ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

АППРОКСИМАЦИЯ СЕЧЕНИЙ МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ УПРАВЛЕНИЙ

А. Гусейин, Н. Гусейин, Х. Г. Гусейнов

Изучается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона. Предполагается, что ресурс управлений системой является ограниченным. Замкнутый шар пространства L_p, $p > 1$, с радиусом r и центром в начале координат выбирается в качестве множества допустимых управлений. Шаг за шагом множество допустимых управлений заменяется множеством, которое состоит из конечного числа управляющих функций и порождает конечное число траекторий. Доказывается, что сечения множества траекторий могут быть аппроксимированы с сечениями множества, состоящего из конечного числа траекторий.

Интегральное уравнение Урысона, управляемая система, интегральное ограничение, множество траекторий, аппроксимация.

A. Huseyin, N. Huseyin, Kh. Guseinov. Approximation of sections of the set of trajectories for a control system with bounded control resources.

The approximation of the set of trajectories is studied for a control system described by the Urysohn integral equation. It is assumed that the system has limited control resources. The closed ball of the space L_p, $p > 1$, with radius r centered at the origin is chosen as the set of admissible control functions. The set of admissible control functions is replaced step by step by a set that consists of a finite number of control functions and generates a finite number of trajectories. It is proved that sections of the set of trajectories can be approximated by sections of a set consisting of a finite number of trajectories.

Keywords: Urysohn integral equation, control system, integral constraint, set of trajectories, approximation.

MSC: 93B03, 49M25, 65R20, 45G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-116-127

Введение

Математические модели разных процессов в физике, механике, биологии, экономике описываются интегральными уравнениями. В частности, решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений могут быть выражены как решения подходящих интегральных уравнений. Некоторые процессы, описываемые интегральными уравнениями, имеют внешние воздействия, которые могут быть охарактеризованы как управляющие воздействия. Многие управляющие воздействия, например энергия, топливо, финансы, продукты питания при использовании заканчиваются. Обычно такие управляющие воздействия характеризуются интегральными ограничениями на функции управления (см., например, [1–5]). Например, математическая модель летающего объекта с быстро меняющейся массой описывается в виде управляемой системы с интегральными ограничениями на управление (см., например [2; 6]).

Управляемые системы, описываемые интегральными уравнениями, рассматриваются в исследованиях [7–10]. В работе [9] анализируется аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Вольтерра с интегральным ограничением на функции управления. В [10] изучается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона, где система является афинной относительно вектора управления. Управляемость и существование оптимальных управлений в задачах управления, где система описывается интегральным уравнением Урысона, исследуются в работах [7; 8]. В данной работе рассматривается управляемая система, описываемая интегральным уравнением Урысона с интегральным ограничением на функции управления. Доказывается, что при подходящем выборе параметров дискретизации хаусдорфово расстояние между сечениями множества траекторий и сечением множества, состоящего из конечного числа траекторий, становится достаточно малым. Заметим, что аппроксимация сечений множества траекторий позволяет предсказать разные модели поведения управляемой системы и определить управляющую функцию с требуемыми свойствами (см., например, [11]).

1. Динамика системы

Рассмотрим управляемую систему, описываемую интегральным уравнением Урысона

$$x(\xi) = f(\xi, x(\xi)) + \lambda \int_a^b K(\xi, s, x(s), u(s))ds, \tag{1.1}$$

где $x(s) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(s) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $\xi \in [a,b]$, $\lambda \geq 0$ — действительное число.

Для заданных $p > 1$ и $r > 0$ полагаем

$$U_{p,r} = \left\{ u(\cdot) \in L_p([a,b];\mathbb{R}^m) : \ \|u(\cdot)\|_p \leq r \right\},$$

где $\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_a^b \|u(s)\|^p \, ds \right)^{1/p}$, $L_p([a,b];\mathbb{R}^m)$ является пространством измеримых по Лебегу функций $u(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ таких, что $\|u(\cdot)\|_p < \infty$, $\|\cdot\|$ означает евклидову норму. $U_{p,r} \subset L_p([a,b];\mathbb{R}^m)$ называется *множеством допустимых управлений*, а каждая функция $u(\cdot) \in U_{p,r}$ — *допустимым управлением.*

Предполагается, что функции $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K(\cdot) : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и число $\lambda \in [0,\infty)$, заданные в уравнении (1.1), удовлетворяют следующим условиям.

A. Функции $f(\cdot)\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $K(\cdot)\colon [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывны по совокупности аргументов.

B. Существуют числа $L_0 \in [0,1)$, $L_1 \geq 0$, $H_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$, $H_2 \geq 0$, $L_3 \geq 0$ и $H_3 \geq 0$ такие, что

$$\|f(\xi, x_1) - f(\xi, x_2)\| \leq L_0 \|x_1 - x_2\|$$

при всех $(\xi, x_1) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$, $(\xi, x_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$,

$$\left\|K(\xi_1, s, x_1, u_1) - K(\xi_2, s, x_2, u_2)\right\| \leq [L_1 + H_1(\|u_1\| + \|u_2\|)] \, |\xi_1 - \xi_2|$$
$$+ [L_2 + H_2(\|u_1\| + \|u_2\|)] \, \|x_1 - x_2\| + [L_3 + H_3(\|x_1\| + \|x_2\|)] \, \|u_1 - u_2\|$$

для любых $(\xi_1, s, x_1, u_1) \in [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(\xi_2, s, x_2, u_2) \in [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

C. Выполняется неравенство $0 \leq \lambda \Big(L_2 (b-a) + 2H_*(b-a)^{(p-1)/p} r \Big) < 1 - L_0$, где

$$H_* = \max\{H_1, H_2, H_3\}. \tag{1.2}$$

Пусть $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Непрерывная функция $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению (1.1) для всех $\xi \in [a,b]$, называется траекторией системы (1.1), порожденной допустимым управлением $u(\cdot) \in U_{p,r}$.

Условия *A*–*C* гарантируют, что каждое допустимое управление порождает единственную траекторию (см. [12, теорема 3.1]). Символом $\mathbb{X}_{p,r}$ обозначаем совокупность траекторий системы (1.1), порожденных всеми допустимыми управлениями $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Множество $\mathbb{X}_{p,r}$ называется *множеством траекторий системы* (1.1). Согласно [12, теорема 4.1] $\mathbb{X}_{p,r}$ является ограниченным подмножеством пространства $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, т. е. существует $\gamma_* > 0$ такая, что

$$\|x(\cdot)\|_C \leq \gamma_* \tag{1.3}$$

при всех $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$, где $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x(\cdot)\|_C = \max\big\{\|x(\xi)\| : \xi \in [a,b]\big\}$. Для фиксированной $\xi \in [a,b]$ обозначаем

$$\mathbb{X}_{p,r}(\xi) = \{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}\}. \tag{1.4}$$

$\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$ называется *сечением множества траекторий* в ξ.

Обозначим

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda\big(L_2\,(b-a) + 2H_*(b-a)^{(p-1)/p}r\big),$$

$$g_* = \frac{\lambda\,(L_3 + 2\gamma_* H_3)}{1 - L(\lambda)}, \tag{1.5}$$

где H_* определена соотношением (1.2), γ_* — соотношением (1.3).

Справедливость следующего утверждения вытекает из условий A–C и утверждения 1 из [10], которое заменяет неравенство Гронуола при оценке рассогласования между траекториями через порождающих их управлений.

Утверждение 1. *Пусть $x_1(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ и $x_2(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ — произвольные траектории системы* (1.1)*, порожденные соответственно допустимыми управлениями $u_1(\cdot) \in U_{p,r}$ и $u_2(\cdot) \in U_{p,r}$. Тогда*

$$\|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \le g_* \int\limits_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\,ds \quad \textit{для всех} \quad \xi \in [a,b].$$

Полагаем

$$B_n(\gamma_*) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \le \gamma_*\}, \quad B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \le 1\},$$

$$B_C(1) = \{x(\cdot) \in C([a,b];\mathbb{R}^n) : \|x(\cdot)\|_C \le 1\}, \quad D_1 = [a,b] \times B_n(\gamma_*),$$

$$\omega_0(\Delta) = \max\big\{\|f(\xi_2,x) - f(\xi_1,x)\| : |\xi_2 - \xi_1| \le \Delta,\ (\xi_1,x) \in D_1,\ (\xi_2,x) \in D_1\big\},$$

$$\varphi(\Delta) \;=\; \frac{1}{1-L_0}\Big\{\omega_0(\Delta) + \lambda\big[L_1(b-a) + 2H_1\,(b-a)^{(p-1)/p}\,r\big]\Delta\Big\}. \tag{1.6}$$

Согласно условию A имеем, что $\omega_0(\Delta) \to 0^+$, $\varphi(\Delta) \to 0^+$ при $\Delta \to 0^+$.

Хаусдорфово расстояние между множествами $D \subset \mathbb{R}^n$ и $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначается символом $h_n(D,E)$, а между множествами $G \subset C([a,b];\mathbb{R}^n)$ и $W \subset C([a,b];\mathbb{R}^n)$ — символом $h_C(G,W)$ (см. [13]).

Утверждение 2 [12, утверждение 5.1]. *Для любых $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$, $\xi_1 \in [a,b]$, $\xi_2 \in [a,b]$ выполняется неравенство $\|x(\xi_2) - x(\xi_1)\| \le \varphi(|\xi_2 - \xi_1|)$, и, следовательно,*

$$h_n(\mathbb{X}_{p,r}(\xi_2), \mathbb{X}_{p,r}(\xi_1)) \le \varphi(|\xi_2 - \xi_1|),$$

где $\mathbb{X}_{p,r}(\xi_1)$ и $\mathbb{X}_{p,r}(\xi_2)$ определены соотношением (1.4)*, $\varphi(\cdot)$ — равенством* (1.6)*.*

Из утверждения 2 вытекает, что многозначное отображение $\xi \to \mathbb{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, непрерывно. Более того, поскольку множество траекторий является ограниченным в пространстве $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, то из утверждения 2 имеем, что множество траекторий $\mathbb{X}_{p,r}$ — это предкомпактное подмножество пространства $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ (см. [12, теорема 5.1]).

2. Функции управления со смешанными ограничениями

Для заданной $\alpha > 0$ полагаем

$$U_{p,r}^{\alpha} = \{u(\cdot) \in U_{p,r} \colon \|u(s)\| \leq \alpha \text{ при всех } s \in [a,b]\},$$

и пусть $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}$ является множеством траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$. Пусть

$$\kappa_* = 2r^p g_*, \tag{2.1}$$

где g_* определена равенством (1.5).

Утверждение 3. *Для любой $\alpha \in (0,\infty)$ справедливо неравенство*

$$h_C(\mathbb{X}_{p,r}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}) \leq \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}},$$

где κ_* задана соотношением (2.1).

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ — произвольно выбранная траектория, которая порождена допустимым управлением $u(\cdot) \in U_{p,r}$, и пусть функция управления $u_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ определена соотношением

$$u_*(s) = \begin{cases} u(s), & \text{если} \quad \|u(s)\| \leq \alpha, \\ \alpha \dfrac{u(s)}{\|u(s)\|}, & \text{если} \quad \|u(s)\| > \alpha, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $s \in [a,b]$. Нетрудно проверить, что $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$. Пусть $x_*(\cdot)$ — траектория системы (1.1), порожденной функцией управления $u_*(\cdot)$. Обозначив

$$V = \{s \in [a,b] \colon \|u(s)\| > \alpha\},$$

из (2.2) и утверждения 1 получаем

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \leq g_* \int\limits_V \|u(s) - u_*(s)\| \, ds \tag{2.3}$$

для любых $\xi \in [a,b]$, где $x_*(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}$, g_* определена равенством (1.5).

Так как $V \subset [a,b]$, $u(\cdot) \in U_{p,r}$ и $\|u(s)\| > \alpha$ при всех $s \in V$, то имеем что

$$\alpha^p \mu(V) \leq \int\limits_V \|u(s)\|^p \, ds \leq \int\limits_a^b \|u(s)\|^p \, ds \leq r^p,$$

и, следовательно,

$$\mu(V) \leq \frac{r^p}{\alpha^p}, \tag{2.4}$$

где $\mu(V)$ означает меру Лебега множества V. Из включений $u(\cdot) \in U_{p,r}$, $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$, неравенства Гельдера, соотношений (2.1), (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \leq 2r \left[\mu(V)\right]^{(p-1)/p} g_* \leq \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}}$$

для всех $\xi \in [a,b]$, и, следовательно,

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}}.$$

Учитывая, что $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ произвольно выбрана, заключаем, что

$$\mathbb{X}_{p,r} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha} + \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}} B_C(1). \tag{2.5}$$

Поскольку справедливо включение $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha} \subset \mathbb{X}_{p,r}$, то из (2.5) получаем доказательство утверждения.

3. Функции управления, удовлетворяющие условию Липшица

Определим новое множество управляющих функций, полагая

$$U_{p,r}^{\alpha,lip} = \big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m \text{ удовлетворяет условию Липшица}\big\}.$$

Символом $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}$ обозначим совокупность траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip}$, и пусть

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}\big\}, \quad \xi \in [a,b]. \tag{3.1}$$

Утверждение 4. *Для любой $\alpha > 0$ выполняется равенство*

$$h_C\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}\big) = 0.$$

Доказательство может быть проведено по схеме [14, теорема 2].

Теперь определим множество управляющих функций, которое является компактным множеством.

Для заданной $K > 0$ обозначим

$$U_{p,r}^{\alpha,lip,K} = \big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip} \colon u(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m \text{ удовлетворяет условию Липшица и постоянное Липшица не превышает } K\big\},$$

и пусть $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ является множеством траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}\big\}. \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что для любых фиксированных $\alpha > 0$ и $K > 0$ множество управляющих функций $U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ и множество траекторий $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ являются компактными подмножествами пространств $C\big([a,b];\mathbb{R}^m\big)$ и $C\big([a,b];\mathbb{R}^n\big)$ соответственно. Более того, для каждой $\xi \in [a,b]$ выполняется равенство

$$\lim_{K\to\infty} \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi) = cl\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi)\big). \tag{3.3}$$

Здесь cl означает замыкания, множества $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ определены соответственно соотношениями (3.1) и (3.2), $\lim\limits_{K\to\infty} \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ есть предел Куратовского множественной последовательности $\big\{\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)\big\}_{K=1}^{\infty}$ (см. [13]).

С учетом соотношения (3.3) и утверждения 2, по схеме доказательства теоремы 3 из [14], вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. *Пусть $\alpha > 0$ фиксирован. Тогда для каждой $\varepsilon > 0$ существует $K_1(\varepsilon,\alpha) > 0$ такое, что для всех $K \geq K_1(\varepsilon,\alpha)$ и $\xi \in [a,b]$ выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)\big) < \varepsilon.$$

В следующем утверждении получена оценка для хаусдорфова расстояния между множествами $\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$, где множества $\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ определены соответственно соотношениями (1.4) и (3.2).

Утверждение 6. *Для каждой $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha(\varepsilon) > 0$ и $K_*(\varepsilon) = K_*(\varepsilon,\alpha(\varepsilon)) > 0$ такие, что для всех $K \geq K_*(\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K}(\xi)\big) < \varepsilon$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Доказательство утверждения следует из утверждений 3–5.

4. Кусочно-постоянные функции управления

Пусть $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N = b\}$ является равномерным разбиением замкнутого отрезка $[a,b]$, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i, \quad i = 0, 1, \dots N-1$,

$$U_{p,r}^{\alpha,\Delta} = \left\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\xi) = u_i, \ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \ i = 0, 1, \dots, N-1, \ u(b) = u_{N-1}\right\},$$

$$\begin{aligned} V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K} = \quad & \left\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\xi) = u_i, \ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \ i = 0, 1, \dots, N-1, \right. \\ & \left. \|u_{i+1} - u_i\| \le K\Delta, \ i = 0, 1, \dots, N-2, \ u(b) = u_{N-1}\right\}. \end{aligned}$$

Символами $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ и $\mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$ обозначим совокупности траекторий системы (1.1), порожденных соответственно функциями управлений $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ и $u(\cdot) \in V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}(\xi) &= \left\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}\right\}, \\ \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}(\xi) &= \left\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}\right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Утверждение 7. *Для любых $\alpha > 0$, $K > 0$ и равномерного разбиения $\Gamma = \big\{a = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N = b\big\}$ отрезка $[a,b]$, справедливо включение*

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K} \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K} + g_* K(b-a)\Delta B_C(1),$$

и, следовательно,

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi) \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}(\xi) + g_* K(b-a)\Delta B_n$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где g_* определено соотношением (1.5)*, $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ и $\mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}(\xi)$ — соответственно соотношениями* (3.2) *и* (4.1)*, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$, которая порождена функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$, и определим новую функцию управления $v(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$\begin{aligned} v(\xi) \quad &= \quad \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u(s)ds, \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ v(\xi_N) \quad &= \quad v(\xi_{N-1}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Очевидно, что $\|v(\xi)\| \le \alpha$ для любой $\xi \in [a,b]$. Из (4.2) и неравенства Гельдера следует, что $\displaystyle\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|v(s)\|^p \, ds \le \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u(s)\|^p \, ds$ при всех $i = 0, 1, \dots, N-1$, и, следовательно,

$$\int\limits_a^b \|v(s)\|^p \, ds \le \int\limits_a^b \|u(s)\|^p \, ds \le r^p.$$

Таким образом, получаем, что $v(\cdot) \in U_{p,r}$. Так как $\|v(\xi)\| \le \alpha$ для всех $\xi \in [a,b]$, то имеем $v(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$.

Обозначим $v(\xi_i) = v_i$ при $i = 0, 1, \dots, N$. Тогда $v(\xi) = v_i$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, и $v(\xi_N) = v_N = v_{N-1}$. Так как $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$, то $\|u(\xi_*) - u(\xi^*)\| \le K\,|\xi_* - \xi^*|$ при всех $\xi_* \in [a,b]$ и $\xi^* \in [a,b]$. Из соотношения (4.2) имеем, что неравенство

$$\|v_{i+1} - v_i\| = \|v\left(\xi_{i+1}\right) - v\left(\xi_i\right)\| = \left\| \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_{i+1}}^{\xi_{i+2}} u(s)ds - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u(s)ds \right\|$$

$$\leq \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u(s+\Delta) - u(s)\| \, ds \leq K\Delta \tag{4.3}$$

справедливо для любого $i < N-1$. Так как $v(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$, то из (4.2) и (4.3) заключаем, что $v(\cdot) \in V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$. Символом $z(\cdot)$ обозначим траекторию системы (1.1), порожденной функцией управления $v(\cdot) \in V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$. Тогда $z(\cdot) \in \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$, и из утверждения 1 получаем, что

$$\|x(\xi) - z(\xi)\| \leq g_* \int\limits_a^b \|u(s) - v(s)\| \, ds \tag{4.4}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Возьмем произвольную $s \in [a,b)$. В этом случае существует $i = 0,1,\ldots,N-1$ такое, что $s \in [\xi_i, \xi_{i+1})$. Поскольку функция управления $u(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной K, то из (4.2) вытекает, что

$$\|u\,(s) - v\,(s)\| \leq \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u(s) - u(\tau)\| \, d\tau \leq \frac{1}{\Delta} K \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} |s-\tau| \, d\tau \leq K\Delta. \tag{4.5}$$

Так как $s \in [a,b)$ произвольно выбрана, то из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\|x(\xi) - z(\xi)\| \leq g_* K(b-a)\Delta \tag{4.6}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Итак, из (4.6) имеем, что для произвольно выбранной $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ существует $z(\cdot) \in \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$ такая, что выполняется неравенство $\|x(\cdot) - z(\cdot)\|_C \leq g_* K(b-a)\Delta$.

Итак, утверждение доказано.

Теперь сформулируем утверждение, где оценивается хаусдорфово расстояние между сечениями множеств траекторий $\mathbb{X}_{p,r}$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$.

Утверждение 8. *Для заданной $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha\,(\varepsilon) > 0$ и $\Delta_*\,(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого равномерного разбиения Γ замкнутого отрезка $[a,b]$, где $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где Δ — диаметр разбиения Γ.

Доказательство. Согласно утверждению 6 для заданной $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha\,(\varepsilon) > 0$ и $K_*\,(\varepsilon) = K_*\,(\varepsilon, \alpha(\varepsilon)) > 0$ такие, что при всех $\xi \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K_*(\varepsilon)}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.7}$$

Далее, из утверждения 7 получаем, что для заданых $\alpha(\varepsilon) > 0$, $K_*(\varepsilon) > 0$ и равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ отрезка $[a,b]$ выполняется включение

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K_*(\varepsilon)}(\xi) \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,K_*(\varepsilon)}(\xi) + g_* K_*(\varepsilon)(b-a)\Delta B_n \tag{4.8}$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0,1,\ldots,N-1$.

Обозначим $\Delta_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4 g_* K_*(\varepsilon)(b-a)}$. Из (4.8) следует, что для всех $\Delta > 0$ таких, что $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, справедливо включение

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K_*(\varepsilon)}(\xi) \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,K_*(\varepsilon)}(\xi) + \frac{\varepsilon}{4} B_n \tag{4.9}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Поскольку

$$\mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,K_*(\varepsilon)}(\xi) \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi) \tag{4.10}$$

для любых $\xi \in [a,b]$, то из (4.7), (4.9) и (4.10) имеем, что если $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, то

$$\mathbb{X}_{p,r}(\xi) \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} B_n \tag{4.11}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Так как справедливо включение $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi) \subset \mathbb{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, то (4.11) завершает доказательство.

5. Функции управления с нормами из равномерного разбиения

В этом разделе мы сужаем множество управляемых функций $U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ и вводим новое множество управляемых функций. Пусть $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ есть равномерное разбиение замкнутого отрезка $[a,b]$, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $\alpha > 0$ и $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$ является равномерным разбиением замкнутого отрезка $[0,\alpha]$, $\delta = w_{j+1} - w_j$, $j = 0,1,\ldots,q-1$. Обозначим

$$U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} = \Big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\xi) = u_i,\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ \|u_i\| \in \Lambda,\ i = 0,1,\ldots,N-1,\ u(b) = u(\xi_{N-1})\Big\}.$$

Символом $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$ обозначим множество траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}\big\}. \tag{5.1}$$

Утверждение 9. *Для любых $\alpha > 0$, равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ отрезка $[a,b]$ и равномерного разбиения $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$ отрезка $[0,\alpha]$ выполняется неравенство*

$$h_C\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}\big) \le g_*(b-a)\delta,$$

и, следовательно,

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi)\big) \le g_*(b-a)\delta$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где g_* определена соотношением (1.5)*, $\Delta > 0$ — диаметр разбиения Γ, $\delta > 0$ — диаметр разбиения Λ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ — произвольно выбранная траектория, порожденная функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$. Так как $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$, то имеем, что $u(\xi) = u_i$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $u(b) = u_{N-1}$ и, более того,

$$\Delta \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p \le r^p, \quad \|u_i\| \le \alpha \ \text{ при всех } i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{5.2}$$

Если $\|u_i\| < \alpha$ $(i = 0,1,\ldots,N-1)$, то существует $w_{j_i} \in \Lambda$ такое, что

$$\|u_i\| \in [w_{j_i}, w_{j_i+1})\,. \tag{5.3}$$

Определим функцию $u_0(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$u_0(\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_i}{\|u_i\|} w_{j_i}, & \text{если} \quad 0 < \|u_i\| < \alpha, \\ u_i, & \text{если} \quad \|u_i\| = 0 \text{ или } \|u_i\| = \alpha, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $w_{j_i} \in \Lambda$ определено в (5.3) и $u_0(b) = u_0(\xi_{N-1})$. Учитывая (5.3) и (5.4), получаем, что $\|u_0(\xi)\| \le \|u(\xi)\|$ для всех $\xi \in [a, b]$, и, следовательно, из (5.2) имеем, что $u_0(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$. Далее, из (5.3) и (5.4) вытекает, что

$$\|u(\xi) - u_0(\xi)\| \le \delta \tag{5.5}$$

при всех $\xi \in [a, b]$, где δ является диаметром разбиения Λ.

Теперь траекторию системы (1.1), порожденной функцией управления $u_0(\cdot)$, обозначим символом $x_0(\cdot)$. Тогда $x_0(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$, и из (5.5) и утверждения 1 вытекает, что

$$\|x(\xi) - x_0(\xi)\| \le g_*(b-a)\delta$$

при всех $\xi \in [a, b]$, и, следовательно,

$$\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \le g_*(b-a)\delta. \tag{5.6}$$

Таким образом, из (5.6) имеем, что

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} + g_*(b-a)\delta B_C(1). \tag{5.7}$$

Поскольку $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\Lambda} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$, то из (5.7) получаем доказательство утверждения.

6. Конечное число управляющих функций

Пусть $\sigma > 0$ — заданное число, $S = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| = 1\}$ и $S_\sigma = \{s_1, s_2, \ldots, s_g\}$ является конечной σ-сетью на S. Определим новое множество управляющих функций, состоящее из конечного числа функций управления, полагая

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} \;=\; & \big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} \colon u(\xi) = w_{j_i} s_{l_i},\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \\ & w_{j_i} \in \Lambda,\ s_{l_i} \in S_\sigma,\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ u(b) = u(\xi_{N-1})\big\}. \end{aligned}$$

Отметим, что множество $U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ можно определить и равенством

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} = \; & \Big\{u(\cdot) \in L_p([a,b];\mathbb{R}^m) : u(\xi) = w_{j_i} s_{l_i},\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ w_{j_i} \in \Lambda, \\ & s_{l_i} \in S_\sigma,\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} w_{j_i}^p \le r^p,\ u(b) = u(\xi_{N-1})\Big\}, \end{aligned}$$

где Δ — диаметр равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$, δ — диаметр равномерного разбиения $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$.

Пусть $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ является множеством траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$. Очевидно, что множество $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ состоит из конечного числа траекторий. Для заданной $\xi \in [a, b]$ положим

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}\big\}. \tag{6.1}$$

Утверждение 10. *Для каждых $\alpha > 0$, равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ отрезка $[a, b]$, равномерного разбиения $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$ отрезка $[0, \alpha]$ и σ-сети S_σ, выполняется неравенство*

$$h_C\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}\big) \le g_*\alpha(b-a)\sigma,$$

и, следовательно,

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi)\big) \le g_*\alpha(b-a)\sigma$$

при всех $\xi \in [a, b]$, где g_* определена соотношением (1.5), а $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi)$ — соответственно соотношениями (5.1) и (6.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную траекторию $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$, которая порождена функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$. Из включения $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$ следует, что $\|u(\xi)\| = w_{j_i}$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $u(b) = u(\xi_{N-1})$ и $\Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} w_{j_i}^p \leq r^p$, где $w_{j_i} \in \Lambda$, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, является диаметром разбиения Γ.

Так как $\|u(\xi)\| = w_{j_i}$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ и $u(\cdot)$ постоянная на отрезке $[\xi_i, \xi_{i+1})$, то существует $b_i \in S$ такое, что $u(\xi) = w_{j_i} b_i$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, где $u(b) = u(\xi_{N-1})$. Из включения $b_i \in S$ получаем, что существует $s_{l_i} \in S_\sigma$ такой, что $\|b_i - s_{l_i}\| \leq \sigma$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Определим новую функцию управления $u_0(\cdot)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$u_0(\xi) = w_{j_i} s_{l_i} \text{ при всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ u_0(b) = u_0(\xi_{N-1}).$$

Можно установить, что $u_0(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ и

$$\|u(\xi) - u_0(\xi)\| \leq \alpha\sigma \tag{6.2}$$

при всех $\xi \in [a, b]$.

Пусть $x_0(\cdot)$ является траекторией, порожденной функцией управления $u_0(\cdot)$. Тогда $x_0(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ и согласно утверждению 1 и соотношению (6.2) имеем, что

$$\|x(\xi) - x_0(\xi)\| \leq g_* \alpha (b-a) \sigma$$

при всех $\xi \in [a, b]$, и, следовательно,

$$\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \leq g_* \alpha (b-a) \sigma. \tag{6.3}$$

Из (6.3) выводим, что

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} + g_*(b-a)\alpha\sigma B_C(1). \tag{6.4}$$

Поскольку $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$, то из включения (6.4) получаем доказательство утверждения.

7. Аппроксимация сечений множества траекторий

Итак, здесь докажем, что сечения множества траекторий $\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, могут быть аппроксимированы множествами $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, которые состоят из конечного числа точек.

Теорема. *Для каждой $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\Delta_*(\varepsilon) > 0$, $\delta_*(\varepsilon) > 0$ и $\sigma_*(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого равномерного разбиения Γ замкнутого отрезка $[a, b]$, равномерного разбиения Λ замкнутого отрезка $[0, \alpha(\varepsilon)]$ и σ-сети S_σ, где $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, $\delta < \delta_*(\varepsilon)$, $\sigma < \sigma_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta,\sigma}(\xi)\big) \leq \varepsilon$$

при всех $\xi \in [a, b]$.

Здесь Δ — диаметр разбиения Γ, δ — диаметр разбиения Λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждения 8 имеем, что для заданной $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha(\varepsilon) > 0$ и $\Delta_*(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого равномерного разбиения Γ замкнутого отрезка $[a, b]$, где $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.1}$$

при всех $\xi \in [a, b]$.

Пусть $\delta_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4g_*(b-a)}$, где g_* определена соотношением (1.5). Согласно утверждению 9 для заданной $\alpha(\varepsilon) > 0$, для заданного равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$ такого, что $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, и для заданного равномерного разбиения Λ отрезка $[0,\alpha(\varepsilon)]$ такого, что $\delta < \delta_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.2}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Пусть $\sigma_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4g_*\alpha(\varepsilon)(b-a)}$. Из утверждения 10 получаем, что для заданной $\alpha(\varepsilon) > 0$, для любого равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$ такого, что $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, для любого равномерного разбиения Λ отрезка $[0,\alpha(\varepsilon)]$ такого, что $\delta < \delta_*(\varepsilon)$, и для любой σ-сети S_σ такой, что $\sigma < \sigma_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta,\sigma}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.3}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Из (7.1)–(7.3) следует доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chentsov A.G.** Approximative realization of integral constraints and generalized constructions in the class of vector finitely additive measures // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 2. P. S10–S60.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением: Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н.** Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280.
4. **Subbotina N.N., Subbotin A.I.** Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 3. P. 376–385.
5. **Vdovina O.I., Sesekin A.N.** Numerical construction of attainability domains for systems with impulse control // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 1. P. S246–S255.
6. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2005. 124 с.
7. **Angell T.S., George R.K., J.P. Sharma J.P.** Controllability of Urysohn integral inclusions of Volterra type // Electron. J. Diff. Equat. 2010. Vol. 79. P. 1–12.
8. **Bennati M.L.** An existence theorem for optimal controls of systems defined by Uryson integral equations // Ann. Mat. Pura. Appl. 1979. Vol. 121, no. 4. P. 187–197.
9. **Huseyin A., Huseyin N., Guseinov Kh.G.** Approximation of the sections of the set of trajectories of the control system described by a nonlinear Volterra integral equation // Math. Model. Anal. 2015. Vol. 20, no. 4. P. 502–515.
10. **Гусейин Н., Гусейин А., Гусейнов Х.Г.** Аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 59–72.
11. **Matviichuk A.R., Ushakov V.N.** On the construction of resolving controls in control problems with phase constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2006. Vol. 45, no. 1. P. 1–16. doi: 10.1134/S1064230706010011 .
12. **Huseyin A.** On the existence of ε-optimal trajectories of the control systems with constrained control resources // Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 2017. Vol. 66, no. 1. P. 75–84. doi: 10.1501/Commua1_0000000776 .
13. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
14. **Huseyin A.** On the approximation of the set of trajectories of control system described by a Volterra integral equation // Nonlin. Anal. Model. Contr. 2014. Vol. 19, no. 2. P. 199-208.

Поступила 10.08.2016

Гусейин Анар
д-р философии, старший преподаватель
исследователь
Университет Джумхурийет, Турция
e-mail: ahuseyin@cumhuriyet.edu.tr

Гусейин Несир
д-р философии, старший преподаватель
исследователь
Университет Джумхурийет, Турция
e-mail: nhuseyin@cumhuriyet.edu.tr

Гусейнов Халик Гаракиши оглы
д-р физ.-мат. наук, профессор
исследователь
Университет Анадолу, Турция
e-mail: kguseynov@anadolu.edu.tr

REFERENCES

1. Chentsov A.G. Approximative realization of integral constraints and generalized constructions in the class of vector finitely additive measures. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, Suppl. 2, pp. S10–S60.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I., Ushakov V.N. A minimax differential game. *Dokl. AN SSSR*, 1972, vol. 206, no. 2, pp. 277–280 (in Russian).
4. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 376–385.
5. Vdovina O.I., Sesekin A.N. Numerical construction of attainability domains for systems with impulse control. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, Suppl. 1, pp. S246–S255.
6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* [Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide]. Chelyabinsk: Chelyabinskiy Gos. Univer. Publ., 2005, 124 p.
7. Angell T.S., George R.K., J.P. Sharma J.P. Controllability of Urysohn integral inclusions of Volterra type. *Electron. J. Diff. Equat.*, 2010, vol. 79, 1–12 pp.
8. Bennati M.L. An existence theorem for optimal controls of systems defined by Uryson integral equations. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 1979, vol. 121, no. 4, pp. 187–197.
9. Huseyin A., Huseyin N., Guseinov Kh.G. Approximation of the sections of the set of trajectories of the control system described by a nonlinear Volterra integral equation. *Math. Model. Anal.*, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 502–515.
10. N. Huseyin, A. Huseyin, Kh. G. Guseinov. Approximation of the set of trajectories of a control system described by the Urysohn integral equation. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 59-72 (in Russian).
11. Matviichuk A.R., Ushakov V.N. On the construction of resolving controls in control problems with phase constraints. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2006, vol. 45, no. 1, pp. 1–16. doi: 10.1134/S1064230706010011 .
12. Huseyin A. On the existence of ε-optimal trajectories of the control systems with constrained control resources. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 2017, vol. 66, no. 1, pp. 75–84. doi: 10.1501/Commua1_0000000776 .
13. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston: Birkhäuser, 1990, 461 p.
14. Huseyin A. On the approximation of the set of trajectories of control system described by a Volterra integral equation. *Nonlin. Anal. Model. Contr.*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 199–208.

A. Huseyin, Ph. D., Assistant Professor, Faculty of Science, Cumhuriyet University, Sivas, Turkey, e-mail: ahuseyin@cumhuriyet.edu.tr

N. Huseyin, Ph. D., Assistant Professor, Faculty of Education, Cumhuriyet University, Sivas, Turkey, e-mail: nhuseyin@cumhuriyet.edu.tr

Kh. Guseinov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Anadolu University, Mathematics Department, Eskisehir 26470, Turkey, e-mail: kguseynov@anadolu.edu.tr