ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977.1

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

М. И. Гусев , И. В. Зыков

Известно, что управление, переводящее траекторию управляемой системы на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Этот факт справедлив для систем с поточечными ограничениями на управление. В данной работе мы рассмативаем систему с интегральными квадратичными ораничениями. Рассматриваемая управляемая система нелинейна по фазовым переменным и линейна по управлению. Показано, что любое допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления с интегральным квадратичным функционалом, если соответствующая линеаризованная система вполне управляема. Доказательство данного факта опирается на теорему Грейвса для накрывающих отображений. Отсюда следует принцип максимума для управлений, ведущих на границу множества достижимости. В работе обсуждается также алгоритм построения множества достижимости, основанный на принципе максимума.

Ключевые слова: Управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, принцип максимума.

M. I. Gusev, I. V. Zykov. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints.

It is well known that any control that steers the trajectory of a control system to the boundary of the reachable set satisfies the Pontryagin maximum principle. This fact is valid for systems with pointwise constraints on the control. We consider a system with quadratic integral constraints on the control. The system is nonlinear in the state variables and linear in the control. It is shown that any admissible control that steers the system to the boundary of its reachable set is a local solution of some optimal control problem with integral quadratic functional if the corresponding linearized system is completely controllable. The proof of this fact is based on the Graves theorem on covering mappings. This implies the maximum principle for the controls that steer the trajectories to the boundary of the reachable set. We also discuss an algorithm for constructing the reachable set based on the maximum principle.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, maximum principle.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115

1. Введение и постановка задачи

Статья посвящена описанию граничных точек множеств достижимости управляемой системы с интегральными ограничениями на управление. Задачи управления в системах с интегральными ограничениями были предметом многих исследований (см., например, [1; 2]). Игровые постановки задач управления с интегральными ограничениями на управления игроков рассматривались в [3–5]. Свойства множеств достижимости в нелинейных системах с интегральными ограничениями исследованы в работах [6; 7]. Алгоритмы построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, изучались в [8; 9]. В [10–12] исследовались свойства и алгоритмы построения информационных множеств в задачах оценивания и идентификации при интегральных ограничениях на возмущения, эти множества являются аналогами множеств достижимости в задачах управления.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №16-11-10146.

Цель данной работы — доказательство того, что управление, удовлетворяющее интегральным ограничениям и переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления. Этот факт позволяет для отыскания точек множеств достижимости применять соотношения принципа максимума Понтрягина и теорию дифференциальных уравнений и неравенств Гамильтона — Якоби [13].

Будем далее использовать следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 — это нулевой вектор подходящей размерности, либо нулевая матрицу, либо число ноль. Под символом I будем понимать единичную матрицу. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма в конечномерном пространстве, $B_r(\bar{x})\colon B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - \bar{x}\| \le r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$, x^i — вектор с индексом i, а x_j — j-я координата вектора x. Для вещественной прямоугольной $k \times m$ матрицы A через $\| A \|_{k\times m}$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначаем границу S, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x)$ — матрица Якоби отображения $g(x)$. Через $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ и C будем обозначать, соответственно, пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_1}$, $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_2}$, $\| \cdot \|_C$.

Известно, что управление $u(t)$, переводящее траекторию $x(t)$ управляемой системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \quad x(t_0) = x^0,$$

($x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ при п.в. $t \in [t_0, t_1]$, Ω — произвольное ограничивающее множество, не обязательно компактное) в точку $x(t_1)$, лежащую на границе множества достижимости $G(t_1)$ в момент t_1, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [14, гл. 4, т. 3].

Для линейных систем принцип максимума вытекает из того факта, что управление, переводящее траекторию системы на границу множества достижимости, максимизирует терминальный функционал $I(u(\cdot)) = (a, x(t_1))$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n, a \ne 0$. При этом $p(t_1) = a$ — вектор нормали опорной гиперплоскости к множеству $G(t_1)$ в точке $x(t_1)$, и принцип максимума дает необходимое и достаточное условие принадлежности $x(t_1)$ границе $G(t_1)$. Для нелинейных систем это условие не является достаточным; кроме того, неясно, является ли в общем случае управление, полученное из условий принципа максимума, решением какой-либо задачи оптимального управления.

Далее мы будем рассматривать управляемые системы с интегральными ограничениями на управление. Начнем со случая линейной управляемой системы:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $A(t), B(t)$ — суммируемые на $[t_0, t_1]$ матричные функции. В качестве управлений рассматриваются функции из пространства $\mathbb{L}_2$. Ограничения на управление заданы интегральным неравенством

$$u(\cdot) \in U = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 \colon J(u(\cdot)) = \| u(\cdot) \|^2_{\mathbb{L}_2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \| u(t) \|^2 \, dt \le \mu^2 \right\}, \tag{1.2}$$

где $\mu > 0$ — заданная константа. Пусть $G(t_1)$ — множество достижимости системы (1.1) в момент t_1 при ограничениях (1.2).

Определим симметричную матрицу $W(t)$ (грамиан управляемости) равенством

$$W(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) X^\top(t, \tau) d\tau,$$

где $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$.

Известно, что система (1.1) вполне управляема на $[t_0, t_1]$ в том и только том случае, когда $W(t_1)$ положительно определена. В этом случае $G(t_1)$ — невырожденный эллипсоид

$$G(t_1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x})^\top W^{-1}(t_1)(x - \hat{x}) \leq \mu^2\right\}.$$

Если система не является вполне управляемой, то множество достижимости представляет из себя вырожденный эллипсоид (эллипсоид, лежащий в подпространстве размерности меньшей, чем n).

Известно (см. [21, Assertion 1]), что для вполне управляемой линейной системы (1.1) управление $u(\cdot) \in U$ переводит траекторию в точку $x^1 \in \partial G$ тогда и только тогда, когда $J(u(\cdot)) \to \min$ с дополнительным условием $x(t_1) = x^1$ (x^1 — заданная точка $\mathbb{R}^n$) и величина минимума функционала J равна μ^2.

В настоящей статье дано доказательство аналога приведенной характеризации граничных точек множеств достижимости (в части необходимых условий) для нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление. Мы будем рассматривать управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \ x(t_0) = x^0, \tag{1.3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n\times r}$ — непрерывные отображения с интегральными ограничениями на управление, заданные неравенством (1.2).

Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы по x, а также удовлетворяют соответственно условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\| f_1(t, x) \| \leq l_1(t)(1+ \| x \|), \tag{1.4}$$

$$\| f_2(t, x) \|_{n\times r} \leq l_2(t), \tag{1.5}$$

где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$.

Решением (*траекторией*) системы (1.3), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1.3) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

О п р е д е л н и е 1. Множеством достижимости $G(t_1)$ системы (1.3) будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управлениям из U.

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы (1.3).

З а д а ч а 1.

$$J(u) \to \min, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1.$$

Управление $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, удовлетворяющее ограничению задачи 1, назовем *допустимым управлением.*

О п р е д е л н и е 2. Допустимое управление $u(\cdot)$ доставляет локальный минимум функционалу $J(u)$ в задаче 1, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого $v(\cdot)$ такого, что $\| u(\cdot) - v(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \varepsilon$ имеет место неравенство $J(u) \leq J(v)$.

О п р е д е л н и е 3. Пусть $u(t)$ — управление из $\mathbb{L}_2$, $x(t)$ — отвечающая этому управлению траектория. Систему

$$\dot{\delta x} = A(t)\delta x + B(t)\delta v,$$

где $A(t) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \dfrac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x(t))u(t)]$, $B(t) = f_2(t, x(t))$ назовем *линеаризацией системы* (1.3) *вдоль пары* $(x(t), u(t))$.

В данной работе показано, что любое управление, переводящее траекторию системы из начального состояния на границу множества достижимости, доставляет локальный минимум в задаче 1, если линеаризованная вдоль пары $(x(t), u(t))$ система вполне управляема.

2. Вспомогательные результаты

Утверждение 1. *Пусть функции* $f_1(t,x), f_2(t,x)$ *непрерывны, непрерывно дифференцируемы по* x *и удовлетворяют условиям* (1.4) *и* (1.5). *Тогда для любого* $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ *система* (1.3) *имеет, и притом единственное, решение* $x = x(t)$, *определенное на всем отрезке* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству [15, гл. 6, § 1, т. 1] при несколько иных предположениях. □

Утверждение 2. *Пусть функции* $f_1(t,x), f_2(t,x)$ *удовлетворяют условиям утверждения* 1. *Тогда множество траекторий системы* (1.3) *компактно в пространстве* $C = C[t_0, t_1]$.

Доказательство. Покажем равномерную ограниченность траекторий системы (1.3). Заменяя уравнение (1.3) интегральным тождеством, получим

$$\|x(t)\| = \left\| x^0 + \int_{t_0}^{t} [f_1(s,x(s)) + f_2(s,x(s))u(s)]ds \right\| \leq \|x^0\| + \int_{t_0}^{t} l_1(s)(1 + \|x(s)\|)ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} l_2(s)\|u(s)\|ds \leq \|x^0\| + \mu\sqrt{\int_{t_0}^{t} l_2^2(s)ds} + \int_{t_0}^{t} l_1(s)ds + \int_{t_0}^{t} l_1(s)\|x(s)\|ds.$$

Из леммы Гронуолла [17, гл. 4, § 4, т. 2] следует, что

$$\|x(t)\| \leq \left(\|x^0\| + \mu\sqrt{\int_{t_0}^{t} l_2^2(s)ds} + \int_{t_0}^{t} l_1(s)ds \right) e^{\int_{t_0}^{t} l_1(s)ds}.$$

Равностепенная непрерывность множества траекторий вытекает из оценки

$$\|x(t'') - x(t')\| = \left\| \int_{t'}^{t''} [f_1(s,x(s)) + f_2(s,x(s))u(s)]ds \right\| \leq \int_{t'}^{t''} l_1(s)(1 + \|x(s)\|)ds$$

$$+ \int_{t'}^{t''} l_2(s)\|u(s)\|ds \leq k_1 \int_{t'}^{t''} l_1(s)ds + \mu\sqrt{\int_{t'}^{t''} l_2^2(s)ds} \ \ \forall\, t', t'' \in [t_0, t_1], \quad t'' > t',$$

и равномерной непрерывности функций $\phi_1(t) = \int_{t_0}^{t} l_1(s)ds$ и $\phi_2(t) = \int_{t_0}^{t} {l_2}^2(s)ds$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Здесь и всюду ниже k_1, k_2, k_3, k_4, M_1, а также c_1, c_2, c_3 означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Из теоремы Арцела следует относительная компактность множества в пространстве непрерывных функций. Зададим пару последовательностей $(u^p(\cdot), x^p(\cdot))$, где $u^p(\cdot) \in U$ отображается в $x^p(\cdot)$ посредством системы (1.3). Учитывая слабую компактность гильбертова шара U и относительную компактность множества траекторий, найдем последовательность $p_k \to \infty$, $k \to \infty$ такую, что $x^{p_k}(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$ в C и $u^{p_k}(\cdot) \to \bar{u}(\cdot) \in U$ слабо в $\mathbb{L}_2$.

Тогда

$$x^{p_k}(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x^{p_k}(s))ds + \int_{t_0}^{t} f_2(s, x^{p_k}(s))u^{p_k}(s)ds = x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x^{p_k}(s))ds$$

$$+\int_{t_0}^{t} f_2(s,\bar{x}(s))u^{p_k}(s)ds+\int_{t_0}^{t}[f_2(s,x^{p_k}(s))-f_2(s,\bar{x}(s)]u^{p_k}(s)ds.$$

В силу равномерной сходимости $x^{p_k}(\cdot)$ к $\bar{x}(\cdot)$ и слабой сходимости $u^{p_k}(\cdot)$ можно перейти к пределу в обеих частях равенства. В итоге получим

$$\bar{x}(t)=x^0+\int_{t_0}^{t} f_1(s,\bar{x}(s))ds+\int_{t_0}^{t} f_2(s,\bar{x}(s))\bar{u}(s)ds, \tag{2.1}$$

т. е. $\bar{x}(\cdot)$ есть решение системы (1.3), отвечающее $\bar{u}(\cdot)\in U$, что и доказывает компактность множества траекторий. □

З а м е ч а н и е 1. Аналогичный результат доказан в [7] при несколько иных предположениях.

Утверждение 3. *Пусть $u^p(\cdot)\in U$ есть последовательность управлений из $\mathbb{L}_2$, а $x^p(\cdot)$ — последовательность траекторий, соответствующая последовательности $u^p(\cdot)$. Если $u^p(\cdot)\to u(\cdot)$, $p\to\infty$ в $\mathbb{L}_2$, то $x^p(\cdot)\to x(\cdot)$ в C, где $x(\cdot)$ — траектория, отвечающая $u(\cdot)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим от противного: $\|x^p(\cdot)-x(\cdot)\|_C\not\to 0,\ p\to\infty$, тогда найдутся $\varepsilon>0$ и подпоследовательность x^{p_k} такие, что $\|x^{p_k}(\cdot)-x(\cdot)\|_C\geq\varepsilon,\ p_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что подпоследовательность $x^{p_k}(\cdot)$ равномерно сходится к траектории $\bar{x}(\cdot)$ в силу компактности траекторий системы (1.3). Из доказательства утверждения 2 следует равенство (2.1), т. е. $\bar{x}(t)$ — решение, соответствующее управлению $u(t)$. В силу единственности решения $\bar{x}(t)=x(t)$. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Зададим последовательность управлений $v^m(\cdot)$, которая отображается в последовательность траекторий $x^m(\cdot)$. Линеаризованная вдоль $(x^m(\cdot),u^m(\cdot))$ система задается парой матриц $(A_m(t),B_m(t))$, где

$$A_m(t)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x^m(t))+\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x^m(t))\,v^m(t)],\quad B_m(t)=f_2(t,x^m(t)).$$

Справедлива

Лемма 1. *Если $u^m(\cdot)\to u(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$ и пара $(A(t),B(t))$, отвечающая управлению $u(\cdot)$, вполне управляема, то, начиная с некоторого m, пара $(A_m(t),B_m(t))$ будет вполне управляемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сходимость последовательностей матричных функций $A_m(\cdot)\to A(\cdot)$ в $\mathbb{L}_1$ и $B_m(\cdot)\to B(\cdot)$ в C. Представим $f_2(t,x)u$ в виде $f_2(t,x)u=\sum_{i=1}^r f_2^i(t,x)u_i$, где $f_2^i(t,x)$ — n-мерные вектор-столбцы матрицы $f_2(t,x)$, $i=1,2,\dots,r$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_2^i(t,x)u]=\sum_{i=1}^r\Big[\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x)\Big]u_i,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x)$ — матрица Якоби отображения $x\to f_2^i(t,x)$.

Справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t_1}\|A(t)-A_m(t)\|_{n\times n}dt\leq\int_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t))-\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x^m(t))\Big\|_{n\times n}dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u(t)]-\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u^m(t)]\Big\|_{n\times n}dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u^m(t)]-\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x^m(t))u^m(t)]\Big\|_{n\times n}dt.$$

Проводя элементарные преобразования, приходим к неравенствам

$$\int_{t_0}^{t_1}\|A(t)-A_m(t)\|_{n\times n}dt\le(t_1-t_0)\max_t\Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t))-\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x^m(t))\Big\|_{n\times n}$$

$$+\max_{i,t}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x(t))\Big\|_{n\times n}r\sqrt{t_1-t_0}\,\|u(\cdot)-u^m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}$$

$$+\max_{i,t}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x(t))-\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x^m(t))\Big\|_{n\times n}r\sqrt{t_1-t_0}\,\left(\|u(\cdot)-u^m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}+\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\right),\qquad(2.2)$$

где максимум берется по $t\in[t_0,t_1],\ i=1,\dots,r$. Для матриц $B(\cdot),B_m(\cdot)$ получаем

$$\|B(\cdot)-B_m(\cdot)\|_C=\max_t\|f_2(t,x(t))-f_2(t,x^m(t))\|_{n\times r}.\qquad(2.3)$$

Из равномерной сходимости $x^m(\cdot)$ к $x(\cdot)$ (см. утверждение 3) и непрерывности $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ следует сходимость правых частей неравенств (2.2) и (2.3) к нулю, что и доказывает сходимость $A_m(\cdot)$ к $A(\cdot)$ и $B_m(\cdot)$ к $B(\cdot)$.

Осталось обосновать предельный переход под знаком интеграла в грамиане управляемости. Положим

$$M(t)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau},\quad M_m(t)=e^{\int_{t_0}^{t}A_m(\tau)d\tau},$$

где e^D — матричная экспонента. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(M(t)-M_m(t)\right)=A(t)M(t)-A_m(t)M_m(t)=A(t)\left(M(t)-M_m(t)\right)+\left(A(t)-A_m(t)\right)M_m(t),$$

$$M(t)-M_m(t)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)(M(\tau)-M_m(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}(A(\tau)-A_m(\tau))M_m(\tau)d\tau,$$

следовательно,

$$\|M(t)-M_m(t)\|_{n\times n}\le\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|_{n\times n}\|M(\tau)-M_m(\tau)\|_{n\times n}d\tau+\int_{t_0}^{t}\|A(\tau)-A_m(\tau)\|_{n\times n}\|M_m(\tau)\|_{n\times n}d\tau.$$

Из леммы Гронуола и неравенства $\|e^D\|\le e^{\|D\|}$ выводим

$$\|M(t)-M_m(t)\|_{n\times n}\le e^{\|A_m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_1}}\|A(\cdot)-A_m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_1}e^{\|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}_1}}.$$

Запишем соответствующие грамианы управляемости:

$$W=\int_{t_0}^{t_1}M(t)^{-1}B(t)B(t)^\top\left(M(t)^\top\right)^{-1}dt,\quad W^m=\int_{t_0}^{t_1}M_m(t)^{-1}B_m(t)B_m(t)^\top\left(M_m(t)^\top\right)^{-1}dt.$$

Из равномерной сходимости $M_m(t)\to M(t)$ следует, что $W^m\to W,\ m\to\infty$. Так как $\det W\ne0$, то для достаточно больших m $\det W^m\ne0$, т. е. пара $(A_m(\cdot),B_m(\cdot))$ вполне управляема. $\square$

3. Экстремальные свойства граничных точек множества достижимости

Определим отображение $F:\mathbb{L}_2\to\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Fu(\cdot)=x(t_1),$$

где $x(t)$ — траектория системы (1.3), отвечающая $u(\cdot)$. Справедлива

Лемма 2. *Пусть функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям* (1.4) *и* (1.5). *Тогда функция F непрерывно дифференцируема по Фреше $\forall\, u(\cdot)\in\mathbb{L}_2[t_0,t_1]$, ее производная Фреше $F'\colon\mathbb{L}_2\to\mathbb{R}^n$ определена равенством*

$$F'(u(\cdot))\delta u(\cdot)=\delta x(t_1). \tag{3.1}$$

Здесь $\delta x(t)$ — решение линеаризованной вдоль $(u(t),x(t))$ системы (1.3), *отвечающее управлению $\delta u(t)$ и нулевому начальному условию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Берем произвольные $u(\cdot),\Delta u(\cdot)$, где $\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\le 1$. Решения, отвечающие $u(\cdot)$ и $u(\cdot)+\Delta u(\cdot)$, обозначим через $x(t)$ и $x(t)+\Delta x(t)$ соответственно. Записывая для них интегральные тождества и вычитая одно из другого, получим

$$\|\Delta x(t)\|=\Bigg\|\int\limits_{t_0}^{t}\big[f_1(s,x(s)+\Delta x(s))-f_1(s,x(s))\big]ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\big[f_2(s,x(s)+\Delta x(s))-f_2(s,x(s))\big]u(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}f_2(s,x(s)+\Delta x(s))\Delta u(s)ds\Bigg\|.$$

Применяя теорему о среднем, имеем

$$f_1(s,x(s)+\Delta x(s))-f_1(s,x(s))=\frac{\partial}{\partial x}f_1[s,x(s)+\theta\Delta x(s)]\Delta x(s),\quad \theta(s,x)=\mathrm{diag}\,\{\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\},$$

где $0\le\theta_i(s,x)\le 1$. В силу непрерывности $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ $\|f_1(s,x(s)+\Delta x(s))-f_1(s,x(s))\|\le c_1\|\Delta x(s)\|$ для достаточно малых $\Delta x(s)$.

Посредством похожих рассуждений приходим к соотношению

$$\big\|[f_2(s,x(s)+\Delta x(s))-f_2(s,x(s))]u(s)\big\|\le c_2\sum_{i=1}^{r}|u_i(s)|\cdot\|\Delta x(s)\|$$

для почти всех s.

Таким образом, $\|\Delta x(t)\|\le\displaystyle\int_{t_0}^{t}\Big(c_1+c_2\sum_{i=1}^{r}|u_i(s)|\Big)\|\Delta x(s)\|ds+c_3\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}$.

Применяя лемму Гроноулла, получим

$$\|\Delta x(t)\|\le c_3\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\exp\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(c_1+c_2\sum_{i=1}^{r}|u_i(s)|\Big)ds$$

$$\le c_3\exp\big[c_1(t_1-t_0)+c_2\,r\sqrt{t_1-t_0}\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\big]\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}, \tag{3.2}$$

следовательно, $\|\Delta x(\cdot)\|_C=O\,(\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2})$.

Для любой функции $\Delta u(\cdot)\in\mathbb{L}_2[t_0,t_1]$ имеем $F(u(\cdot)+\Delta u(\cdot))-F(u(\cdot))=\Delta x(t_1)$. В силу непрерывности производных по x представим их в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}f_1[t,x(t)+\theta\Delta x(t)]=\frac{\partial}{\partial x}f_1[t,x(t)]+\alpha(t,x(t),\theta\Delta x(t)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2^i[t, x(t) + \xi^i \Delta x(t)] = \frac{\partial}{\partial x} f_2^i[t, x(t)] + \beta_i(t, x(t), \xi^i \Delta x(t)),$$

где $\xi^i(s,x) = \mathrm{diag}\ \{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}\}$, $0 \le \xi_{ij}(s,x) \le 1$. Если $\|\Delta x(\cdot)\|_C \to 0$ то равномерно на $[t_0, t_1]$ $\|\alpha(t, x(t), \theta\Delta x(t))\|_{n\times n} \to 0$ и $\|\beta_i(t, x(t), \xi^i \Delta x(t))\|_{n\times n} \to 0$ $\Big($поскольку функции $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой ограниченной области $t_0 \le t \le t_1$, $\|x\| \le M_1\Big)$.

Представим $\Delta x(t)$ в виде

$$\Delta x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\Delta x(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} B(s)\Delta u(s)ds + \omega(t),$$

где

$$\omega(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(s, x(s), \theta\Delta x(s))\Delta x(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{r} \big[\beta_i(s, x(s), \xi^i \Delta x(s))\big]\Delta x(s) u_i(s)ds$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{r} \big[\frac{\partial}{\partial x} f_2^i(s, x(s))\big]\Delta x(s)\Delta u_i(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{r} \big[\beta_i(s, x(s), \xi^i \Delta x(s))\big]\Delta x(s)\Delta u_i(s)ds.$$

Дифференцируя $\Delta x(t)$ по t, для почти всех t получим $\Delta\dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) + \dot{\omega}(t)$. По формуле Коши

$$\Delta x(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)\dot{\omega}(\tau)d\tau,$$

где $X(t,\tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau)$ и $Y(t)$ – решение уравнения $\dfrac{dy}{dt} = A(t)y$, $y(0) = 0$.

Оценим последний член равенства:

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)\dot{\omega}(\tau)d\tau\Big\| \le \|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\cdot\Big[k_1 \max_{\tau} \big\|\alpha(\tau, x(\tau), \theta\Delta x(\tau))\big\|_{n\times n} + k_2 \max_{i,\tau} \big\|\beta_i(\tau, x(\tau), \xi^i \Delta x(\tau))\big\|_{n\times n}$$

$$+\ k_3 \max_{i,\tau} \Big\|\frac{\partial}{\partial x} f_2^i(\tau, x(\tau))\Big\|_{n\times n} \cdot \|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} +\ k_4 \max_{i,\tau} \big\|\beta_i(\tau, x(\tau), \xi^i \Delta x(\tau))\big\|_{n\times n}\Big].$$

Из оценки (3.2) следует

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)\dot{\omega}(\tau)d\tau\Big\| = o(\Delta u(\cdot)), \quad \frac{o(\Delta u(\cdot))}{\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}} \to 0, \quad \Delta u(\cdot) \to 0.$$

Таким образом, $F(u(\cdot) + \Delta u(\cdot)) - F(u(\cdot)) = \delta x(t_1) + o(\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2})$. Согласно определению функция F дифференцируема по Фреше, и ее производная определяется равенством (3.1). Непрерывность производной следует из леммы 1. □

Теорема. *Пусть*:

1) $x^1 \in \partial G(t_1)$, *где* $\partial G(t_1)$ *– граница множества достижимости*;

2) $u(\cdot) \in U$ *– управление, переводящее систему из* $x(t_0) = x^0$ *в* $x(t_1) = x^1$, $x(t)$ *– отвечающая этому управлению траектория*;

3) *линеаризованная вдоль* $(x(t), u(t))$ *система* (1.3) *вполне управляема на* $[t_0, t_1]$.

Тогда управление $u(t)$ *доставляет локальный минимум в задаче* 1 *и величина минимума* $J(u(\cdot)) = \mu^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство от противного. Пусть найдется $u(\cdot)$, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $x(t_1) = x^1 \in \partial G(t_1)$, которое не является локально оптимальным в задаче 1, иначе говоря, для любого p существует допустимое управление $u^p(\cdot)$ такое, что

$$\|u(\cdot) - u^p(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} < 1/p, \quad J(u^p(\cdot)) < J(u(\cdot))$$

либо $J(u(\cdot)) < \mu^2$. Тогда существует последовательность $u^p(\cdot) \to u(\cdot)$, $p \to \infty$ в $\mathbb{L}_2$ такая, что $x^p(t_1, u^p(\cdot)) = x^1$, а $J(u^p(\cdot)) < \mu^2$. Далее, выберем p настолько большим, чтобы пара $(A_p(t), B_p(t))$ была вполне управляемой (см. лемму 1). Обозначим

$$\delta = \mu - \sqrt{J(u^p(\cdot))} > 0.$$

Тогда $\|u^p(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} = \mu - \delta < \mu - \delta/2$. Из леммы 2, учитывая, что линеаризованная вдоль $(u^p(\cdot), x^p(\cdot))$ система вполне управляема, получаем $ImF'(u^p(\cdot)) = \mathbb{R}^n$.

Тогда по теореме Грейвса [16, с. 105] для некоторого $m > 0$ и всех достаточно малых r, удовлетворяющих неравенству $0 < r < \delta/2$, выполняется включение $B(x^1, mr) \subset F(B(u^p(\cdot), r))$.

Таким образом,

$$B(u^p(\cdot), r) \subset U \Rightarrow F(B(u^p(\cdot), r)) \subset F(U) \subset G(t_1),$$

отсюда вытекает $B(x^1, mr) \subset G(t_1)$, что противоречит условию $x^1 \in \partial G(t_1)$. □

Из доказанной теоремы следует, что управление $u(\cdot)$, переводящее траекторию системы на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Форма принципа максимума, в отличие от [14, гл. 4, т. 3], здесь отвечает задаче минимизации интегрального функционала.

Выпишем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи 1. Функция Понтрягина для данной задачи имеет вид

$$H(p, t, x, u) = -p_0 u^\top u + p^\top (f_1(t, x) + f_2(t, x)u), \quad p_0 \geq 0.$$

Локально оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (см., например, [18, § 5, т. 2]): существуют $(p_0, p(\cdot)) \neq 0$ такие, что

$$H(p(t), t, x(t), u(t)) = \max_{v \in \mathbb{R}^r} H(p(t), t, x(t), v),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial f}{\partial x} H(p(t), x(t), u(t)) = -A^\top(t) p(t).$$

Через $(A(t), B(t))$, как и ранее, обозначаем матрицы линеаризованной вдоль $(x(t), u(t))$ системы. Если эта линеаризованная на $(x(t), u(t))$ система вполне управляема, то $p_0 \neq 0$.

Действительно, если $p_0 = 0$, то $p(\cdot) \neq 0$ и из принципа максимума получаем

$$p^\top(t) B(t) u(t) = \max_{v \in \mathbb{R}^2} \; p^\top(t) B(t) v$$

для почти всех t. Это имеет место только при $p^\top(t) B(t) \equiv 0$, что невозможно, так как $p(t) \not\equiv 0$ есть решение системы $\dot{p}(t) = -A^\top(t) p(t)$ и пара $(A(t), B(t))$ вполне управляема. Поэтому можно принять $p_0 = 1/2$. Тогда из принципа максимума выводим $u(t) = f_2^\top(t, x(t)) p(t)$.

Замыкая исходную систему данным управлением, имеем

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)) f_2^\top(t, x(t)) p(t), \; x(t_0) = x^0, \\ &\dot{p}(t) = -\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}^\top (t, x(t)) + D^\top\big(t, x(t), f_2^\top(t, x(t)) p(t)\big)\Big) p(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где обозначено: $D(t, x, v) = \dfrac{\partial}{\partial x}(f_2(t, x) v)$.

Соотношение (3.3) можно положить в основу следующего *алгоритма построения границы множества достижимости.*

Выбирая $p(t_0) \neq 0$ и интегрируя систему (3.3), мы получим управление и траекторию, удовлетворяющие принципу максимума. Перебирая $p(t_0)$ из регулярной сетки, аппроксимирующей область $\{p \in \mathbb{R}^n \colon |p_i| \leq a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, интегрируя систему (3.3) и отбирая те траектории, для которых $|J(u(\cdot)) - \mu^2|$ не превосходит малого $\delta > 0$, мы получим аппроксимацию части границы множества достижимости, образованную точками $x(t_1)$. Для достаточно больших a_i аппроксимироваться будет вся граница, если на каждой из возможных траекторий выполняется условие полной управляемости линеаризованной системы. Заметим, что если условие отбора управлений заменить неравенством $J(u(\cdot)) \leq \mu^2$, то мы имеем точки из множества достижимости. При этом каждая из точек может быть получена как решения системы (3.3). Действительно, если $x \in G(t_1)$, то решая задачу 1 мы приходим к выводу, что оптимальное управление также удовлетворяет системе (3.3), если выполнено условие управляемости. Отличие этих двух случаев в следующем: системе (3.3) удовлетворяет *любое* управление, ведущее на границу $G(t_1)$; среди управлений, ведущих во внутренние точки $G(t_1)$, *существует* управление, для которого выполняется (3.3).

4. Пример

Рассмотрим нелинейную управляемую систему (уницикл), описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in [0, 3],$$

с интегральным ограничением на управление

$$\int\limits_0^3 u^2(t)dt \leq 2.$$

При ограничении на амплитуду управления ($|u(t)| \leq 1$) проекции множества достижимости данной системы на двумерное пространство координат (x_1, x_2) были исследованы в [19]. Общая трехмерная картина множества достижимости получена в [20].

На рисунке приведены результаты построения проекции множества достижимости на плоскость (x_1, x_2) при интегральном ограничении на помеху. На левой части рисунка представлен итог построения границы множества достижимости, когда траектории системы (3.3) отбирались по критерию $|J(u(\cdot)) - 2| \leq \delta$. Часть точек, которые выглядят как внутренние, — это результат проектирования на двумерную плоскость граничных точек множества достижимости в трехмерном пространстве. Отметим область вблизи точки с координатами $(3, 0)$, в которую не попала ни одна из проекций точек $x(3)$, хотя точка $(3, 0)$ принадлежит границе.

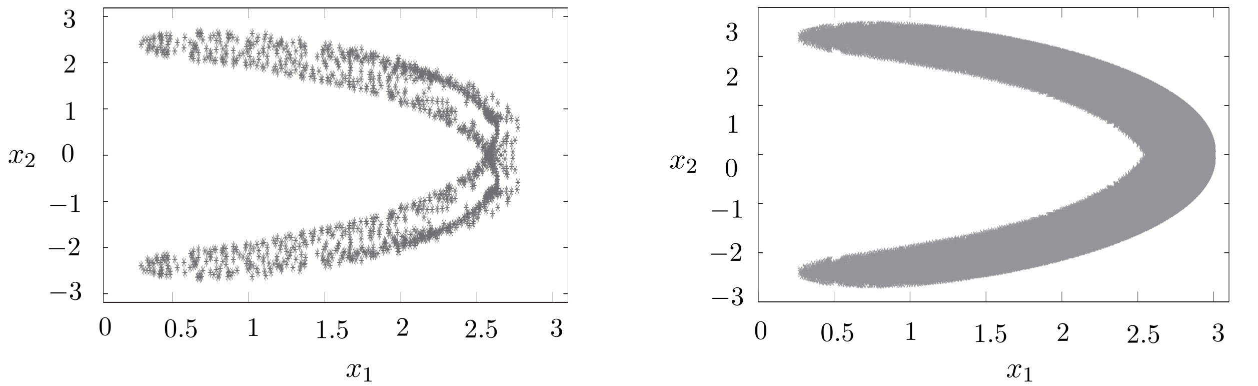
Действительно, управление $u(t) \equiv 0$ переводит систему в точку $(3, 0, 0)$. Так как, очевидно, $x_1(3) \leq 3$ для любого управления, то $(3, 0, 0)$ — граничная точка множества достижимости, а $(3, 0)$ — граничная точка его проекции. Управление $u(t) \equiv 0$ здесь решает задачу минимизации, но при этом

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_0^3 u^2(t)dt = 0 < 2.$$

Отвечающая управлению $u(t) \equiv 0$ траектория имеет вид $x_1(t) = t, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0$. Линеаризованная вдоль данной траектории система

$$\dot{\delta x}_1 = 0, \quad \dot{\delta x}_2 = \delta x_3, \quad \dot{\delta x}_3 = \delta v$$

не является вполне управляемой. Данный пример показывает, что условие полной управляемости в теореме 2 является существенным.



Проекции множества достижимости на плоскость x_1, x_2.

На правой части рисунка показаны проекции на плоскость x_1, x_2 правых концов траекторий системы (3.3), отобранных по критерию $J(u(\cdot)) \leq 2$. Очевидно, что точка $(3, 0)$ и близкие к ней точки попадают в заштрихованную часть рисунка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Субботин А. И., Ушаков В. Н.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, № 3. С. 387–396.
4. **Ухоботов В.И.** Об одном классе дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 819–824.
5. **Ушаков В.Н.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 1. С. 15–23.
6. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A: Math. Anal. 2004. Vol. 11. P. 255–267.
7. **Huseyin N., Huseyin A.** Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation // Appl. Math. Comput. 2013. Vol. 219. P. 8416–8424. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.005 .
8. **Guseinov Kh. G., Nazlipinar A. S.** Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261–268.
9. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls / K.G. Guseinov, O. Ozer, E. Akyar, V.N. Ushakov // NoDEA Nonlinear Diff. Equat. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. **Куржанский А.Б., Пищулина И.Я.** Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях I–III // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 8. С. 1434–1446; № 9. С. 1568–1579; № 12. С. 2149–2158.
11. **Ананьев Б.И.** О коррекции движения при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 3–15.
12. **Gusev M.I.** On optimal control problem for the bundle of trajectories of uncertain system // LSSC 2009: Large-Scale Scientific Computing. 2010. P. 286–293. (Lecture Notes in Computer Sciences; vol. 5910). doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_33 .
13. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
14. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
15. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
16. **Иоффе А.Д.** Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 3 (333). Р. 103–162. doi: 10.4213/rm292 .
17. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М.: Наука, 1965. 276 с.

18. **Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал пресс, 2006. 144 с.
19. **Cockayne E. J., Hall G. W. C.** Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220. doi:10.1137/0313012 .
20. **Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320–328.
21. **Gusev M.I., Zykov I.V.** A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Поступила 31.10.2016

Зыков Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: zykoviustu@mail.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Subbotin A.I., Ushakov V.N. Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players' controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 367–375. doi: 10.1016/0021-8928(75)90001-5 .
4. Ukhobotov V.I. On a class of differential games with an integral constraint // *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 838–844. doi: 10.1016/0021-8928(77)90166-6 .
5. Ushakov V.N. Extremal strategies in differential games with integral constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1972, vol. 36, no. 1, pp. 12–19. doi: 10.1016/0021-8928(72)90076-7 .
6. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
7. Huseyin N., Huseyin A. Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation. *Appl. Math. Comput.*, 2013, vol. 219, pp. 8416–8424. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.005 .
8. Guseinov Kh.G. Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.* 2010, vol. 16, no. 5, pp. 261–268.
9. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *NoDEA Nonlinear Diff. Equat. Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. Kurzhanskii A.B., Pishchulina I.Ya. Minimax filtering under quadratic constraints. I–III. *Differentsial'nye uravneniya*, 1976, vol. 12, no. 8, pp. 1434–1446; no. 9, pp. 1568–1579; no. 12, pp. 2149–2158 (in Russian).
11. Anan'ev B.I. Correction of motion under communication constraints. *Autom. Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 3, pp. 367–378. doi: 10.1134/S000511791003001X .
12. Gusev M.I. On optimal control problem for the bundle of trajectories of uncertain system. *LSSC* 2009*: Large-Scale Scientific Computing*, 2010, Ser. Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 5910, pp. 286–293. doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_33 .
13. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi– Bellmana* [The method of characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation]. Yekaterinburg, 2013, 244 p.

14. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
15. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Faktorial press Publ., 2002, 824 p.
16. Ioffe A.D. Metric regularity and subdifferential calculus. *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 501–558, doi: 10.1070/RM2000v055n03ABEH000292 .
17. Beckenbach Edwin F., Richard Bellman Richard. Inequalities. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1961, 198 p. doi: 10.1007/978-3-642-64971-4 . Translated under the title *Neravenstva*, Moscow, Nauka Publ., 1965, 276 p.
18. Arutyunov A.V., Magaril-Ilyaev G.G., Tikhomirov V.M. *Printsip maksimuma Pontryagina. Dokazatel'stvo i prilozheniya.* [Pontryagin maximum principle: Proofs and applications]. Moscow, Factorial Press, 2006, 144 p. ISBN 5-7339-0585-9.
19. Cockayne E.J., Hall G. W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. doi: 10.1137/0313012 .
20. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
21. Gusev M.I., Zykov I.V. A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2. pp. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

M.I. Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: gusev@imm.uran.ru .

I. V. Zykov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: zykoviustu@mail.ru .