ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.21+517.958

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ В ФОРМЕ АБСТРАКТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КОШИ[1]

В. А. Бовкун

На примере построения математической модели процесса распространения тепла в одномерном стержне под воздействием случайных тепловых источников на боковую поверхность стержня показана конструкция случайных процессов, отражающих стохастическое воздействие в предложенной модели. Получена абстрактная стохастическая задача Коши в форме Ито для уравнения с цилиндрическим винеровским процессом и для уравнения с броуновским листом.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши, броуновский лист, цилиндрический винеровский процесс.

V. A. Bovkun. Construction of models in the form of stochastic Cauchy problems.

Using the example of the construction of a mathematical model for the heat transfer process in a one-dimensional rod whose lateral surface is subject to random heat sources, we demonstrate the structure of random processes reflecting the stochastic influence in the proposed model. We obtain an abstract stochastic Cauchy problem in the Ito form for an equation with cylindrical Wiener process and for an equation with Brownian sheet.

Keywords: stochastic Cauchy problem, Brownian sheet, cylindrical Wiener process.

MSC: 60H15, 60G15, 35Q79

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-94-101

1. Введение

В течение длительного периода времени исследование различных физических явлений осуществлялось исходя из детерминистических принципов. Так первое фундаментальное описание процессов распространения тепла и диффузии было дано в форме детерминированных дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, как оказалось позднее, подобный подход не позволяет провести детальное изучение процесса. Более полную картину можно получить, если применить вероятностные принципы и методы для построения модели. Применение вероятностных методов основывается на том, что для получения математической модели, описывающей процесс, требуется провести эмпирическое исследование и установить вероятностные соотношения на основе собранных статистических данных. Дальнейшие построения, опирающиеся на базовые результаты теории вероятностей (например, центральную предельную теорему), позволяют получить модель в форме стохастической задачи. Обстоятельное и конструктивное изложение методов построения стохастических моделей различных процессов, возникающих в физике, химии, популяционной динамике и т. д., можно найти, например, в монографиях [1; 2].

Среди стохастических моделей важное место занимают модели в форме задачи Коши для дифференциальных уравнений с неоднородностями типа белого шума в бесконечномерных

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

пространствах. Используя конструкцию интеграла Ито в бесконечномерном случае, эту задачу записывают в интегральной форме [3–5]:

$$X(t) - \zeta = \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW(s), \quad t \in [0;T]. \tag{1.1}$$

Здесь A — генератор некоторой полугруппы в гильбертовом пространстве H; оператор B действует из $\mathbb{H}$ в H; $\{W = W(t),\ t \geq 0\}$ — Q-винеровский или цилиндрический винеровский процесс $W(t) = W(t,\omega),\ \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$, со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$; ζ — H-значная случайная величина. В данном уравнении слагаемое с винеровским процессом W отражает влияние случайного внешнего воздействия на моделируемую систему. Специфика модели, состоящая в наличии Q-винеровского или цилиндрического винеровского процесса, обусловлена внутренними характеристиками случайной помехи.

В настоящей работе, в продолжение исследований [6; 7], построена математическая модель процесса распространения тепла в стержне под воздействием случайных тепловых источников в форме абстрактной стохастической задачи Коши. Дано обоснование того, что в рамках заданной физической модели случайное внешнее воздействие может быть описано с помощью броуновского листа; при этом математической моделью изучаемого процесса является стохастическая задача Коши в форме (1.1) с цилиндрическим винеровским процессом в пространстве $H = L^2[a;b]$ в слабом смысле. Как следствие показано, что данный физический процесс может быть описан с помощью интегрального по переменным x и t уравнения, содержащего стохастический интеграл по броуновскому листу.

2. Вывод стохастического уравнения на основе физической модели

Рассмотрим задачу о распространении тепла в одномерном стержне длины l — с учетом случайных тепловых воздействий на боковую поверхность — и с изолированными концами. Пусть $u(x,t)$ — температура стержня в сечении $x \in [0;l]$ в момент времени $t \geq 0$. Предполагаем, что известно распределение температуры в стержне в начальный момент времени $u(x,0) = f(x)$. Стержень, подвергаясь случайным тепловым воздействиям, получает количество тепла γ или $-\gamma$ на единицу длины за единицу времени с вероятностью λ.

Следуя методу вывода классического уравнения теплопроводности [8], составим закон теплового баланса. Во-первых, согласно закону изменения количества тепла в сечении x стержня за время Δt имеем

$$\Delta\mathcal{Q}(t,x) = cm\left(u(t+\Delta t, x) - u(t,x)\right), \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l], \tag{2.1}$$

где c — удельная теплоемкость стержня; m — масса стержня. Во-вторых, согласно закону теплопроводности Фурье количество тепла q, переносимого за единицу времени через единичную площадку в положительном направлении, пропорционально градиенту температуры, т. е. $q(x,t) = \alpha(x)u_x$, где $\alpha(x)$ — коэффициент теплопроводности. В дальнейшем будем считать, что стержень однороден, тогда $\alpha(x) \equiv \alpha$.

Теперь примем во внимание случайные тепловые воздействия на боковую поверхность стержня. Тогда изменение количества тепла можно разбить на две составляющие:

$$\Delta\mathcal{Q}(t,x) = \Delta\mathcal{Q}_d(t,x) + \Delta\mathcal{Q}_s(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l], \tag{2.2}$$

где $\Delta\mathcal{Q}_d(t,x) = \Delta q(x,t)S\Delta t = \alpha\left(u_x(t,x+\Delta x) - u_x(t,x)\right)S\Delta t$ — слагаемое, обусловленное внутренними процессами передачи тепла; S — площадь сечения x; $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ — случайная компонента. Первое слагаемое $\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)$ в (2.2) является детерминированной величиной, т. е.

$$\mathbb{E}[\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)] = \alpha\left(u_x(t,x+\Delta x) - u_x(t,x)\right)S\Delta t, \quad Var[\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)] = 0.$$

Т а б л и ц а

ξ_{nk}	Вероятность изменения
$\gamma\sqrt{\dfrac{\Delta x}{n}}$	$\lambda\Delta t$
$-\gamma\sqrt{\dfrac{\Delta x}{n}}$	$\lambda\Delta t$
0	$1-2\lambda\Delta t$

Согласно физической модели случайная компонента может быть описана следующим образом. На каждом частичном отрезке разбиения участка стержня $[x; x+\Delta x]$ на n равных частей количество тепла $\xi_{nk},\ 1 \le k \le n$, получаемое через боковую поверхность стержня за промежуток времени $[t; t+\Delta t]$, является случайной величиной, определяемой рядом распределения (см. таблицу). Тогда величина $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ описывает суммарное количество тепла, поступающее через боковую поверхность стержня на участке $[x; x+\Delta x]$ за время $[t; t+\Delta t]$. Полагая

$$\Delta \mathcal{Q}_s(t,x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk},$$

изучим свойства случайной компоненты. Исходя из физических принципов построения модели, приращения $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ на непересекающихся прямоугольниках $(t; t+\Delta t] \times (x; x+\Delta x]$ считаем независимыми случайными величинами.

Прежде всего, докажем, что случайная величина $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ имеет нормальный закон распределения. Затем — что случайные тепловые возмущения с точностью до константы можно описать с помощью броуновского листа. Наконец, опираясь на представление броуновского листа в виде ряда Фурье, убедимся, что случайные возмущения в данной модели могут быть описаны с помощью цилиндрического винеровского процесса. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема. *Стохастическая задача Коши для процесса распространения тепла в стержне с учетом случайных тепловых воздействий, определенных в таблице, в интегральной форме* (1.1) *с интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу* $\{W(t),\ t \ge 0\}$, *записывается следующим образом*:

$$c\rho S\,(u(t,x) - f(x)) = \alpha S \int_0^t u_{xx}(s,x)ds + \gamma\sqrt{2\lambda}W(t), \quad t \in [0;T], \quad x \in [0;l]. \tag{2.3}$$

Здесь уравнение понимается в слабом смысле в пространстве $L^2[0;l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим, что случайная величина $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ имеет нормальный закон распределения. Для этого рассмотрим разбиение участка стержня $[x; x+\Delta x]$ на n равных частей и соответствующий этому разбиению набор случайных величин $\{\xi_{nk}, n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n\}$. Отметим, что согласно физической модели последовательность $\{\xi_{nk}\}$ состоит из независимых в каждой серии случайных величин и

$$\mathbb{E}[\xi_{nk}] = 0, \quad Var[\xi_{nk}] = \frac{2}{n}\lambda\gamma^2\Delta t\Delta x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \le k \le n.$$

Докажем, что введенная последовательность $\{\xi_{nk}\}$ удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы для серий, формулируемой следующим образом [9, с. 135]:

Пусть $\{\xi_{nk}, \quad n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n\}$ *— последовательность независимых в каждой серии случайных величин и* F_{nk} *— функция распределения случайной величины* ξ_{nk}. *Если для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *и некоторого* $\tau > 0$ *выполняются условия*:

1) $\sum_{k=1}^{n} P(|\xi_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$;
2) $\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|<\tau} y dF_{nk}(y) \to a$ при $n \to \infty$;
3) $\sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{|y|<\tau} y^2 dF_{nk}(y) - \Big(\int_{|y|<\tau} y dF_{nk}(y) \Big)^2 \Big) \to b^2$ при $n \to \infty$, то

то сумма случайных величин $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ сходится по распределению при $n \to \infty$ к нормальной случайной величине $\mathcal{N}(a; b)$.

Проверим первое условие. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для любого номера n, удовлетворяющего условию $n \geq N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\gamma^2 \Delta x}{\varepsilon^2}\right] + 1$, имеем $P(|\xi_{nk}| \geq \varepsilon) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{n} P(|\xi_{nk}| \geq \varepsilon) = 0$ для любого $n \geq N(\varepsilon)$ и условие 1) центральной предельной теоремы для серий выполнено.

Далее, зафиксируем $\tau \geq \gamma\sqrt{\Delta x}$, тогда для любого n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|<\tau} y dF_{nk}(y) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\gamma\sqrt{\frac{\Delta x}{n}} \lambda \Delta t - \gamma\sqrt{\frac{\Delta x}{n}} \lambda \Delta t \Big) = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{|y|<\tau} y^2 dF_{nk}(y) - \Bigg(\int\limits_{|y|<\tau} y dF_{nk}(y) \Bigg)^2 \Bigg) = \sum_{k=1}^{n} 2\gamma^2 \frac{\Delta x}{n} \lambda \Delta t = 2\gamma^2 \Delta x \lambda \Delta t.$$

Следовательно, условия 2) и 3) тоже выполняются.

Таким образом, заключаем, что функция распределения суммы $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ при $n \to \infty$ сходится по распределению к нормальной случайной величине и, следовательно,

$$\Delta \mathcal{Q}_s(t, x) \sim \mathcal{N}(0; \sqrt{2\lambda\gamma^2 \Delta t \Delta x}). \tag{2.4}$$

Теперь покажем, что случайная величина $\Delta \mathcal{Q}_s(t, x)$ с точностью до константы равна приращению броуновского листа. Для этого используем определение, данное в [10].

Двупараметрический случайный процесс $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, x)$, $t, x \geq 0$, называется *броуновским листом*, если он обладает свойствами

(W1) $\mathbf{W}$ — гауссовский процесс;

(W2) $\mathbb{E}[\mathbf{W}(t_1, x_1)\mathbf{W}(t_2, x_2)] = (t_1 \wedge t_2)(x_1 \wedge x_2)$, $x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0$ и $\mathbb{E}[\mathbf{W}(t, x)] = 0$.

Рассмотрим приращения $\Delta \mathbf{W}(t, x)$ броуновского листа на прямоугольнике $(t; t+\Delta t] \times (x; x+\Delta x]$, определяемые следующим равенством [11]:

$$\Delta \mathbf{W}(t, x) := \mathbf{W}(t + \Delta t, x + \Delta x) - \mathbf{W}(t, x + \Delta x) - \mathbf{W}(t + \Delta t, x) + \mathbf{W}(t, x). \tag{2.5}$$

При таком определении заметим, что во-первых, $\Delta \mathbf{W}(t, x) \sim \mathcal{N}(0; \sqrt{\Delta t \Delta x})$. Действительно, нормальность следует из гауссовости процесса $\mathbf{W}$, а из условия (W2) вытекает, что

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{W}(t, x)] = 0, \quad Var[\Delta \mathbf{W}(t, x)] = \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{W}(t, x))^2] - \mathbb{E}^2[(\Delta \mathbf{W}(t, x))] = \Delta t \Delta x.$$

Во-вторых, броуновский лист является процессом с независимыми приращениями на непересекающихся прямоугольниках. Чтобы показать это, возьмем два непересекающихся прямоугольника $(t_1; t_2] \times (x_1; x_2]$ и $(t_3; t_4] \times (x_3; x_4]$, где $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, и убедимся в том, что приращения на этих прямоугольниках некоррелированы:

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{W}(t_1, x_1) \Delta \mathbf{W}(t_3, x_3)] = \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{W}(t_2, x_2) - \mathbf{W}(t_2, x_1) - \mathbf{W}(t_1, x_2) + \mathbf{W}(t_1, x_1) \big)$$

$$\times \big(\mathbf{W}(t_4, x_4) - \mathbf{W}(t_4, x_3) - \mathbf{W}(t_3, x_4) + \mathbf{W}(t_3, x_3) \big) \Big] = 0.$$

Отсюда в силу некоррелируемости и нормальности приращений получаем, что случайные величины $\Delta\mathbf{W}(t_1,x_1), \Delta\mathbf{W}(t_3,x_3)$ независимы.

Возвращаясь к описанию приращения $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$, которое обладает свойством (2.4), заключаем, что оно с точностью до константы равно приращению броуновского листа:

$$\Delta\mathcal{Q}_s(t,x) = \gamma\sqrt{2\lambda}\Delta\mathbf{W}(t,x).$$

Дальнейшее применение свойств броуновского листа к выводу стохастического уравнения с винеровским процессом будет основываться на представлении $\mathbf{W}$ суммой ряда Фурье некоторого Q-винеровского процесса. Чтобы определить оператор Q, отвечающий броуновскому листу, рассмотрим $L^2[0;l]$-значный Q-винеровский процесс W_Q, который может быть представлен как сумма равномерно сходящегося по t при почти всех ω ряда [3, с. 82]:

$$W_Q(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\beta_n(t)e_n(x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l], \tag{2.6}$$

где $\{\beta_n\}$ — независимые броуновские движения на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; λ_n — собственные значения оператора Q; e_n — соответствующие им собственные векторы, образующие ортонормированный базис в $L^2[0;l]$.

Учитывая свойство Q быть оператором следа, можно показать, что он является интегральным оператором в пространстве $L^2[0;l]$:

$$Q\varphi(x_1) = \int_0^l g(x_1,x_2)\varphi(x_2)dx_2, \quad x_1 \in [0;l], \quad \varphi \in L^2[0;l],$$

с симметричным ядром g, которое определяет пространственную корреляцию процесса W_Q:

$$\mathbb{E}[W_Q(t,x_1)W_Q(t,x_2)] = tg(x_1,x_2), \quad t \geq 0, \quad x_1,x_2 \in [0;l].$$

Принимая во внимание тот факт, что пространственная корреляция броуновского листа определяется согласно свойству (W2) при фиксированном t равенством

$$\mathbb{E}[\mathbf{W}(t,x_1)\mathbf{W}(t,x_2)] = t(x_1 \wedge x_2), \quad t \geq 0, \quad x_1,x_2 \in [0;l],$$

заключаем, что броуновский лист является $L^2[0;l]$-значным Q-винеровским процессом с интегральным оператором Q, ядром которого является функция $g(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2$. Найдем набор собственных значений и соответствующих им ортонормированных собственных функций интегрального оператора с ядром g:

$$\lambda_n = \frac{4l^2}{\pi^2(2n+1)^2}, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad x \in [0;l].$$

Тогда разложение (2.6) принимает следующий вид:

$$W_Q(t,x) = \frac{2\sqrt{2l}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n(t)}{2n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l} = \mathbf{W}(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l]. \tag{2.7}$$

Далее формально продифференцируем разложение (2.7) по переменной x, получим ряд

$$W(t,x) := \frac{\partial\mathbf{W}(t,x)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{2l}}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(t)\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l],$$

сходимость которого по x надо понимать в слабом смысле. Так как функции

$$\widetilde{e}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad x \in [0;l],$$

также образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2[0;l]$, то разложение для $W(t,x)$ можно представить в виде

$$W(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t)\widetilde{e}_n(x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l]. \tag{2.8}$$

Из этого представления следует, что слабо сходящийся ряд (2.8) определяет цилиндрический винеровский процесс $\{W(t) = W(t,x),\ t \geq 0\}$ в гильбертовом пространстве $L^2[0;l]$.

Теперь перейдем к выводу стохастического уравнения с интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу. Согласно принципу теплового баланса для участка стержня $[x; x+\Delta x]$ за время $[t; t+\Delta t]$, приравниваем правые части формул (2.1) и (2.2). Получим уравнение в форме приращений по x и t:

$$cm\left(u(t+\Delta t,x) - u(t,x)\right) = \alpha\left(u_x(t,x+\Delta x) - u_x(t,x)\right) S\Delta t + \gamma\sqrt{2\lambda}\Delta\mathbf{W}(t,x). \tag{2.9}$$

Далее рассмотрим отношение $\Delta\mathbf{W}(t,x)/\Delta x$. В силу определения приращения $\Delta\mathbf{W}(t,x)$ равенством (2.5) имеем

$$\frac{\Delta\mathbf{W}(t,x)}{\Delta x} = \frac{\mathbf{W}(t+\Delta t,x+\Delta x) - \mathbf{W}(t+\Delta t,x)}{\Delta x} - \frac{\mathbf{W}(t,x+\Delta x) - \mathbf{W}(t,x)}{\Delta x}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l].$$

Отсюда следует, что приращение броуновского листа связано с приращением цилиндрического винеровского процесса следующим равенством:

$$\Delta\mathbf{W}(t,x) = \left(W(t+\Delta t) - W(t)\right)\Delta x + o(\Delta x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0;l]. \tag{2.10}$$

Заметим, что стохастический интеграл $\int_0^t \langle\psi(s,\cdot), dW(s)\rangle,\ t \in [0;T]$, по цилиндрическому винеровскому процессу существует при условии, что $L^2[0;l]$-значный предсказуемый процесс $\psi(t,\cdot),\ t \in [0;T]$ удовлетворяет требованию

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \int_0^l \psi(s,\xi)\,ds\,d\xi\Big] < +\infty.$$

Примем во внимание, что в нашем случае $\psi(t,x) = \gamma\sqrt{2\lambda}$, и формально предположим существование частных производных u_t, u_{xx}. Тогда поделив обе части уравнения (2.9) на Δx и устремляя Δt и Δx к 0, получим, что уравнение в приращениях сводится к интегральному уравнению

$$c\rho S \int_0^t u_s(s,x)ds = \alpha S \int_0^t u_{xx}(s,x)ds + \gamma\sqrt{2\lambda}\int_0^t dW(s), \quad t \in [0;T], \quad x \in [0;l],$$

с интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу $\{W(t),\ t \geq 0\}$. Учитывая начальное распределение температуры $u(x,0) = f(x),\ x \in [0;l]$ и значение стохастического интеграла, окончательно имеем, что математическая модель для описания процесса распространения тепла в стержне может быть записана следующим образом:

$$c\rho S\left(u(t,x) - f(x)\right) = \alpha S \int_0^t u_{xx}(s,x)ds + \gamma\sqrt{2\lambda}W(t), \quad t \in [0;T], \quad x \in [0;l].$$

Здесь уравнение понимается в слабом смысле в пространстве $L^2[0;l]$.

Теорема доказана.

В качестве дополнения к основному результату покажем, что после подходящих преобразований стохастического слагаемого в уравнении (2.9) процесс распространения тепла в стержне также можно описать с помощью интегрального по двум переменным уравнения.

Утверждение. *Стохастическая задача Коши для процесса распространения тепла в стержне с учетом случайных тепловых воздействий, определенных в таблице выше, может быть записана следующим образом*:

$$c\rho S u_t(t,x)dxdt = \alpha S u_{xx}(t,x)dxdt + \gamma\sqrt{2\lambda}d\mathbf{W}(t,x), \quad u(x,0)=f(x), \quad t\in[0;T], \quad x\in[0;l].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим равенство [3, с. 102]

$$\int\limits_0^t \langle\psi(s,\cdot), dW(s)\rangle = \int\limits_0^t\int\limits_0^l \psi(s,\xi)d\mathbf{W}(s,\xi), \quad t\in[0;T], \quad \xi\in[0;l],$$

которое устанавливает связь стохастического интеграла по цилиндрическому винеровскому процессу и стохастического интеграла по броуновскому листу. Принимая во внимание представление (2.10) приращения броуновского листа, в уравнении (2.9) устремим Δt и Δx к 0. Получим, что уравнение в приращениях преобразуется к интегральному уравнению по двум переменным

$$c\rho S\int\limits_0^t\int\limits_0^x u_s(s,\xi)d\xi ds = \alpha S\int\limits_0^t\int\limits_0^x u_{\xi\xi}(s,\xi)d\xi ds + \gamma\sqrt{2\lambda}\int\limits_0^t\int\limits_0^x d\mathbf{W}(s,\xi), \quad t\in[0;T], \quad x\in[0;l],$$

которое содержит стохастический интеграл по броуновскому листу. Учитывая общепринятую в теории стохастических уравнений запись интегральных уравнений в форме дифференциалов и начальное условие, заключаем, что математическая модель процесса распространения тепла может быть записана следующим образом:

$$c\rho S u_t(t,x)dxdt = \alpha S u_{xx}(t,x)dxdt + \gamma\sqrt{2\lambda}d\mathbf{W}(t,x), \quad u(x,0)=f(x), \quad t\in[0;T], \quad x\in[0;l].$$

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 1. Принципиально важным для вывода стохастического уравнения (2.3) является то, что по предположению физической модели случайные величины $\xi_{nk},\ 1\le k\le n$ независимы и их значения определяются величиной $\sqrt{\Delta x}$. Проанализировав доказательство нормальности случайной величины $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$, можно убедиться в том, что ключевую роль играют степень приращения Δx и свойство независимости. Если предполагать иную степень приращения, то потребуется принципиально другой подход к выводу математической модели.

З а м е ч а н и е 2. Задачу (2.3) можно рассматривать как стохастически возмущенную абстрактную задачу Коши для уравнения первого порядка в пространстве $H=L^2[0;l]$ с оператором $A=d^2/dx^2$, порождающим полугруппу класса C_0. Тогда существование и единственность слабого решения задачи вытекает из [3, теорема 5.2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Allen E.J.** Modeling with Ito stochastic differential equations. Dordrecht: Springer, 2007. 228 p. (Math. Model. Theory Appl.; vol. 22.)
2. **Гардинер К.В.** Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 538 с.
3. **Da Prato G., Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014. 493 p. (Encyclopedia Math. Appl. No. 45.)
4. **Melnikova I.V.** Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and Generalized Solutions. Boca Raton: CRC Press, 2016. 310 p. (Monographs and Research Notes in Math.)

5. **Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A.** Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions // J. Math. Sci. 2002. Vol. 111, no. 2. P. 3430–3475.
6. **Allen E.J.** Derivation of stochastic partial differential equations // Stoch. Anal. Appl. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 357–378.
7. **Парфененкова В.С.** Исследование стохастических задач математической физики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 212–221.
8. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 320 с.
10. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 400 с.
11. **Лифшиц М.А.** Гауссовские случайные функции. К.: ТВіМС, 1995. 246 с.

Бовкун Вадим Андреевич
аспирант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: 123456m@inbox.ru

Поступила 10.09.2016

REFERENCES

1. Allen E.J. *Modeling with Ito stochastic differential equations.* Dordrecht: Springer, 2007, Ser. Math. Model. Theory Appl., vol. 22, 228 p.
2. Gardiner C.W. *Handbook of stochastic method. For physics, chemistry, and the natural sciences.* Berlin: Springer-Verlag, 1985, Springer Series in Synergetics, vol. 13, 442 p.
3. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014, Encyclopedia Math. Appl. No. 45, 493 p.
4. Melnikova I.V. *Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and Generalized Solutions.* Boca Raton: CRC Press, 2016, Ser. Monographs and Research Notes in Math., 310 p.
5. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions. *J. Math. Sci.*, 2002, vol. 111, no. 2, pp. 3430–3475.
6. Allen E.J. Derivation of stochastic partial differential equations. *Stoch. Anal. Appl.*, 2008, vol. 26, no. 2, pp. 357–378.
7. Parfenenkova V.S. Investigation of stochastic problems of mathematical physics. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 18, no. 2, 2012, pp. 212–221 (in Russian).
8. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics.* New York: Dover Publ., 1963, Intern. Ser. Monograp. Pure Appl. Math., vol. 39, 765 p. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoj fiziki*, Moskow: Gostekhizdat Publ., 1953, 680 p.
9. Petrov V.V. *Predelnye teoremy dlya summ nezavisimyh sluchajnyh velichin* (Limit theorems for the sums of independent random variables), Moscow: Nauka Publ., 1987, 320 p. (in Russian).
10. Bulinsky A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchajnyh processov* (The theory of stochastic processes). Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 400 p. (in Russian).
11. Lifshits M.A. *Gaussovskie sluchajnye funkcii* (Gaussian random functions). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, Ser. Math. Appl., vol. 322, 333 p.

V. A. Bovkun, doctoral student, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: 123456m@inbox.ru .