ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ[1]

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального распределенного управления в плоской выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при старших производных эллиптического оператора. На границе области в этой задаче задано нулевое условие Дирихле, а управление аддитивно входит в неоднородность. В качестве множества допустимых управлений используется единичный шар в соответствующем пространстве функций, суммируемых с квадратом. Решение получающихся краевых задач рассматриваются в обобщенном смысле как элементы некоторого гильбертова пространства. В качестве критерия оптимальности выступает сумма квадрата нормы отклонения состояния от заданного и квадрата нормы управления с некоторым коэффициентом. Такая структура критерия оптимальности позволяет, при необходимости, усилить роль либо первого, либо второго слагаемого в этом критерии. В первом случае более важным является достижение заданного состояния, а во втором случае — минимизация ресурсных затрат. Подробно изучена асимптотика задачи, порожденная оператором Лапласа с малым коэффициентом, к которому прибавлен дифференциальный оператор первого порядка. Особенностью задачи является наличие характеристик предельного оператора, которые касаются границы области. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения задачи в случае, когда оптимальное управление есть внутренняя точка множества допустимых управлений.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Asymptotics of the solution to the singular problem of optimal distributed control in a convex domain.

We consider the problem of optimal distributed control in a planar convex domain with smooth boundary and a small parameter at the highest derivatives of an elliptic operator. A zero Dirichlet condition is given at the boundary of the domain, and the control enters the inhomogeneity additively. The set of admissible controls is the unit ball in the corresponding space of square integrable functions. The solutions of the obtained boundary value problems are considered in the generalized sense as elements of some Hilbert space. The optimality index is the sum of the squared norm of the deviation of the state from a given state and the squared norm of the control with some coefficient. This structure of the optimality index makes it possible to strengthen, if necessary, the role of either the first or the second term of the index. In the first case it is more important to attain the desired state, whereas in the second case it is more important to minimize the resource consumption. We present a detailed study of the asymptotics of the problem generated by the sum of the Laplace operator with a small coefficient and a first-order differential operator. A special feature of the problem is the presence of characteristics of the limiting operator that are tangent to the boundary of the domain. We obtain a complete asymptotic expansion of the solution in powers of the small parameter in the case where the optimal control is an interior point of the set of admissible controls.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-128-142

Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального распределенного управления [1] в плоской выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при старших производных эллиптического оператора. Асимптотика решения задачи Дирихле для подобного эллиптического уравнения в подобной области была исследована А. М. Ильиным [2, гл. IV, § 3]. Асимптотика распределенного управления для оператора с малым коэффициентом при старшей производной, но в существенно другой области, рассматривалась в [3; 4]. Другие задачи оптимального управления решениями краевых задач, содержащих малый параметр, с построением асимптотических разложений данных решений рассмотрены в [5–7].

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

1. Общая постановка задачи и условия оптимальности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$ (Ω — многообразие класса C^∞ с краем).

Рассмотрим следующую билинейную форму в соболевском пространстве $H_0^1(\Omega)$ функций, равных нулю на Γ:

$$F(v, w) = (A\nabla v, \nabla w) + (B \cdot \nabla v, w) + (av, w). \tag{1.1}$$

Здесь $A = A(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j \in \overline{1, n}$, $B = B(x) = (b_i(x))$, $i \in \overline{1, n}$, a_{ij}, b_i, a — заданные гладкие в $\overline{\Omega}$ функции, ν — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а $B \cdot C$ — скалярное произведение n-мерных векторов B и C в $\mathbb{R}^n$. Для норм в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ используются обозначения $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ соответственно, а через $\langle\cdot, \cdot\rangle$ будет обозначаться скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$. Нормы в пространствах $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Gamma)$ будут обозначаться $\|\cdot\|_C$ и $|||\cdot|||_C$ соответственно.

Если для всех $x \in \overline{\Omega}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$(A(x)\xi, \xi) \geqslant \gamma\|\xi\|^2, \quad \gamma > 0, \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad a(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div} B(x) \geqslant \alpha_1 > 0, \tag{1.2}$$

то

$$F(v, v) = (A\nabla v, \nabla v) + \Big(\Big(a - \frac{1}{2}\operatorname{div} B\Big)v, v\Big) \geqslant \gamma\|\nabla v\|^2 + \alpha_1\|v\|^2. \tag{1.3}$$

Пусть $L_2(\Omega) \supset \mathcal{U}$ — строго выпуклое и замкнутое в $L_2(\Omega)$ множество.

Рассмотрим управляемое состояние $z = z(u) \in H_0^1(\Omega)$, определяемое соотношением

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega) \quad F(z, w) = (f + u, w), \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.4}$$

где $L_2(\Omega) \ni f$ — заданная функция.

Согласно теореме Лакса — Мильграмма (см., например, [8; 9, п. 5.8]) задача (1.4) имеет единственное решение. В силу формулы Грина

$$\forall\, v, w \in H_0^1(\Omega) \quad (A\nabla v, \nabla w) = -(\nabla \cdot (A\nabla v), w) \tag{1.5}$$

(см. [1, гл. 1, п. 3.4]) на $z(u)$ можно смотреть как на слабое решение краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}z := -\nabla \cdot (A(x)\nabla z) + B(x) \cdot \nabla z + a(x)z = f(x) + u(x), & x \in \Omega, \\ z = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отметим, что для всех v, $w \in H_0^1(\Omega)$

$$F(v, w) = (\nabla v, A^*\nabla w) - (v, B \cdot \nabla w) - (v, w\operatorname{div} B) + (v, aw). \tag{1.7}$$

Здесь * — символ сопряжения линейных операторов.

В качестве критерия управления рассмотрим функционал

$$J(u) = \|z(u) - z_d\|^2 + \beta^{-1}||u||^2 \longrightarrow \min: \ u \in \mathcal{U}, \tag{1.8}$$

где z_d —заданная функция, а β — положительный параметр.

Используя схему Лионса [1, гл. 2, п. 2.1.], найдем условие отпимальности для задачи (1.6), (1.8).

В силу (1.1), (1.2) и (1.4) состояние $z(u)$ дифференцируемо по Гато (как отображение $z : \mathcal{U} \subset L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$) и для любого $\widetilde{v} \in L_2(\Omega)$ величина $Dz(u)\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ — значение дифференциала Гато отображения z в точке $u \in \mathcal{U}$ на элементе $\widetilde{v} \in L_2(\Omega)$ — определяется из соотношения

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega) \quad F(Dz(u)\widetilde{v}, w) = (\widetilde{v}, w). \tag{1.9}$$

В связи с этим дифференцируем по Гато и функционал $J(u)$. Тогда

$$\forall\,\widetilde{v}\in L_2(\Omega)\quad DJ(u)\widetilde{v}=2(Dz(u)\widetilde{v},z(u)-z_d)+2\beta^{-1}(\widetilde{v},u). \tag{1.10}$$

Поскольку множество $\mathcal{U}$ строго выпукло и замкнуто, то единственное оптимальное управление $u_{opt}\in\mathcal{U}$ характеризуется условием (см., например, [1, гл. 1, теорема 1.3])

$$\forall\,\widetilde{v}\in\mathcal{U}\quad DJ(u_{opt})(\widetilde{v}-u_{opt})\geqslant 0. \tag{1.11}$$

Следуя Лионсу, определим сопряженное состояние $p=p(u)\in H_0^1(\Omega)$, соответствующее состоянию $z=z(u)$, соотношением

$$\forall\,v\in H_0^1(\Omega)\quad F(v,p)=(v,z-z_d). \tag{1.12}$$

Исходя из формулы Грина (1.5) и (1.7) на $p(u)$ можно смотреть как на слабое решение краевой задачи

$$\begin{cases}\mathcal{L}^*p:=-\nabla\cdot(A(x)^*\nabla p)-B(x)\cdot\nabla p+\big(a(x)-\operatorname{div}B(x)\big)p=z-z_d, & x\in\Omega,\\ p=0, & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{1.13}$$

Из определения p и формулы (1.10) получим, что для всех $\widetilde{v}\in\mathcal{U}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}DJ(u_{opt})(\widetilde{v}-u_{opt})&=(Dz(u_{opt})(\widetilde{v}-u_{opt}),z(u_{opt})-z_d)+\beta^{-1}\big(u_{opt},(\widetilde{v}-u_{opt})\big)\\ &\overset{(1.12)}{=}F(Dz(u_{opt})(\widetilde{v}-u_{opt}),p)+\beta^{-1}\big(u_{opt},(\widetilde{v}-u_{opt})\big)\\ &\overset{(1.9)}{=}\big((\widetilde{v}-u_{opt}),p\big)+\beta^{-1}\big(u_{opt},(\widetilde{v}-u_{opt})\big)=\big(p+\beta^{-1}u_{opt},(\widetilde{v}-u_{opt})\big)\geqslant 0.\end{aligned}$$

Тем самым условие (1.11) эквивалентно следующему:

$$\forall\,\widetilde{v}\in\mathcal{U}\quad\big(p+\beta^{-1}u_{opt},(\widetilde{v}-u_{opt})\big)\geqslant 0. \tag{1.14}$$

Таким образом, справедливо утверждение

Утверждение 1. *Единственное оптимальное управление в задаче* (1.6), (1.8) *определяется из соотношения* (1.14), *где* p *— решение задачи* (1.13).

2. Рассматриваемая задача и определяющие соотношения

Конкретизируем общую задачу следующим образом: $n=2$ (при этом вернемся к стандартным обозначениям независимых переменных $x:=x_1$, $y:=x_2$), $A(x,y)=\varepsilon^2I$, (здесь I — тождественный оператор), $0<\varepsilon\ll 1$, $B(x,y)=(0,b(x))^*$, а множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U}:=\{u\in L_2(\Omega)\colon\|u\|\leqslant 1\}.$$

Как показано в [10, формула (5)], в этом случае условие (1.14) эквивалентно следующему

$$\exists\,\lambda\in(0;\beta]\colon\big(u_{opt}(\cdot)=-\lambda p(\cdot)\big)\wedge\big(\lambda\|p\|\leqslant 1\big)\wedge\big((\beta-\lambda)\,(1-\lambda\|p\|)=0\big).$$

Обозначив оптимальное управление u_{opt} через u_ε, а соответствующие ему состояния $z(u_{opt})$, $p(u_{opt})$ и параметр λ через z_ε, p_ε и λ_ε соответственно, получим в силу утверждения 1 следующую систему для определения z_ε, p_ε и λ_ε:

$$\begin{cases}\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon:=-\varepsilon^2\Delta z_\varepsilon+b(x)\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}+a(x,y)z_\varepsilon=f(x,y)-\lambda_\varepsilon p_\varepsilon, & (x,y)\in\Omega,\\ \mathcal{L}_\varepsilon^*p_\varepsilon:=-\varepsilon^2\Delta p_\varepsilon-b(x)\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial y}+a(x,y)p_\varepsilon=z_\varepsilon-z_d, & (x,y)\in\Omega,\\ z_\varepsilon=0,\quad p_\varepsilon=0, & (x,y)\in\Gamma,\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\big(u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\big) \wedge \big(\lambda_\varepsilon \in (0;\beta]\big) \wedge \big(\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| \leqslant 1\big) \wedge \big((\beta-\lambda_\varepsilon)\big(1-\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\|\big)=0\big). \tag{2.2}$$

Цель работы — изучить поведение z_ε, p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ и найти асимптотические разложения указанных величин при $\varepsilon \to 0$.

В дальнейшем положительные константы, которые зависят только от области Ω и функций $b(x)$ и $a(x,y)$, часто будем обозначать одной и той же буквой K (возможно, с индексами).

Наряду с (2.1) рассмотрим также систему более общего вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z + \lambda p = f_1(x,y), & \mathcal{L}_\varepsilon^* p - z = f_2(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \\ z = g_1, & p = g_2, \qquad\qquad\quad (x,y)\in\Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Задача* (2.3) *разрешима единственным образом при любых $f_i \in L_2(\Omega)$, $g_i \in H^{3/2}(\Gamma)$ и $\varepsilon > 0$ $(i = 1, 2)$, ее решение z, $p \in H^2(\Omega)$. При этом если $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $g_i \in C^\infty(\Gamma)$, то z, $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [7]. □

Отметим, что если $g_1 = g_2 = 0$ и z и p — решения системы (2.3), то для любых $v, w \in H_0^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2(\nabla z, \nabla v) + \Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}z, v\Big) + (a(x,y)z, v) + \lambda(p,v) = (f_1, v), \\ &\varepsilon^2(\nabla p, \nabla w) - \Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}p, w\Big) + (a(x,y)p, w) - (z,w) = (f_2, w), \\ &\Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}z, z\Big) = \Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}p, p\Big) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Поэтому, взяв $v = p$, а $w = z$ и вычитая из первого равенства из (2.4) второе, получим

$$\|z\|^2 + \lambda\|p\|^2 = (f_1, p) - (f_2, z). \tag{2.5}$$

Утверждение 2. *Пусть z_ε, p_ε и λ_ε — решение системы* (2.1), (2.2). *Тогда $\|z_\varepsilon\| = O(1)$ и $\|p_\varepsilon\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, и существует $\lambda_* > 0$ такое, что $\lambda_\varepsilon \geqslant \lambda_* > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_{\varepsilon,0}$ — состояние управляемой системы (1.6) при $u \equiv 0$. Тогда в силу априорных оценок решений краевых задач для эллиптических уравнений (см., например, [11, гл. 3, формула (1.5)]) и условия (1.2) справедливо неравенство $\|z_{\varepsilon,0}\|_C \leqslant \|f\|_C/\alpha$. Но в силу определения z_ε, p_ε и λ_ε получим $\|z_\varepsilon - z_d\|^2 + \lambda_\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2 \leqslant \|z_{\varepsilon,0} - z_d\|^2$. Отсюда следует, что $\|z_\varepsilon\| = O(1)$. Из второго уравнения системы (2.1) в силу (1.3) и с учетом уже доказанного соотношения получим, что $\varepsilon^2\|\nabla p_\varepsilon\|^2 + \alpha\|p_\varepsilon\|^2 \leqslant K\|p_\varepsilon\|$, т.е. $\|p_\varepsilon\| = O(1)$. Наконец, если $\lambda_{\varepsilon_n} \to 0$ для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$, то и $\lambda_{\varepsilon_n}\|p_{\varepsilon_n}\| \to 0$, что противоречит соотношению 2.2). □

Теорема 2. *Пусть $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_i \in C^\infty(\Gamma)$, $i = 1, 2$, а $\lambda \in [\lambda_*; \lambda^*]$, $\lambda_* > 0$. Тогда для z, p — решений задачи* (2.3) *— справедливы оценки*

$$\max\{\varepsilon^3\|z\|_C, \varepsilon^3\|p\|_C\} \leqslant K(\|f_1\|_C + \|f_2\|_C + \|g_1\|_C + \|g_2\|_C).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $F := \|f_1\|_C + \|f_2\|_C + \|g_1\|_C + \|g_2\|_C$. Пусть z_1 и p_1 — решения системы $\mathcal{L}_\varepsilon z_1 = f_1$, $\mathcal{L}_\varepsilon^* p_1 = f_2$, $z_1\Big|_\Gamma = g_1$ и $p_1\Big|_\Gamma = g_2$. Эта система состоит из двух эллиптических задач, для которых справедливы априорные оценки (см., например, [11, гл. 3, формула (1.5)]). Поэтому (как и при доказательстве утверждения 2)

$$\|z_1\|_C \leqslant \|g_1\|_C + \|f_1\|_C/\alpha \leqslant KF, \quad \|p_1\|_C \leqslant \|g_2\|_C + \|f_2\|_C/\alpha \leqslant KF. \tag{2.6}$$

Положим $z_2 := z - z_1$ и $p_2 := p - p_1$. Тогда $\mathcal{L}_\varepsilon z_2 + \lambda p_2 = -\lambda p_2$, $\mathcal{L}^*_\varepsilon p_2 - z_2 = z_1$ и $z_2\big|_\Gamma = 0$, $p_2\big|_\Gamma = 0$. Поэтому в силу (2.5) $\|z_2\|^2+\lambda\|p_2\|^2 \leqslant \lambda\|p_1\|\cdot\|p_2\|+\|z_1\|\cdot\|z_2\|$. Решая это квадратичное неравенство и учитывая (2.6), получим

$$\|z_2\| \leqslant \|z_1\| + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\|p_1\| \leqslant K_1F, \quad \|p_2\| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\|z_1\| + \|p_1\| \leqslant K_1F. \tag{2.7}$$

Подставляя в (2.4) $z = v = z_2$, $p = w = p_2$, $f_1 = -\lambda p_1$, $f_2 = z_1$ и учитывая (1.2) и (1.3), получим

$$\varepsilon^2\|\nabla z_2\|^2 + \alpha\|z_2\|^2 \leqslant \lambda\|z_2\|\big(\|p_1\| + \|p_2\|\big), \quad \varepsilon^2\|\nabla p_2\|^2 + \alpha\|p_2\|^2 \leqslant \|p_2\|\big(\|z_1\| + \|z_2\|\big).$$

Тем самым с учетом (2.7)

$$\|\nabla z_2\| \leqslant \varepsilon^{-1}K_2F, \quad \|\nabla p_2\| \leqslant \varepsilon^{-1}K_2F. \tag{2.8}$$

Но $-\varepsilon^2\Delta z_2 = -b(x)\dfrac{\partial}{\partial y}z_2 - a(x,y)z_2 - \lambda(p_1+p_2)$ и $z_2\big|_\Gamma = 0$, поэтому в силу формулы (8.25) из [9] получим $\|z_2\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-2}R_4\big(\|\nabla z_2\| + \|z_2\| + \lambda\|p_1\| + \lambda\|p_2\|\big) \overset{(2.7),(2.8)}{\leqslant} \varepsilon^{-3}K_3F$.

Аналогично $\|p_2\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-3}K_4F$.

Теперь осталось применить теоремы вложения (см. [12, п. 8, теорема 1]) и неравенство треугольника для норм. □

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (2.1), (2.2) нужны теоремы об оценке уклонения точного решения z_ε, p_ε и λ_ε этой задачи от решений z_m, p_m и λ_m аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_m + \lambda_m p_m = f(x) + f_{1,m}(x), & x \in \Omega, \\ \mathcal{L}^*_\varepsilon p_m - z_m = -z_d + f_{2,m}(x), & x \in \Omega, \\ z_m = g_{1,m}(x), \quad p_m = g_{2,m}(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.9}$$

в случае, когда при $\varepsilon \to 0$

$$f_{i,m} \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ g_{i,m} \in C^\infty(\Gamma), \quad \|f_{i,m}\|_C = O\big(\varepsilon^m\big), \quad \|g_{i,m}\|_C = O\big(\varepsilon^m\big),\ i = 1,2, \tag{2.10}$$

и задана аппроксимация условия (2.2).

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| < 1, \tag{2.11}$$

то в этом случае (2.2) переходит в равенство $\lambda_\varepsilon = \beta$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. При этом $\lambda_m = \beta$ при всех m.

Достаточным условием выполнения (2.11) является неравенство $\|z_{\varepsilon,0} - z_d\| < 1$ — см. доказательство утверждения 2.

В дальнейшем будем считать, что условие (2.11) выполнено и тем самым

$$\lambda_\varepsilon = \beta. \tag{2.12}$$

В этом случае теорема 2 дает необходимые оценки погрешности аппроксимаций.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.2), (2.10) *и* (2.11). *Если z_ε, p_ε, и λ_ε — решение задачи* (2.1), (2.12), *а $z_{m,\beta}$ и $p_{m,\beta}$ — решение задачи* (2.9) *с $\lambda_m = \beta$, то*

$$\max\big\{\|z_\varepsilon - z_{m,\beta}\|_C, \|z_\varepsilon - z_{m,\beta}\|_C\big\} = O\big(\varepsilon^{m-3}\big)$$

при $\varepsilon \to 0$. □

В дальнейшем считаем, что область Ω *строго выпукла.*

Тогда существуют точки $M_i = (x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2$, в которых уравнение касательной к Γ имеет вид $x = x_i$ соответственно. Точки M_i разбивают границу Γ на две части Γ_j — нижнюю ($j = 1$) и верхнюю ($j = 2$). Обе эти части являются графиками функций $\varphi_j(x)$, $x \in [x_1; x_2]$. При этом

$$\varphi_j(x) \in C([x_1; x_2]) \cap C^\infty(x_1; x_2), \quad \varphi_j(x_i) = y_i, \quad \varphi_j'(x_i - (-1)^i 0) = \infty. \tag{2.13}$$

В окрестностях точек M_i существует еще одна параметризация границы Γ: $x = \psi_i(y)$ соответственно. Отметим, что ψ_1 — выпуклая ($\psi_1'' \geqslant 0$), а ψ_2 — вогнутая ($\psi_1'' \leqslant 0$) функции и $\psi_i(x_i) = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\begin{aligned} &f(x,y), a(x,y), z_d(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta}), \quad b(x) \in C^\infty([x_1; x_2]), \quad g \in C^\infty(\Gamma), \\ &\forall\, (x,y) \in \overline{\Omega_\delta}\ \ a(x,y) \geqslant \alpha > 0, \quad \forall\, x \in [x_1; x_2]\ \ b(x) \geqslant \alpha > 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где Ω_δ — некоторая δ-окрестность области Ω, а также (для технической простоты) что

$$x_1 = y_1 = 0, \quad \psi_1''(y_1) > 0, \quad \psi_2''(y_2) < 0. \tag{2.15}$$

Отметим, что вертикальные прямые $x = \mathrm{const}$ являются характеристиками операторов $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^*$, получающихся из $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}_\varepsilon^*$, если в определении последних положить $\varepsilon = 0$.

3. Внешнее асимптотическое разложение

Как и в [4], внешнее асимптотическое разложение для z_ε и p_ε имеет экспоненциально убывающие пограничные слои для обеих функций в окрестностях Γ_1 и Γ_2.

Внешнее разложение для z_ε и p_ε ищем в виде

$$\begin{aligned} \overset{out}{z} &:= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \big(z_{2k}(x,y) + \overset{1}{z}_{2k}(x, \eta_1) + \overset{2}{z}_{2k}(x, \eta_2) \big), \\ \overset{out}{p} &:= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \big(p_{2k}(x,y) + \overset{1}{p}_{2k}(x, \eta_1) + \overset{2}{p}_{2k}(x, \eta_2) \big), \\ \eta_j &= (-1)^j \big(\varphi_j(x) - y \big) / \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставим ряды (3.1) в систему (2.1) и приравняем слагаемые одинакового вида и одинакового порядка малости. При этом для нахождения коэффициентов функций $\overset{j}{z}_k$ и $\overset{j}{p}_k$ из пограничных слоев надо разложить функцию $a(x,y)$ в ряды Тейлора по второй переменной в окрестности точек $\varphi_j(x)$ и заменить $(y - \varphi_j(x))$ на $(-1)^{j+1} \varepsilon^2 \eta_j$. В результате для определения функций z_{2k}, p_{2k}, $\overset{j}{z}_{2k}$, $\overset{j}{p}_{2k}$ и λ_{2k} получим уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z_0 + \beta p_0 = f(x,y), & \mathcal{L}_0^* p_0 - z_0 = -z_d(x,y), \\ \mathcal{L}_0 z_{2k} + \beta p_{2k} = \Delta z_{2k-2}, & \mathcal{L}_0^* p_{2k} - z_{2k} = \Delta p_{2k-2}, \quad k \geqslant 2, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \overset{j}{\mathcal{M}}_1 \overset{j}{z}_0 = 0, & \overset{j}{\mathcal{M}}_2 \overset{j}{p}_0 = 0, & j = 1, 2, \\ \overset{j}{\mathcal{M}}_1 \overset{j}{z}_{2k} = \overset{j,1}{\mathcal{F}}_{2k}(x, \eta_j; \overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2}, \overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}), & \overset{j}{\mathcal{M}}_2 \overset{j}{p}_{2k} = \overset{j,2}{\mathcal{F}}_{2k}(x, \eta_j; \overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2}, \overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}), & k \geqslant 2, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\overset{j}{\mathcal{M}}_m := -\gamma_j(x) \frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2} + (-1)^{j+m} b(x) \frac{\partial}{\partial \eta_j}, \quad \gamma_j(x) := \varphi_j'(x)^2 + 1, \quad j, m = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$\overset{j}{\mathbf{z}}_s := (\overset{j}{z}_0, \overset{j}{z}_1, \ldots, \overset{j}{z}_s), \quad \overset{j}{\mathbf{p}}_s := (\overset{j}{p}_0, \overset{j}{p}_1, \ldots, \overset{j}{p}_s),$$

$$\begin{cases} \overset{j,1}{\mathcal{F}}_{2k}(x,\eta_j;\overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2},\overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}) := (-1)^j\Big(2\varphi_j'(x)\dfrac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial x}\overset{j}{z}_{2k-2} + \varphi_j''(x)\dfrac{\partial}{\partial\eta_j}\overset{j}{z}_{2k-2}\Big) \\ \qquad + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\overset{j}{z}_{2k-4} - \beta\overset{j}{p}_{2k-2} - \displaystyle\sum_{s=0}\overset{j}{a}_s(x)\eta_j^s\overset{j}{z}_{2k-2-2s}, \\ \overset{j,2}{\mathcal{F}}_{2k}(x,\eta_j;\overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2},\overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}) := (-1)^j\Big(2\varphi_j'(x)\dfrac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial x}\overset{j}{p}_{2k-2} + \varphi_j''(x)\dfrac{\partial}{\partial\eta_j}\overset{j}{p}_{2k-2}\Big) \\ \qquad + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\overset{j}{p}_{2k-4} + \overset{j}{z}_{2k-2} - \displaystyle\sum_{s=0}\overset{j}{a}_s(x)\eta_j^s\overset{j}{p}_{2k-2-2s}, \end{cases} \tag{3.5}$$

а $\overset{j}{a}_s(x)$ — известные гладкие функции — коэффициенты разложения функции $a(x,y)$ в окрестности границ Γ_j: $a\big(x,\varphi_j(x)-(-1)^j\varepsilon^2\eta_j\big)=\sum_{s=0}^{\infty}\overset{j}{a}_s(x)\varepsilon^{2s}\eta_j^s$.

При этом считается, что если у функции один из индексов отрицателен, то она тождественно равна нулю.

Проделав аналогичную процедуру с граничными условиями из (2.1), получим соотношения

$$z_{2k}(x,\varphi_j(x)) + \overset{j}{z}_{2k}(x,0) = 0, \quad p_{2k}(x,\varphi_j(x)) + \overset{j}{p}_{2k}(x,0) = 0, \quad j=1,2. \tag{3.6}$$

В силу того что оба характеристических числа оператора $\overset{1}{\mathcal{M}}_1$ неотрицательны (см. (3.4)), уравнение $\overset{1}{\mathcal{M}}_1\overset{1}{z} = e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_1(x)}R_s(\eta_1;x)$, где $R_s(\eta_1;x)$ — многочлен по η_1 степени s с коэффициентами, гладко зависящими от x, имеет единственное решение аналогичного вида $\overset{1}{z} = e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_1(x)}\widetilde{R}_s(\eta_1;x)$ с многочленом $\widetilde{R}_s(\eta_1;x)$ по η_1 той же степени s. Уравнение же $\overset{2}{\mathcal{M}}_1\overset{1}{p} = e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)}R_s(\eta_1;x)$ имеет общее решения вида $\overset{1}{p} = e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)}\big(C(x)+\eta_1\widetilde{R}_s(\eta_1;x)\big)$, где $\widetilde{R}_s(\eta_1;x)$ — известный аналогичный многочлен по η_1 степени s, а функция $C(x)$ (многочлен нулевой степени) подлежит определению. Аналогичная ситуация и на Γ_2 (с заменой $\overset{2}{z}$ на $\overset{2}{p}$, и наоборот). С учетом вида функций $\overset{j,m}{\mathcal{F}}_{2k}$ $(j,m=1,2)$ получим следующую структуру функций $\overset{j}{z}_{2k}$ и $\overset{j}{p}_{2k}$:

$$\begin{aligned} &\overset{1}{z}_{2k} = e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_2(x)}\overset{1}{P}_{2k-2}(\eta_1;x), \quad \overset{1}{p}_{2k} = e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)}\overset{1}{Q}_{2k}(\eta_1;x), \\ &\overset{2}{z}_{2k} = e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)}\overset{2}{P}_{2k}(\eta_2;x), \qquad \overset{2}{p}_{2k} = e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)}\overset{2}{Q}_{2k-2}(\eta_2;x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь, как и выше, $\overset{1}{Q}_{2k}(\eta_1;x)$, $\overset{2}{P}_{2k}(\eta_2;x)$, $(\overset{1}{P}_{2k-2}(\eta_1;x)$, $\overset{2}{Q}_{2k-2}(\eta_2;x))$ — многочлены по η_j степени $2k$ (степени $2k-2$) с коэффицинтами, гладко зависящими от x.

Отметим, что $\overset{1}{z}_{2k}$ и $\overset{2}{p}_{2k}$ определяются однозначно предыдущими членами рядов (3.1), а $\overset{2}{z}_{2k}$ и $\overset{1}{p}_{2k}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \overset{2}{z}_{2k} &= e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)}D_{2k}(x) + e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)}\eta_2\widetilde{P}_{2k-1}(\eta_2;x), \\ \overset{1}{p}_{2k} &= e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)}C_{2k}(x) + e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)}\eta_1\widetilde{Q}_{2k-1}(\eta_1;x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\widetilde{P}_{2k-1}(\eta_2;x)$ и $\widetilde{Q}_{2k-1}(\eta_1;x)$ определяются однозначно предыдущими членами рядов (3.1).

Таким образом, алгоритм определения z_{2k}, $\overset{j}{z}_{2k}$, p_{2k} и $\overset{j}{p}_{2k}$ имеют следующий вид:

1) найти $\overset{1}{z}_{2k}$ и $\overset{2}{p}_{2k}$;
2) положить $z_{2k}(x,\varphi_1(x)) = -\overset{1}{z}_{2k}(x,0)$, $p_{2k}(x,\varphi_2(x)) = -\overset{2}{p}_{2k}(x,0)$; (3.9)
3) решить задачу (3.2) с условиями из 2);
4) найти $\overset{2}{z}_{2k}$ и $\overset{1}{p}_{2k}$ из условий $\overset{2}{z}_{2k}(x,0) = -z_{2k}(x,\varphi_2(x))$, $\overset{1}{p}_{2k}(x,0) = -p_{2k}(x,\varphi_1(x))$

(т. е. определить $D_{2k}(x)$ и $C_{2k}(x)$).

Лемма 1. *Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра* $x \in (x_1 - \delta; x_2 + \delta)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} v = A(x, y)v, \tag{3.10}$$

где $A(x, y) = \big(a_{ij}(x, y)\big)$ *— матрица с непрерывными в области* Ω_δ *коэффициентами, причем для всех* $(x, y) \in \Omega_\delta$

$$a_{22}(x, y) = -a_{11}(x, y), \quad \max\{a_{12}(x, y)a_{21}(x, y)\} \leqslant -\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Пусть $\Phi(x, y) = \big(\Phi_{ij}(x, y)\big)$ *— фундаментальная матрица системы* (3.10) *с начальным условием* $\Phi(x, \varphi_1(x)) \equiv I$ *— единичная матрица. Тогда*

$$\exists\, \gamma_1 > 0 \;\forall\, (x, y) \in \Omega,\; \forall\, i = 1, 2 \quad \Phi_{ii}(x, y) \geqslant \gamma_1. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем о зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра функции $\Phi_{ij}(x, y)$ непрерывны в Ω_δ. Докажем справедливость (3.11) для Φ_{22} (для Φ_{11} доказательство аналогично).

Рассмотрим функцию $F(x, y) := \Phi_{12}(x, y)\Phi_{22}(x, y)$. Поскольку $\big(\Phi_{12}(x, y), \Phi_{22}(x, y)\big)^*$ есть решение системы (3.10), то

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = a_{21}(x, y)\Phi_{12}^2(x, y) + a_{12}(x, y)\Phi_{22}^2(x, y) \leqslant -\gamma_1\big(\Phi_{12}^2(x, y) + \Phi_{22}^2(x, y)\big) \leqslant 0,$$

т. е. $F(x, y)$ убывает по y. Но $\Phi_{12}(x, \varphi_1(x)) = 0$, поэтому $F(x, y) \leqslant 0$. Предположим, что заключение леммы для Φ_{22} неверно. Тогда найдется $\{(x_k, y_k)\} \in \Omega$ такая, что $x_k \to \overline{x} \geqslant x_0$, $y_k \to \overline{y} \in \big[\varphi_1(\overline{x}); \varphi_2(\overline{x})\big]$ и $\Phi_{22}(x_k, y_k) \to 0$. Но $\Phi_{22}(x_k, \varphi_1(x_k)) \equiv 1$, поэтому $\varphi_1(\overline{x}) < \overline{y}$. Тем самым $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, что в силу монотонности $F(x, y)$ по y и равенства $F(\overline{x}, \varphi_1(\overline{x})) = 0$ дает $F(\overline{x}, y) \equiv 0$ при $y \in \big[\varphi_1(\overline{x}); \overline{y}\big]$. Так как $\Phi_{22}(\overline{x}, \varphi_1(\overline{x})) = 1$, то в некоторой малой окрестности (по y) точки $\varphi_1(\overline{x})$ справедливо неравенство $\Phi_{22}(\varphi_1(\overline{x}), y) \neq 0$. Поэтому в этой окрестности $\Phi_{12}(\varphi_1(\overline{x}), y) \equiv 0$, что в силу системы (3.10) дает $\Phi_{22}(\varphi_1(\overline{x}), y) \equiv 0$ — противоречие, доказывающее лемму. □

Лемма 2. *Пусть* $f_i(x, y) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{M_1, M_2\})$, $g_i(x) \in C(x_1; x_2)$. *Тогда задача*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z + \beta p = f_1(x, y), \quad \mathcal{L}_0^* p - z = f_1(x, y), \\ z(x, \varphi_1(x)) = g_1(x), \quad p(x, \varphi_2(x)) = g_2(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

разрешима единственным образом. При этом если $f_i(x, y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{M_1, M_2\})$, $g_i(x) \in C^\infty(x_1; x_2)$, *то и* $z(x, y)$, $p(x, y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{M_1, M_2\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(x, y) = \big(\Phi_{ij}(x, y)\big)$ — фундаментальная матрица системы (3.12), приведенной к виду (3.10) (путем деления на $b(x) \geqslant \alpha > 0$). Тогда в силу формулы Коши

$$\begin{pmatrix} z(x, y) \\ p(x, y) \end{pmatrix} = \Phi(x, y) \begin{pmatrix} g_1(x) \\ P(x) \end{pmatrix} + \frac{\Phi(x, y)}{b(x)} \int\limits_{\varphi_1(x)}^{y} \Phi^{-1}(x, \eta) \begin{pmatrix} f_1(x, \eta) \\ f_2(x, \eta) \end{pmatrix} d\eta, \tag{3.13}$$

где $P(x) := p\big(x, \varphi_1(x)\big)$.

Покажем, что существует единственное $P(x)$ такое, что $p\big(x, \varphi_2(x)\big) = g_2(x)$. В силу (3.13)

$$g_2(x) = \Phi_{22}(x, \varphi_2(x)\big)P(x) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\Phi(x, y)}{b(x)} \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Phi^{-1}(x, \eta) \begin{pmatrix} f_1(x, \eta) \\ f_2(x, \eta) \end{pmatrix} d\eta. \tag{3.14}$$

Но $\Phi_{22}(x,\varphi_2(x)\big) \geqslant \gamma_1 > 0$ в силу (3.11), поэтому уравнение (3.14) разрешимо единственным образом. □

Из доказанной леммы 2 с использованием (3.9) получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (2.13) *и* (2.14). *Тогда задача* (3.2), (3.3), (3.6) *разрешима единственным образом и все ее решения бесконечно дифференцируемы в* $\overline{\Omega}\backslash\{M_1,M_2\}$. □

Итак, внешнее разложение построено. Оно по построению является формальным асимптотическим решением (ФАР) задачи (2.1) с $\lambda_\varepsilon=\beta$ в тех подобластях области Ω, где ряды (3.1) не теряют своей асимптотичности.

Покажем, что эти ряды теряют асимптотический характер в некоторых малых окрестносях точек M_1, M_2. В силу одинаковости рассмотрения окрестностей этих точек мы подробно рассмотрим лишь окрестность точки $M_1=(0,0)$.

Обозначим $c:=\sqrt{2\psi_1''(0)}$, тогда функции φ_j, определяющие Γ_j, имеют при $x\to+0$ асимптотические разложения

$$\varphi_j(x)=(-1)^j cx^{1/2}+\sum_{s=2}^{\infty}c_s x^{s/2},\quad x\to+0. \tag{3.15}$$

Через $\sigma(x)$ (возможно, с индексами) мы будем обозначать гладкие в окрестности точки $x=+0$ функции, имеющие асимтотическое разложение при $x\to+0$ вида $\sum_{s=0}^{\infty}q_s x^{s/2}$, которое можно дифференцировать сколько угодно раз.

Через $\sigma(x,y)$ (возможно, с индексами) мы будем обозначать гладкие в окрестности точки $(+0,0)$ функции, имеющие равномерное по y асимтотическое разложение при $x\to+0$ вида $\sum_{s=0}^{\infty}x^{s/2}q_s\big(y/\sqrt{x}\big)$, где $q_s(\theta)\in C^\infty(-1-\gamma_2;1+\gamma_2)$, а $0<\gamma_2$ — достаточно малая константа, которое можно дифференцировать сколько угодно раз.

Согласно (3.4) и (3.15)

$$\begin{gathered}\varphi_j(x)=(-1)^j cx^{1/2}+x\sigma(x),\quad \gamma_j(x)=\frac{c^2}{4x}+x^{-1/2}\sigma(x)=x^{-1}\sigma(x),\\ \frac{b(x)}{\gamma_j(x)}=\frac{4b(0)x}{c^2}+x^{3/2}\sigma(x)=x\sigma(x).\end{gathered} \tag{3.16}$$

В силу возможности почленного дифференцирования и интегрирования рядов из определения $\sigma(x,y)$ и с учетом равенства $x^{-3/2}y=x^{-1}(y/\sqrt{x})$ и соотношений (3.16) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,y)=x^{-1}\sigma(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\sigma(x,y)=x^{-1/2}\sigma(x,y),\\ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{y}\sigma(x,\eta)\,d\eta=x^{1/2}\sigma(x,y)+x^{1/2}\sigma(x).\end{gathered} \tag{3.17}$$

Утверждение 3. *Коэффициенты внешнего разложения* (3.1) *имеют следующие асимптотические разложениия при* $x\to x_i-(-1)^i0:$

$$\begin{aligned}
&z_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}\sigma(|x-x_i|,y),\quad p_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}\sigma(|x-x_i|,y),\\
&\overset{1}{z}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(2-3k)/2}e^{-\eta_1|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k-2}(|x-x_i|\eta_1)^s\sigma_s(|x-x_i|),\ k\geqslant1,\\
&\overset{2}{z}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}e^{-\eta_2|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k}(|x-x_i|\eta_2)^s\sigma_s(|x-x_i|),\\
&\overset{1}{p}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}e^{-\eta_1|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k}(|x-x_i|\eta_1)^s\sigma_s(|x-x_i|),\\
&\overset{2}{p}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(2-3k)/2}e^{-\eta_2|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k-2}(|x-x_i|\eta_2)^s\sigma_s(|x-x_i|),\ k\geqslant1.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что $\Phi(x,y) = \big(\sigma_{ij}(x,y)\big)$ и $\Phi^{-1}(x,y) = \big(\sigma_{ij}(x,y)\big)$. При определении вида решений используются (3.7), (3.8), алгоритм (3.9) и обозначения из (3.12).

Пусть $k = 0$. В этом случае $\overset{1}{z}_0 = 0$, $\overset{2}{p}_0 = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $f_1(x,y) = f(x,y) = \sigma(x,y)$ и $f_2(x,y) = -z_d(x,y) = \sigma(x,y)$. В силу (3.14) и (3.17) $P(x) = 0{\cdot}\sigma(x) + x^{1/2}\sigma(x) = x^{1/2}\sigma(x)$, поэтому из (3.13) получим $z_0(x,y) = \sigma(x,y)x^{1/2}\sigma(x) + \sigma(x,y)\big(x^{1/2}\sigma(x,y) + x^{1/2}\sigma(x)\big) = x^{1/2}\sigma(x,y)$ и $p_0(x,y) = x^{1/2}\sigma(x,y)$. Тем самым (с учетом (3.16)) $\overset{2}{z}_0(x,\eta_2) = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$ и $\overset{1}{p}_0(x,\eta_1) = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$.

Для $k = 1$ в силу (3.2) и (3.17) имеем $f_i = x^{-3/2}\sigma(x,y)$, $i = 1,2$. По формулам (3.5) с учетом соотношений для $k = 0$ получим $\overset{1,1}{\mathcal{F}}_0 = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$, $\overset{1,2}{\mathcal{F}}_0 = \big(\sigma(x) + \eta_1 x\sigma(x)\big)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$, $\overset{2,1}{\mathcal{F}}_0 = \big(\sigma(x) + \eta_2 x\sigma(x)\big)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$, $\overset{2,2}{\mathcal{F}}_0 = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$. Поэтому $\overset{1}{z}_2 = x^{-1/2}\sigma(x)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$, а $\overset{2}{p}_2 = x^{-1/2}\sigma(x)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$, значит, $g_i = x^{-1/2}\sigma(x)$, $i = 1,2$. Аналогично случаю $k = 0$ из (3.14) и (3.17) получим, что $P(x) = x^{-1}\sigma(x)$, $z_2(x,y) = x^{-1}\sigma(x,y)$, а $p_2(x,y) = x^{-1}\sigma(x,y)$. После чего находятся $\overset{2}{z}_2(x,0) = x^{-1}\sigma(x)$, $\overset{1}{p}_2(x,0) = x^{-1}\sigma(x)$, а по ним определяется вид $\overset{2}{z}_2(x,\eta_2)$ и $\overset{1}{p}_2(x,\eta_1)$: $\overset{2}{z}_2 = x^{-1}\big(\sigma(x) + x\sigma(x)\eta_2 + x^2\sigma(x)\eta_2^2\big)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$, $\overset{1}{p}_2 = x^{-1}\big(\sigma(x) + x\sigma(x)\eta_1 + x^2\sigma(x)\eta_1^2\big)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$.

Далее доказательство проводится методом математической индукции по k с использованием формул (3.2), (3.5), (3.17), (3.13) и (3.14). $\square$

Прямо по построению и в силу (3.18) ряды (3.1) ФАР задачи (2.1) с $\lambda_\varepsilon = \beta$ при $|x - x_i| > \varepsilon^{\overline{\alpha}}$, $\overline{\alpha} \in (0;4/3)$, и теряют асимптотический характер при $|x - x_i| < \varepsilon^{\overline{\alpha}}$, $\overline{\alpha} > 4/3$. Кроме этого, при $k \geqslant 1$ коэффициенты внешнего разложения не принадлежат $L_2(\Omega)$.

Получившийся характер особенностей коэффициентов внешнего разложения в окрестности точек M_i аналогичен характеру особенностей внешнего разложения решения краевой задачи, рассмотренной в [2, гл. IV, § 3, лемма 3.1].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2.13) *и* (2.14), z_ε, p_ε *— решение системы* (2.1) *с* $\lambda = \beta$, *а* z_0, p_0 *— решение первой системы из* (3.2) *с условиеми из* (3.6). *Тогда*

$$\|z_\varepsilon - z_0\| \to 0, \quad \|p_\varepsilon - p_0\| \to 0 \quad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что в силу (3.18) при $\varepsilon \to 0$

$$\|\overset{2}{z}_0\| = O(\varepsilon), \quad \|\overset{1}{p}_0\| = O(\varepsilon). \tag{3.19}$$

Рассмотрим функции $\overset{0}{z}_r := \chi_r(x)\big(z_0 + \overset{2}{z}_0\big)$ и $\overset{0}{p}_r := \chi_r(x)\big(p_0 + \overset{1}{p}_0\big)$, где r — вспомогательный малый положительный параметр, а $\chi_r(x)$ — срезающая функция, т. е.

$$\chi_r(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ \ |\chi_r(x)| \leqslant 1, \quad \chi_r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; r/2) \cup (x_2 - r/2; +\infty), \\ 1, & x \in [\delta; x_2 - r]. \end{cases}$$

Через $O_r(\varepsilon^m)$ будем обозначать величину, зависящую от ε и r, которая при каждом фиксированном r имеет по ε порядок $O(\varepsilon^m)$.

В силу определения функций z_0, p_0, $\overset{2}{z}_0$, $\overset{1}{p}_0$, формулы Грина (1.5) и (3.19) для любых $v, w \in H_0^1(\Omega)$ получим

$$\varepsilon^2\langle\nabla\overset{0}{z}_r, \nabla v\rangle = -\varepsilon^2(\Delta\overset{0}{z}_r, v) = O(\varepsilon^2\|v\|) - \varepsilon^2(\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0), v).$$

Вычисляя $\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0)$, имеем

$$-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0, v\big) = -\big(\chi_r''(x)\overset{2}{z}_0), v\big) - \Big(\chi_r'(x)(\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\overset{2}{z}_0 + \frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\varphi_2'(x)), v\Big)$$

$$-\Big(\chi_r(x)\Big(\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overset{2}{z}_0+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\varphi_2'(x)+\frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\varphi_2''(x)\Big),v\Big)-\Big(\chi_r(x)\Big((1+{\varphi_2'}^2(x))\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big)$$

$$\overset{(3.3)}{=}O\big(\varepsilon^3\|v\|\big)+O_r\big(\varepsilon\|v\|\big)+\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big).$$

Аналогично находится $-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{1}{p}_0,w\big)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}&-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0,v\big)=O_r\big(\varepsilon\|v\|\big)+\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)Ds\frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big),\\&-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{1}{p}_0,w\big)=O_r\big(\varepsilon\|w\|\big)-\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\partial\eta_1}\overset{1}{p}_0\Big),v\Big).\end{aligned}\qquad(3.20)$$

Имея ввиду, что

$$\Big(\Big(b(x)\frac{\partial}{\eta_2}\overset{0}{z}_r\Big),v\Big)=-\varepsilon^{-2}\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big)+\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{y}z_0\Big),v\Big)$$

$$\overset{(3.2)}{=}-\varepsilon^{-2}\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big)+\big(\chi_r(x)(-a(x,y)z_0+f(x,y)),v\big),$$

с учетом (3.20) получим

$$\varepsilon^2\langle\nabla\overset{0}{z}_r,\nabla v\rangle+\Big(\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\overset{0}{z}_r\Big),v\Big)+(a(x,y)\overset{0}{z}_r,v)=\big(\chi_r(x)f(x,y),v\big)+O_r(\varepsilon\|v\|).\qquad(3.21)$$

Аналогично

$$\varepsilon^2\langle\nabla\overset{0}{p}_r,\nabla w\rangle-\Big(\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\overset{0}{p}_r\Big),w\Big)+(a(x,y)\overset{0}{p}_r,w)=\big(\chi_r(x)-z_d(x,y),w\big)+O_r(\varepsilon\|w\|).\qquad(3.22)$$

Обозначим $\widetilde z:=z_\varepsilon-\overset{0}{z}_r$, $\widetilde p:=p_\varepsilon-\overset{0}{p}_r$. Вычтем из соответствующих равенств в (2.4) (где $z=z_\varepsilon$, $p=p_\varepsilon$, $f_1=f$, $f_2=-z_d$, $\lambda=\beta$, $g_1=g$, $g_2=0$) равенства (3.21) и (3.22) и учтем, что $\|(1-\chi_r(x))f(x,y)\|=O(r^{1/2})$, $\|(1-\chi_r(x))z_d(x,y)\|=O(r^{1/2})$ при $r\to0$, имеем

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\langle\nabla\widetilde z,\nabla v\rangle+\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\widetilde z,v\Big)+(a(x,y)\widetilde z,v)=O_r(\varepsilon\|v\|)+O(r^{1/2}\|v\|),\\&\varepsilon^2\langle\nabla\widetilde p,\nabla w\rangle-\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\widetilde p,w\Big)+(a(x,y)\widetilde p,w)=O_r(\varepsilon\|w\|)+O(r^{1/2}\|w\|).\end{aligned}\qquad(3.23)$$

В получившихся равенствах (3.23) возьмем $v=\widetilde p$, $w=\widetilde z$, вычтем из первого равенства второе и учтем, что силу утверждения 2 и (3.19) $\|\widetilde z\|=O(1)$, $\|\widetilde p\|=O(1)$): $\|\widetilde z\|^2+\beta\|\widetilde p\|^2=O_r(\varepsilon)+O(r^{1/2})$, т. е.

$$\|\widetilde z\|=O_r(\varepsilon^{1/2})+O(r^{1/4}),\quad\|\widetilde p\|=O_r(\varepsilon^{1/2})+O(r^{1/4}).\qquad(3.24)$$

Но $\|\widetilde z\|=\|z_\varepsilon-z_0-\chi_r(x)(z_0+\overset{2}{z}_0)+z_0)\|\leqslant\|z_\varepsilon-z_0\|+O(\varepsilon)+O(r^{1/2})$, что с учетом (3.24) дает $\|z_\varepsilon-z_0\|=O_r\varepsilon^{1/2})+O(r^{1/4})$. Тем самым $\varlimsup\limits_{\varepsilon\to0}\|z_\varepsilon-z_0\|=O(r^{1/4})\to0$ при $r\to0$, т. е. $\|z_\varepsilon-z_0\|\to0$ при $\varepsilon\to0$. Аналогично получается и соотношение $\|p_\varepsilon-p_0\|\to0$ при $\varepsilon\to0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (2.13) *и* (2.14), *а* z_0, p_0 *— решение первой системы из* (3.2) *с условиеми из* (3.6). *Если* $\beta\|p_0\|<1$, *то при всех малых* $\varepsilon>0$ *условие* (2.11) *выполнено и решение задачи* (2.1), (2.2) *совпадает с решением задачи* (2.1), $\lambda_\varepsilon=\beta$.

4. Внутреннее асимптотическое разложение и полная асимптотика решения

В связи с тем что внешнее разложение непригодно в малой окрестности точек M_i, необходимо в окрестностях этих точек рассмотреть новое — “внутреннее” — разложение в растянутых переменных.

Чтобы не писать дробных степеней ε, введем в этой части статьи новый малый параметр $\mu := \varepsilon^{1/3}$. При этом подробно рассмотрим лишь окрестность точки $M_1 = (0,0)$, поскольку внутреннее разложение решения рассматриваемой задачи в окрестности точки M_2 аналогично.

В окрестности точки M_1 введем новые растянутые переменные подобно тому, как это было сделано в [2, гл. IV, § 3, (3.13)]:

$$x = \mu^4\xi, \quad y = \mu^2\tau. \tag{4.1}$$

В этих переменных функции $V_\varepsilon(\xi,\tau) := z_\varepsilon\big(\mu^4\xi, \mu^2\tau\big)$, $W_\varepsilon(\xi,\tau) := p_\varepsilon\big(\mu^4\xi, \mu^2\tau\big)$ будут удовлетворять системе

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}V_\varepsilon + b\big(\mu^4\xi\big)\dfrac{\partial}{\partial\tau}V_\varepsilon + \mu^2 a\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)V_\varepsilon + \mu^2\beta W_\varepsilon + \mu^4\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}V_\varepsilon = \mu^2 f\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big), \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}W_\varepsilon - b\big(\mu^4\xi\big)\dfrac{\partial}{\partial\tau}W_\varepsilon + \mu^2 a\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)W_\varepsilon - \mu^2 V_\varepsilon + \mu^4\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}W_\varepsilon = -\mu^2 z_d\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big) \end{cases} \tag{4.2}$$

в области

$$\mu^4\xi \geqslant \psi\big(\mu^2\tau\big), \quad \xi < \mu^{\widetilde{\alpha}},$$

для некоторого $\widetilde{\alpha} > 0$ и граничным условиям

$$V_\varepsilon\big(\psi(\mu^2\tau), \mu^2\tau\big) = 0 = W_\varepsilon\big(\psi(\mu^2\tau), \mu^2\tau\big). \tag{4.3}$$

.

Внутреннее разложение для z_ε и p_ε ищем в виде

$$\overset{in}{z} := \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}v_{2l}(\xi,\tau), \quad \overset{in}{p} := \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}w_{2l}(\xi,\tau). \tag{4.4}$$

Подставим ряды (4.4) в систему (4.2) и приравняем слагаемые одинакового порядка малости. При этом для нахождения коэффициентов надо разложить функции $b\big(\mu^4\xi\big)$, $a\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)$, $f\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)$ и $z_d\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $M_1 = (0,0)$. В результате для определения функций v_{2l} и w_{2l} получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}v_{2l} - b(0)\dfrac{\partial}{\partial\tau}v_{2l} = \overset{1}{\mathcal{G}}_{2k}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2k-2},\mathbf{w}_{2l-2}), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}w_{2l} + b(0)\dfrac{\partial}{\partial\tau}w_{2l} = \overset{2}{\mathcal{G}}_{2l}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2k-2},\mathbf{w}_{2k-2}), \end{cases} \tag{4.5}$$

где

$$\mathbf{v}_s := (v_2, v_4, \dots, v_s), \quad \mathbf{w}_s := (w_2, w_4, \dots, w_s),$$

$$\begin{cases} \overset{1}{\mathcal{G}}_2(\xi,\tau) = -f(0,0), \quad \overset{2}{\mathcal{G}}_2(\xi,\tau) = z_d(0,0), \\ \overset{1}{\mathcal{G}}_4(\xi,\tau) = -f_2(\xi,\tau) + a(0,0)v_2 + \beta w_2, \\ \overset{2}{\mathcal{G}}_4(\xi,\tau) = z_{d,2}(\xi,\tau) + a(0,0)w_2 - v_2, \\ \overset{1}{\mathcal{G}}_{2k}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2l-2},\mathbf{w}_{2k-2}) = -f_{2l-2}(\xi,\tau) + \beta w_{2l-2} - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_{2l-4} + \displaystyle\sum_{s=0}^{l-1} d_{2l,2s}(\xi,\tau)v_{2k-2-2s}, \\ \overset{2}{\mathcal{G}}_{2k}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2l-2},\mathbf{w}_{2k-2}) = z_{d,2l-2}(\xi,\tau) - \beta v_{2l-2} - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}w_{2l-4} + \displaystyle\sum_{s=0}^{l-1} \widetilde{d}_{2l,2s}(\xi,\tau)w_{2k-2-2s}, \end{cases} \tag{4.6}$$

а $f_{2s}(\xi,\tau)$, $z_{d,2s}(\xi,\tau)$, $d_{2l,2s}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{d}_{2l,2s}(\xi,\tau)$ — известные полиномы (однородные $2s$-*параболической степени*, т. е. когда степень монома $\xi^n\tau^m$ считается равной $2n+m$), полученные из разложений функций f, z_d, a и b в окрестности точки $M_1=(0,0)$.

При этом каждая из систем в (4.5) рассматривается в неограниченной области D: $\xi \geqslant \tau^2$, $\tau\in\mathbb{R}$, с граничными условиями

$$v_2(\tau^2,\tau)=0=w_2(\tau^2,\tau), \quad v_{2l}(\tau^2,\tau)=g_{v,2l}(\tau), \quad w_{2l}(\tau^2,\tau)=g_{w,2l}(\tau), \tag{4.7}$$

определяемыми предыдущими v_{2s} и w_{2s} согласно (4.3).

Решения систем из (4.5), (4.6) неограниченны в рассматриваемой области и в силу этого не единственны. Однако нас интересуют такие решения, которые согласуются с внешним разложением.

Подставим во внешнее разложение вместо x, y и η_j их выражение через ξ и τ из (4.1). С учетом (3.1) получим, что

$$-\eta_1\frac{b(x)}{\varphi_1(x)} = -\frac{\big(\mu^2\tau-\varphi_1(\mu^4\xi)\big)b(\mu^4\xi)}{\mu^6\gamma_1(\mu^4\xi)} \overset{(3.16)}{=} -\frac{4b(0)(\tau+c\sqrt{\xi})\xi}{c^2}+O\big(\mu^2\xi^2\big).$$

Аналогично $-\eta_2 b(x)/\varphi_2(x) = -4b(0)(c\sqrt{\xi}-\tau)\xi/c^2+O\big(\mu^2\xi^2\big)$.

Тем самым $\mu^4\xi^2$ мало при $\xi = x\mu^{-4} \ll \mu^{-1}$, т. е. при $x\ll\mu^3=\varepsilon$. Таким образом, при $\xi\in\big(\varepsilon^{\overline{\alpha}};\varepsilon^{\widetilde{\alpha}}\big)$, $4/3>\overline{\alpha}>\widetilde{\alpha}>1$ ряды (3.1) можно переразложить по ξ и τ. Проделав такую процедуру, получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\big(z_{2k}(x,y)+\overset{1}{z}_{2k}(x,\eta_1)+\overset{2}{z}_{2k}(x,\eta_2)\big) = \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}\big(\overset{z}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\big(p_{2k}(x,y)+\overset{1}{p}_{2k}(x,\eta_1)+\overset{2}{p}_{2k}(x,\eta_2)\big) = \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}\big(\overset{p}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big),$$

где

$$\overset{z}{H}_{0,2l}=\xi^{l/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\widetilde{q}_{l,s}(\tau/\sqrt{\xi}),$$
$$\overset{z}{H}_{1,2}=0,\ \overset{z}{H}_{1,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}+\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-9/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s-2}F_1(\xi,\tau)^{s_1}\widetilde{\sigma}_{l,1,s_1}(\xi),$$
$$\overset{z}{H}_{2,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}-\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-3/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s}F_2(\xi,\tau)\widetilde{\sigma}_{l,2,s_1}(\xi),$$

$$\overset{p}{H}_{0,2l}=\xi^{l/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\widetilde{q}_{l,s}(\tau/\sqrt{\xi}),$$
$$\overset{p}{H}_{1,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}+\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-3/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s}F_1(\xi,\tau)\widetilde{\sigma}_{l,1,s_1}(\xi),$$
$$\overset{p}{H}_{2,2}=0,\ \overset{p}{H}_{2,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}-\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-9/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s-2}F_2(\xi,\tau)^{s_1}\widetilde{\sigma}_{l,1,s_1}(\xi).$$

Здесь $F_j(\xi,\tau)=\xi\big(c\sqrt{\xi}-(-1)^j\tau\big)$, а $\widetilde{\sigma}(\xi)$ — линейные комбинации степеней $\xi^{-\widetilde{s}/2}$, $\widetilde{s}=0,1,\ldots$. При этом получившиеся ряды являются ФАР системы (4.2) при $\xi\to+\infty$.

Теорема 6. *Существуют функции $v_{2l}(\xi,\tau)$ и $w_{2l}(\xi,\tau)$ такие, что они являются решениями системы* (4.5), (4.7) *и имеют при $\xi\to+\infty$ асимптотические разложения $\overset{z}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big)$ и $\overset{p}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big)$ соответственно.*

Доказательство. Поскольку при каждом l рассматриваемая система распадается на два независимых уравнения, и при этом в силу вида области второе уравнение заменой $\tau_1:=-\tau$ переходит в уравнение первого вида в той же области, то существование нужного решения можно получить, следуя доказательству теоремы 3.1 из [2, гл. IV, § 3]. $\square$

По построению внешнее разложение (3.1) согласовано в окрестности точки $M_1 = (0, 0)$ с внутренним разложением (4.4) (см., [2, (формула (0.9)]), т. е. при $N_1 \geqslant 1$ и $N_2 \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau}\big(\mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z}\big) = \mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2}\big(\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau} \overset{in}{z}\big),\\ &\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau}\big(\mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p}\big) = \mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2}\big(\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau} \overset{in}{p}\big), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\mathcal{A}_{N,(\cdot)}$ — оператор взятия N-й частичной суммы соответствующего ряда (при этом обе части равенств из (4.8) необходимо привести к одинаковым переменным).

В окрестности точки M_2 аналогично строится второе внутреннее разложение,

$$\overset{in,2}{z} := \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{2l} v_{2,2l}(\xi_2, \tau_2), \quad \overset{in,2}{p} := \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{2l} w_{2,2l}(\xi_2, \tau_2), \quad x_2 - x := = \mu^4 \xi_2, \quad y_2 - y := = \mu^2 \tau_2,$$

согласованное с (3.1) в окрестности точки M_2. В силу согласованности рассматриваемых рядов стандартным образом (см., например, доказательство теоремы 1.4 из [2, гл. IV, § 1]) показывается, что в области Ω $|\mathcal{L}_\varepsilon Z_N - \beta P_N - f(x, y)| < K_N \varepsilon^{N_1}$, $|\mathcal{L}^*_\varepsilon P_N - Z_N + z_d| < K_N \varepsilon^{N_1}$, $Z_N| < K\varepsilon^{N_1}$, $|P_N| < K\varepsilon^{N_1}$ на границе Γ и $N_1 \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Здесь

$$Z_N := \mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z} + \mathcal{A}_{N,\xi,\tau} \overset{in}{z} + \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2} \overset{in,2}{z} - \mathcal{A}_{N,\xi,\tau}\big(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z}\big) - \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2}\big(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z}\big),$$

$$P_N := \mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p} + \mathcal{A}_{N,\xi,\tau} \overset{in}{p} + \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2} \overset{in,2}{p} - \mathcal{A}_{N,\xi,\tau}\big(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p}\big) - \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2}\big(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p}\big).$$

Поэтому в силу теоремы 3 получаем, что $\|z_\varepsilon - Z_N\|_C = O(\varepsilon^{N_1-3})$, $\|p_\varepsilon - P_N\|_C = O(\varepsilon^{N_1-3})$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда аналогично доказательству теоремы 1.6 из [2, гл. IV, § 1] получаем справедливость основного результата:

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (2.12)–(2.15).

Тогда ряды $\overset{out}{z}$ *и* $\overset{out}{p}$ *являются равномерным асимптотическим разложением функций* z_ε *и* p_ε *в области* $\varepsilon^{\widetilde{\alpha}} \leqslant x \leqslant x_2 - \varepsilon^{\widetilde{\alpha}}$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $0 < \widetilde{\alpha} < 4/3$, *соответственно, а ряды* $\overset{in}{z}$, $\overset{in}{p}$ ($\overset{in,2}{z}$, $\overset{in,2}{p}$) — *равномерным асимптотическим разложением функций* z_ε *и* p_ε *в области* $0 \leqslant x\varepsilon^{\widetilde{\alpha}}$, $(x_2 - \varepsilon^{\widetilde{\alpha}} \leqslant x \leqslant x_2)$, $\widetilde{\alpha} > 1$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ *соответственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимтотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 р.
3. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
4. **Данилин А.Р.** Асимптотика решений системы сингулярных эллиптических уравнений в прямоугольнике // Мат. сб., 2003. Т. 194, № 1. С. 31–60.
5. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
6. **Капустян В.Е.** Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // Докл. АН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
7. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87-–100.
8. **Lax P. D., Milgram A. N.** Parabolic equations. Contributions to theory of partial differential equations // Ann. Math. Studies. 1954. Vol. 33. P. 167–190.
9. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М: Наука, 1989. 464 с.

10. **Данилин А.Р., Зорин А.Р.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 4. С. 449-452.
11. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука, 1964. 565 с.
12. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. перераб. и доп. М: Наука, 1988. 336 с.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор
Института математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 30.06.2016

REFERENCES

1. Lions J.-L. *Contôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Paris, Dunod et Gauthier-Villars, 1968 (in French).
2. Il'in A.M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems]. Providence: Americ. Math. Soc., 1992, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 102, 281 p.
3. Danilin A.R. Approximation of a singularly perturbed elliptic problem of optimal control. *Sbornik: Mathematics*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1421–1431.doi: 10.1070/SM2000v191n10ABEH000512 .
4. Danilin A.R. Asymptotic behaviour of solutions of a singular elliptic system in a rectangle. *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 1, pp. 31–61. doi: 10.1070/SM2003v194n01ABEH000705 .
5. Kapustyan V.E. Asymptotics of bounded controls in optimal elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukr., Ser. Mat. Estestvoznanie. Tekhnich. Nauki*, 1992, no. 2, pp. 70–74 (in Russian).
6. Kapustyan V.E. Optimal bisingular elliptic problems with bounded control. *Dokl. Akad. Nauk Ukr., Ser. Mat. Estestvoznanie. Tekhnich. Nauki*, 1993, no. 6, pp. 81–85 (in Russian).
7. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimskii Mat. Zhurn*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
8. Lax P.D., Milgram A.N. Parabolic equations. Contributions to theory of partial differential equations. *Ann. Math. Studies*, 1954, vol. 33, pp. 167–190.
9. Gilbarg D., Trudinger N. *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983, 518 p. doi: 10.1007/978-3-642-61798-0 .
10. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotic expansion of solutions to optimal boundary control problems. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 665-668. doi:10.1134/S106456241106024X .
11. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence: Americ. Math. Soc., 1968, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 23, 648 p. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa.* Moscow: Nauka, 1967, 736 p.
12. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics], 3rd ed., Providence: Americ. Math. Soc., Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 10, 1991, 286 p.

A. R. Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: dar@imm.uran.ru .