент отличен от 0. Если $A = (\alpha_{ij}), i, j = 1,\, 2, \dots, 2m$, то в данном случае $\alpha_{1,\,2m} = \alpha_{2m} = 1 - \bar\alpha_{2m} h$, $\alpha_{i,i-1} = \alpha_i = 1 - \bar\alpha_i h$ при $i = 2, 3, \dots, 2m$ и $\alpha_{ij} = 0$ для других пар индексов $(i,\, j)$ (каждая такая пара называется позицией). В дальнейшем будем пользоваться обозначением индексов по модулю $2m$, сдвинутым на 1. А именно, индекс с любым целым значением k считается равным числу из $\{1, 2, \ldots, 2m\}$, которое сравним с k по модулю $2m$. Например, $\alpha_0 = \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1} = \alpha_1, \alpha_{-1} = \alpha_{2m-1}$. Тогда мономиальная матрица A определится единым соотношением: $\alpha_{i,i-1} = \alpha_i = 1 - \bar{\alpha}_i h$ для всех $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$, а первое соотношение в (1.1) получится из второго при $k = 1$.

Введя в рассмотрение векторы $z(n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{2m})^T$, $r(n) = h(\bar{\beta}_1 q_1(n), \bar{\beta}_2 q_2(n), \ldots, \bar{\beta}_{2m} q_{2m}(n))^T$ (где T — знак транспортирования, превращающий вектор-строку в вектор-столбец), систему (1.1), (1.2) можно записать в стандартном виде

$$z(n+1) = Az(n) + r(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.3}$$

Все дальнейшие рассуждения проводятся в предположении $0 < \bar{\alpha}_k h,\ \bar{\beta}_k h < 1$, $k = 1, \ldots, 2m$. Совокупность этих неравенств будем называть *условием адекватности* модели, так как только при этом условии температура газа, проходящего сквозь ВРВП, убывает, а температура воздуха возрастает.

Пусть $\mu = \sqrt[2m]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2m}}$. В силу условия адекватности $0 < \mu < 1$. Тогда собственные числа матрицы A будут равны $\lambda_k = \mu e^{\pi k i/m}$, $k = 0, 1, \ldots, 2m-1$. Поскольку они лежат внутри единичного круга, то все решения системы (1.1), (1.2) асимптотически устойчивы [8]. Имеет место также

Теорема 1. a) *если последовательность $r(n)$ ограничена (стремится к пределу r_* при $n \to \infty$), то все решения также ограничены (соответственно, стремятся к пределу $(E - A)^{-1} r_*$);*

b) *если последовательность $r(n)$ периодическая, т. е. $r(n+T) \equiv r(n)$ для некоторого целого T, $T \geq 2$, то существует единственное периодическое решение (период которого совпадает с T);*

c) *если средние по Чезаро $R_n = \dfrac{1}{n}[r(0) + r(1) + \cdots + r(n-1)]$ имеют предел R_*, то для каждого решения $z(n)$ средние по Чезаро $Z_n = \dfrac{1}{n}[z(1) + z(2) + \cdots + z(n)]$ также имеют предел (равный $(E - A)^{-1} R_*$).*

Доказательство. Эти свойства легко выводятся из формулы Коши [9]

$$z(n) = A^n z(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} r(k), \tag{2.4}$$

которую в рассматриваемом случае можно переписать в более удобной для вычислений форме. Как легко заметить, $A^{2m} = \mu^{2m} E$, где E — единичная матрица. Поэтому сумму в (2.4) с растущим числом матричных слагаемых можно заменить на разложение по конечной и фиксированной системе $E, A, A^2, \ldots, A^{2m-1}$. Пусть $n = 2m\sigma + \rho, m$ — целое положительное, $\rho \in \{0, 1, 2, \ldots, 2m-1\}$ (результат деления n на $2m$ с остатком). Тогда

$$z(n) = Ef_0(n) + Af_1(n) + \cdots + A^{2m-1} f_{2m-1}(n), \tag{2.5}$$

где

$$f_k(n) = \sum_{j=0}^{\sigma} \mu^{j\sigma} r[2m - (j\sigma + k)] \quad \text{при} \quad k = 0,\ 2, \ldots, \rho,$$

$$f_k(n) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} \mu^{j\sigma} r[2m - (j\sigma + k)] \quad \text{при} \quad k = \rho + 1,\ \rho + 2, \ldots, 2m - 1.$$

Тогда, принимая во внимание $A^n = \mu^{2m\sigma} A^\rho$, получим требуемое выражение (2.5). Отсюда с учетом условия $0 < \mu < 1$ следует справедливость утверждений теоремы.

Помимо теоремы 1 с опорой на (2.5) можно доказать и другие предельные свойства решений системы (1.1), (1.2) (в работе [10] несколько таких свойств установлено для $m = 1$, соответствующие доказательства с небольшими изменениями обобщаются на случай произвольного m).

3. Синтез системы

Как было отмечено выше, значения параметров $\bar{\alpha}_k,\ \bar{\beta}_k,\ \bar{\gamma}_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2m)$ зависят от многочисленных и разнообразных по природе факторов. Более того, трудно даже указать, на основе каких физических законов их можно определить. В связи с этим естественно рассмотреть обратную задачу — нахождение значений $\bar{\alpha}_k,\ \bar{\beta}_k,\ \bar{\gamma}_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2m)$, исходя из значений $z_n,\ u_n$ (т. е. температур насадок и теплоносителей), определяемых посредством измерений. Эту задачу естественно назвать *синтезом системы* (1.1), (1.2). В первую очередь заметим, что следует разделить ее на две ступени. Задача синтеза первой ступени состоит в определении параметров $\bar{\alpha}_k$ на основе z_n для конечного числа значений n. Задача второй ступени — определение всех параметров $\bar{\alpha}_k,\ \bar{\beta}_k,\ \bar{\gamma}_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2m)$ с учетом значений лишь переменных u_n, измерение которых легче осуществить на практике.

Задача синтеза второй ступени — более важная для приложений, но является нелинейной (см. (1.2)). Здесь она не затрагивается. В отличие от нее задача первой ступени линейная и поддается решению.

В дальнейшем будем считать $r_n = r = \mathrm{const}$. Такое предположение, равносильное неизменности температур выходящих в ВРВП воздуха и газа, выполняется, как правило, на интервалах времени по крайней мере до нескольких часов. Замена $y_n = z_n - z_0$ приведет (2.3) к системе

$$y_{n+1} = Ay_n + t, \quad y_0 = 0, \tag{3.6}$$

где $t = r - (E - A)z_0$.

Введем в рассмотрение $(2m \times 2m)$-матрицы

$$Y = [y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{2m}], \quad B = [t - y_2,\ t - y_3,\ \ldots,\ t - y_{2m+1}].$$

Тогда цепочка равенств $y_1 = t,\ \ y_2 = Ay_1 + t,\ \ldots,\ y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$ запишется в виде

$$AY = B. \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Пусть вектор $t = (t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_{2m})$ выбран так, что $t_k = 1$ для $k = 1$ и $k = m+1$ и $t_k = 0$ для остальных значений k. Тогда если $\Delta = \alpha_m \ldots \alpha_2\alpha_1 - \alpha_{2m} \ldots \alpha_{m+2}\alpha_{m+1} \neq 0$, то матрица Y обратима.*

Доказательство. Поскольку $y_1 = t,\ \ y_2 = t + At,\ y_3 = t + At + A^2t, \ldots,\ y_{2m} = t + At + A^2t + \ldots + A^{2m-1}t$, то, вычитая из k-го столбца $(k = 2m,\ 2m-1, \ldots, 3,\ 2)$ предыдущий столбец, получим $\det Y = \det[t,\ At,\ A^2t, \ldots, A^{2m-1}t]$.

Пусть $[k, l]$ — так называемая матричная единица [11], у которой элемент в позиции (k, l) равен 1, а все остальные элементы равны 0. Если в традиционном обозначении $A = (x_{ij})$, то $A = \sum_{i,j} x_{ij}[i, j]$. В рассматриваемом случае $A = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j[j + 1,\ j]$ (в соответствии с принятым соглашением $\alpha_0 = \alpha_{2m},\ [1,\ 0] = [1,\ 2m]$).

Матричные единицы перемножаются по правилам [11]

$$[i,\ j] \cdot [k,\ l] = [i,\ l],\ \text{если} j = k;$$

$$[i, j] \cdot [k, l] = O\,(\text{нулевая матрица})\ \text{при}\, j \neq k.$$

Пользуясь этими правилами, легко вычислить

$$A^k = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j\alpha_{j-1} \ldots \alpha_{j-k+1}[j + 1, j - k + 1].$$

Например,

$$A^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j[j + 1, j] \sum_{l=0}^{2m-1} \alpha_l[l + 1, l].$$

Произведение $[j+1, j] \cdot [l+1, l]$ равно $[j+1, j-1]$ при $j = l-1$ и 0 для остальных значений l, поэтому

$$A^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j \alpha_{j-1} [j+1, j-1].$$

Аналогично

$$A^k = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j \alpha_{j-1} \dots \alpha_{j-k+1} [j+1, j-k+1].$$

При умножении A^k на вектор t отличными от 0 будут только те компоненты вектора $A^k t$, в которых участвуют элементы A^k из 1-го и $(m+1)$-го столбцов, чему соответствуют $j-k+1 = 1$ и $i-k+1 = m+1$. Таким образом, у вектора $A^k t$ отличны от 0 только компоненты с номерами $j = k,\ j = m+k$, которые равны соответственно $\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1$ и $\alpha_{k+m} \alpha_{k+m-1} \dots \alpha_{m+1}$.

В частности, при $k = m$ получаем вектор, у которого отличны от нуля только 1-я и $(m+1)$-я компоненты, равные соответственно

$$\alpha_{2m} \alpha_{2m+1} \dots \alpha_{m+2} \alpha_{m+1} \quad \text{и} \quad \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_2 \alpha_1. \tag{3.8}$$

Эти рассуждения удобно изобразить в виде следующей таблицы.

	0	1	2	$\dots$	$m-1$	m	$m+1$	$\dots$	$2m-2$	$2m-1$
1	1	0	0	$\dots$	0	$\alpha_{2m} \dots \alpha_{m+1}$	0	$\dots$	0	0
2	0	α_1	0	$\dots$	0	0	$\alpha_1 \dots \alpha_{m+1}$	$\dots$	0	0
3	0	0	$\alpha_2\alpha_1$	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$\dots$				$\dots$					$\dots$	
$m-2$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$m-1$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	0	$\alpha_{m-2} \dots \alpha_{m+1}$	0
m	0	0	0	$\dots$	$\alpha_{m-1} \dots \alpha_1$	0	0	$\dots$	0	$\alpha_{m-1} \dots \alpha_{m+1}$
$m+1$	1	0	0	$\dots$	0	$\alpha_m \dots \alpha_1$	0	$\dots$	0	0
$m+2$	0	α_{m+1}	0	$\dots$	0	0	$\alpha_{m+1} \dots \alpha_1$	$\dots$	0	0
$m+3$	0	0	$\alpha_{m+2}\alpha_{m+1}$	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$\dots$		$\dots$					$\dots$			
$2m-2$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$2m-1$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$\alpha_{2m-2} \dots \alpha_1$	0
$2m$	0	0	0	$\dots$	$\alpha_{2m-1} \dots \alpha_{m+1}$	0	0	$\dots$	0	$\alpha_{2m-1} \dots \alpha_1$

(Первый столбец состоит из номеров координат векторов $A^k t$, сами эти векторы записаны в последующих столбцах; в первой строке указаны значения k; для краткости в произведениях прописаны лишь первые и последние множители; всюду индексы убывают (с учетом редукции по модулю $2m$ со сдвигом), например, первая и $(m+1)$-я координаты вектора $A^m t$ равны (3.8) соответственно.)

Далее, эту таблицу будем интерпретировать как определитель $\det Y$. Если из $(m+1)$-й строки вычесть почленно первую, то у полученного определителя можно вычеркнуть 1-й столбец и 1-ю строку. У оставшегося определителя $(2m-1)$-го порядка m-й столбец будет иметь вид $(0,\, 0, \dots, 0,\, \Delta,\, 0,\, \dots,\, 0)^T$, у которого все координаты равны 0 за исключением, возможно, m-й координаты $\Delta = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_{2m} \alpha_{2m-1} \dots \alpha_{m+2} \alpha_{m+1}$. Следовательно, $\det Y$ редуцируется к определителю $\det Y'$, где Y' — квадратная матрица $(2m-2)$-порядка.

После вынесения из первых $m-1$ строк определителя $detY$ общего множителя α_1, из оставшихся строк — общего множителя α_{m+1}, Δ получится определитель вида

1	0	$\dots$	0	0	$\alpha_{2m} \dots \alpha_{m+2}$	$\dots$	0	0
0	α_2	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$\alpha_{m-2} \dots \alpha_{m+2}$	0
0	0	$\dots$	$\alpha_{m-1} \dots \alpha_2$	0	0	$\dots$	0	$\alpha_{m-1} \dots \alpha_{m+2}$
0	0	$\dots$	0	$\alpha_m \dots \alpha_2$	0	$\dots$	0	0
1	0	$\dots$	0	0	$\alpha_{m+1} \dots \alpha_2$	$\dots$	0	0
0	α_{m+2}	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0
0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$\alpha_{2m-2} \dots \alpha_2$	0
0	0	$\dots$	$\alpha_{2m-1} \dots \alpha_{m+2}$	0	0	$\dots$	0	$\alpha_{2m-1} \dots \alpha_2$

Положим $\alpha_1 \alpha_m = \beta_m$, $\alpha_{m+1} \alpha_{2m} = \beta_{2m}$. Если теперь первоначальный определитель $\det Y$ переобозначить как $Y_{2m}(\,\alpha_1,\, \dots,\, \alpha_{2m})$, то приходим к рекуррентной формуле

$$Y_{2m}(\alpha_1,\, \dots,\, \alpha_{2m}) = \alpha_1^{m-1} \alpha_{m+1}^{m-1} \Delta Y_{2m-2}(\alpha_2,\, \dots,\, \alpha_{m-1}, \beta_m, \alpha_{m+1} \dots, \alpha_{2m-1},\, \beta_{2m}).$$

Отметим, что величина Δ совпадает с прежней:

$$\beta_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_2-\beta_{2m}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{m+2}=\alpha_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_2\alpha_1-\alpha_{2m}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{m+2}\alpha_{m+1}.$$

Отсюда следует $\det Y=\alpha_1^{m-1}\alpha_{m+1}^{m-1}\alpha_2^{m-2}\alpha_{m+2}^{m-2}\cdots\alpha_{m-1}\alpha_{2m-1}\Delta^m$. Чтобы t имел нужный вид, т. е. $(1,0,\ldots,0,1,0,\ldots0)$, следует выбрать r и z_0 так, чтобы вектор $r-(E-A)z_0$ совпадал с t, что нетрудно осуществить. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\Delta\neq0$, *то матрица* Y *обратима и* $A=BY^{-1}$.

В заключение отметим, что параметры $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ связаны с теплообменном между насадками и воздухом, в то время как $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{2m}$ — между насадками и газом, и поэтому они заметно отличаются. А именно если считать, что все параметры из первой группы равны α_*, а параметры из второй группы равны α^*, то на практике $\eta=|\alpha^*-\alpha_*|>0$. Тем самым можно считать, что условие $\Delta=\alpha_*^m-{\alpha^*}^m\neq0$ выполняется для реальных ВРВП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кирсанов Ю.А.** Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях. М.: Физматлит, 2007. 240 с.
2. Регенеративные вращающиеся воздухоподогреватели / В. К. Мигай, В. С. Назаренко, И. Ф. Новожилов, Т. С. Добряков. Л.: Энергия, 1971. 168 с.
3. **Kovalevskii V.P.** Simulation of heat and aerodynamic processes in regenerators of continuous and periodic operation. I. Nonlinear mathematical model and numerical algorithm // J. Eng. Phys. Thermophys. 2004. Vol. 77, no. 6. P. 1096–1109. doi: 10.1007/s10891-005-0004-y.
4. **Chi-Liang Lee.** Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system // J. Chinese Inst. Eng. 2009. Vol. 32, no. 5. P. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552.
5. Analysis on thermal stress deformation of rotary air-preheater in a thermal power plant / H. Wang, L. Zhao, Z. Xu et al. // Korean J. Chem. Eng. 2009. Vol. 26. P. 833–839. doi: 10.1007/s11814-009-0139-1.
6. The study on heat transfer model of tri-sectional rotary air preheater based on the semi-analytical method / H. Wang, L. Zhao, Z. Xu et al. // Appl. Therm. Eng. 2008. Vol. 28, no. (14-15). P. 1882–1888. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2007.11.023.
7. **Hazewinkel M.** Monomial representation // Encyclopedia Math. New York: Springer, 2001. ISBN: 978-1-55608-010-4.
8. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 432 с.
9. **Романко В.К.** Курс разностных уравнений. М.: Физматлит, 2012. 200 с.
10. **Azamov A.A., Bekimov M.A.** Simplified model of the heat exchange process in rotary regenerative air pre-heater // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003.
11. **Ван-дер-Варден Б.Л.** Алгебра. М.: Мир, 1976. 648 с.

Поступила 21.11.2016

Азамов Абдулла
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Бекимов Мансур Адамбаевич
старший науч. сотрудник-соискатель
Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека
e-mail: mansu@mail.ru

REFERENCES

1. Kirsanov Yu.A. *Tsiklicheskie teplovye protsessy i teoriya teploprovodnosti v regenerativnykh vozdukhopodogrevatelyakh* [Cyclic thermal processes and the theory of heat conduction in regenerative air heaters]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2007, 240 p.
2. Migai V.K., Nazarenko B.S., Novozhilov I.F., Dobryakov T.S. *Regenerativnye vrashchayushchiesya vozdukhopodogrevateli* [Regenerative rotating air preheaters]. Leningrad: Energiya Publ., 1971. 168 p.

3. Kovalevskii V.P. Simulation of heat and aerodynamic processes in regenerators of continuous and periodic operation. I. Nonlinear mathematical model and numerical algorithm. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2004, vol. 77, no. 6, pp. 1096–1109. doi: 10.1007/s10891-005-0004-y .
4. Chi-Liang Lee. Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system. *J. Chinese Inst. Eng.*, 2009, vol. 32, no. 5, pp. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552 .
5. Wang H., Zhao L., Xu Z. et al. Analysis on thermal stress deformation of rotary air-preheater in a thermal power plant. *Korean J. Chem. Eng.*, 2009, vol. 26, pp. 833–839. doi: 10.1007/s11814-009-0139-1 .
6. Wang H., Zhao L., Xu Z. et al. The study on heat transfer model of tri-sectional rotary air preheater based on the semi-analytical method. *Appl. Therm. Eng.*, 2008, vol. 28, no. (14-15), pp. 1882–1888. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2007.11.023 .
7. Hazewinkel M. Monomial representation. *Encyclopedia Math.*, ed. M. Hazewinkel, New York: Springer, 2001. ISBN: 978-1-55608-010-4.
8. Gelfond A.O. *Calculus of finite differences*. Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1971, 451 p.
9. Romanko V.K. *Kurs raznostnykh uravnenii* [The course of difference equations]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2012, 200 p.
10. Azamov A.A., Bekimov M.A. Simplified model of the heat exchange process in rotary regenerative air pre-heater. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
11. Van der Waerden B.L. *Algebra I und Algebra zweiter Teil*. Algebra I 8. Aufl., zweiter Teil 5 Aufl. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1967.

A. A. Azamov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, 700174 Tashkent, Uzbekistan, e-mail: abdulla.azamov@gmail.com .

M. A. Bekimov, PhD Researcher, National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, 700174 Tashkent, Uzbekistan, e-mail: mansu@mail.ru .