Том 22 № 4 2016

УДК 519.62

ДВИЖУЩИЙСЯ В $\mathbb{R}^2$ ОБЪЕКТ И ГРУППА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

В. И. Бердышев

В работе поставлена экстремальная задача построения траектории движущегося объекта, наиболее удаленной от набора наблюдателей с фиксированными конусами обзора. При некоторых ограничениях на расположение наблюдателей даны характеризация и способ построения оптимальной траектории.

Ключевые слова: движущийся объект, наблюдатель, оптимальная траектория.

V. I. Berdyshev. Moving object in $\mathbb{R}^2$ and a group of observers.

We formulate an extremal problem of constructing a trajectory of a moving object that is farthest from a group of observers with fixed visibility cones. Under some constraints on the arrangement of the observers we give a characterization and a method of construction of an optimal trajectory.

Keywords: moving object, observer, optimal trajectory.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-87-93

Пусть M — фиксированное множество в $\mathbb{R}^2$, являющееся замыканием открытого множества, t — движущийся объект, M препятствует движению и видимости. В $\mathbb{R}^2$ задана непрерывная траектория $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_0 \cap M = \varnothing$, без самопересечений, соединяющая точки $t_* \neq t^*$ из $\mathbb{R}^2$. Объект t движется внутри коридора

$$Y = \bigcup_{t \in \mathcal{T}_0} V_r(t),$$

где $r = r(t) = \min\{\|t - m\| \colon m \in M\}$, $V_r(t)$ — замкнутый шар радиуса r с центром t. Мы предполагаем, что $V_r(t_*) \cap V_r(t^*) = \varnothing$. Множество непрерывных траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) :\ 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\} \subset Y \tag{1}$$

обозначим через $\mathbb{T}$.

Пусть bdY — граница коридора Y и $\Gamma = (bdY) \backslash (V_r(t_*) \cup V_r(t^*))$. Множество Γ разбивается на две части: левую часть Γ^l и правую Γ_r по отношению к объекту, движущемуся от t_* к t^* по $\mathcal{T}_0$. Предполагается, что задан конечный набор наблюдателей $\mathbb{S} = \{S\}$, $S \notin \overset{\circ}{Y}$. Ради простоты будем считать, что $\mathbb{S} \subset \Gamma$. Каждый наблюдатель S имеет фиксированный конус обзора $K(S)$ — объединение с S выпуклого открытого конуса при вершине S. Пересечение $K(S)$ с Y может состоять из нескольких связных компонент. В дальнейшем через $K_Y(S)$ обозначается компонента, содержащая S. Для любого S конус $K(S)$ таков, что каждая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекается с $K_Y(S)$. Множество наблюдателей, принадлежащих Γ^l или Γ_r, будем обозначать через $\mathbb{S}^l$, $\mathbb{S}_r$, соответственно.

Определим "расстояние" от точки $t \in Y$ до S следующим образом:

$$\rho(t, S) = \begin{cases} \|t - S\| & \text{при } \ t \in K_Y(S), \\ +\infty & \text{при } \ t \notin K_Y(S). \end{cases}$$

Задача состоит в поиске траектории $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}(\mathbb{S})$ (1), реализующей максимум

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{S}) \overset{\text{def}}{=} \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min\{\rho(t, S) :\ t \in \mathcal{T},\ S \in \mathbb{S}\} = \min\{\rho(t, S) :\ t \in \mathcal{T}^*,\ S \in \mathbb{S}\}. \tag{2}$$

В данной работе устанавливаются характеристические свойства оптимальных (наилучших) траекторий и указывается способ построения траекторий. Легко видеть, что таких траекторий много. Указывается способ построения оптимальных траекторий, состоящих из прямолинейных отрезков, дуг окружностей, отрезков границы коридора Y, которые определяются расположением наблюдателей и конусов $K(S),\ S\in\mathbb{S}$.

Подобная задача рассматривалась в [1] без исследования способов построения оптимальной траектории.

В дальнейшем через $L(x,y)$ обозначается прямая, содержащая точки $x\neq y$, а через $\overline{Q}$ — замыкание множества Q.

Рассмотрим частные случаи задачи (2).

I. Для $S\in\mathbb{S}^l$ (для $S\in\mathbb{S}_r$) через $p=p(S)$ обозначим ближайшую к S точку из Γ_r (из Γ^l) и положим
$$M(S)=\rho(p(S),S). \tag{3}$$

Отметим очевидное

Предложение 1. *Пусть набор $\mathbb{S}$ наблюдателей таков, что $K_Y(S^l)\cap K_Y(S_r)\cap Y=\varnothing$ для любых $S^l\in\mathbb{S}^l$ и $S_r\in\mathbb{S}_r$. Оптимальная траектория $\mathcal{T}^*\in\mathbb{T}$ характеризуется свойствами*:

$p(S)\in\mathcal{T}^*$ для всех S, реализующих минимум $M=\min\limits_{S\in\mathbb{S}}M(S)$,

$\rho(S,\mathcal{T}^*)\geq M$ для всех $S\in\mathbb{S}$.

Любая траектория $\mathcal{T}$, содержащая все отрезки границ $K_Y(S^l)\cap\Gamma_r$, $K_Y(S_r)\cap\Gamma^l$ и удовлетворяющая условию $\rho(S,\mathcal{T})\geq M$, является оптимальной.

II. Пусть $\mathbb{S}=\{S^l,S_r\}$ — пара наблюдателей такая, что $(K_Y(S^l)\cap K_Y(S_r))\neq\varnothing$. Обозначим
$$Q=\{x\in\overline{K}_Y(S_l)\cap\overline{K}_Y(S_r)\colon \|x-S^l\|=\|x-S_r\|\}.$$
Возможны два подслучая: II_1) $Q\neq\varnothing$, II_2) $Q=\varnothing$.

Любая траектория пересекается с $K_Y(S),\ S\in\mathbb{S}$. Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*$ должна их пересекать возможно дальше от вершин, а вне множества $\overline{K}_Y(S_l)\cup\overline{K}_Y(S_r)$ ввиду определения расстояния $\rho(t,S)$ она может быть произвольной.

В случае II_1) траектория $\mathcal{T}^*$, очевидно, пересекает множество $\overline{K}_Y(S_l)\cap\overline{K}_Y(S_r)$, точнее, она содержит точку $p=p(S^l,S_r)\in Q$, реализующую минимум
$$M(S^l,S_r)\overset{\text{def}}{=}\min_{p\in\overline{K}_Y(S^l)\cap\overline{K}_Y(S_r)}\max\big\{\|S^l-p\|,\|S_r-p\|\big\}$$
$$=\max\big\{\|S^l-p(S^l,S_r)\|,\|S_r-p(S^l,S_r)\|\big\}, \tag{4}$$
при этом
$$M(S^l,S_r)=\|S^l-p\|=\|S_r-p\|. \tag{5}$$
Пусть точка p принадлежит границе одного из конусов $K(S^l),\ K(S_r)$, например, $p\in bdK(S^l)$. Тогда для точек t из этого конуса, которые расположены между дугами $C'(S^l),\ C'(S_r)$ с концевой точкой p и пересекающихся с $K(S^l)\cap K(S_r)$, радиуса $M(S^l,S_r)$ с центрами $S^l,\ S_r$, соответственно, выполняется неравенство
$$\min\{\rho(t,S^l),\rho(t,S_r)\}\geq M(S^l,S_r). \tag{6}$$
Это неравенство выполняется и для точек, расположенных внутри конуса $K(S_r)$ между дугой $C'(S_r)$, $C'(S_r)\cap K(S^l)=\varnothing$, и отрезком $[p,S^l]$. При построении траектории $\mathcal{T}^*$ будем использовать

— N') дуги $C'(S^l),\ C'(S_r)$ и отрезок $[p,S^l]$. Они содержат точки t, удовлетворяющие неравенству (6).

Если точка p принадлежит внутренности множества $K_Y(S^l) \cap K_Y(S_r)$, то для точек t из этого пересечения, лежащих между окружностями $C'(S^l),\ C'(S_r)$ также выполняется (6).

Далее точку $p = (\cdot,\cdot)$ будем обозначать через $p'(S^l, S_r)$, помещая на первую позицию в качестве аргумента вершину, граница конуса которой содержит точку p. Если $p \in (bdK(S^l)) \cap (bdK(S_r))$ или p содержится во внутренности множества $K_Y(S^l) \cap K_Y(S_r)$, то порядок аргументов-вершин в $p'(\cdot,\cdot)$ не устанавливается.

В случае II$_2$) наилучшая траектория также содержит точку $p(S^l, S_r)$, являющуюся решением задачи (4). Для определенности предположим, что

$$\|S^l - p\| < \|S_r - p\| \ \forall\ p \in K(S^l) \cap K(S_r), \tag{7}$$

тогда

$$M(S^l, S_r) = \|S_r - p\|. \tag{8}$$

Для точек t, расположенных в $K(S_r)$ между отрезком $[p, S^l]$ и дугой $C''(S_r)$ радиуса $\|S_r - p\|$ с центром S_r, выполняется неравенство (6). При построении траектории $\mathcal{T}^*$ будет использоваться

— N'') отрезок $L(p, S^l) \cap Y$ и дуга C''.

Для точки p будем применять обозначение $p = p''(S^l, S_r)$, где на позиции первой переменной помещается вершина, для которой достигается $\min\{\|S^l - p\|, \|S_r - p\|\}$.

Пусть q^l — конец дуги $C'(S^l) \cap \overline{K}(S^l)$, а q_r — конец дуги $C'(S_r) \cap \overline{K}(S_r)$. Другим концом этих дуг является точка p.

Справедливо (см. (2)–(8)) следующее утверждение.

Предложение 2. *В случае* II *имеет место равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\{M(S^l, S_r),\ M(S^l),\ M(S_r)\}.$$

Искомая оптимальная траектория в случае II$_1$ *составлена из отрезка* $[p', S^l] \cap Y$, *дуги* $C'(S^l) \cap \overline{K}(S^l)$ *(или дуги* $C'(S_r) \cap \overline{K}(S^l)$*), отрезка* $(L(S^l, q^l) \backslash [S^l, q^l]) \cap Y$ *(или отрезка* $(L(S^l, q_r) \backslash [S^l, q_r]) \cap Y$*) и дополнена частью границ* $\Gamma^l,\ \Gamma_r$. *В случае* II$_2$ *оптимальная траектория составлена из отрезка* $L(S^l, p'') \cap Y$ *и дополнена частью границ* $\Gamma^l,\ \Gamma_r$.

III. Пусть задана тройка наблюдателей $\mathbb{S} = \{S_1^l, S_2^l, S_r\}$ такая, что $S_1^l,\ S_2^l \in \Gamma^l,\ S_r \in \Gamma_r$ и

$$\Big(K_Y(S_1^l) \cap K_Y(S_r)\Big) \cap \Big(K_Y(S_2^l) \cap K_Y(S_r)\Big) = \varnothing. \tag{9}$$

Предложение 3. *Имеет место равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\{M(S_1^l, S_r),\ M(S_2^l, S_r),\ M(S_1^l),\ M(S_2^l),\ M(S_r)\} \tag{10}$$

и существует оптимальная траектория, содержащая точки $p(S_1^l, S_r),\ p(S_2^l, S_r)$. *Она составлена из дуг и отрезков, перечисленных в п.* N', N'' *и частей границ* $\Gamma^l,\ \Gamma_r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точки $p(S_1^l, S_r),\ p(S_2^l, S_r)$ имеют вид $p''(S_r, S_1^l),\ p''(S_r, S_2^l)$, то они лежат на одной стороне конуса $\overline{K}(S_r)$. Часть этой стороны, принадлежащая Y, дополненная участками границ $\Gamma^l,\ \Gamma_r$, образует траекторию $\mathcal{T}^*$. Если эти точки имеют вид $p''(S_1^l, S_r),\ p''(S_2^l, S_r)$ и

$$\|S_r - p''(S_2^l, S_r)\| < \|S_r - p''(S_1^l, S_r)\|,$$

то в состав $\mathcal{T}^*$ включаются часть стороны конуса $\overline{K}(S_2^l)$, попавшая в Y, и часть стороны конуса $K(S_1^l)$ от точки $p''(S_1^l, S_r)$ до ее пересечения с Γ_r. Остальная часть траектории принадлежит bdY.

Пусть точки $p(S_r, S_1^l),\ p(S_r, S_2^l)$ имеют вид $p''(S_1^l, S_r),\ p''(S_r, S_2^l)$, тогда включим в $\mathcal{T}^*$ часть стороны конуса $K(S_r)$, попавшую в Y и содержащую точку $p''(S_r, S_2^l)$, а также часть стороны

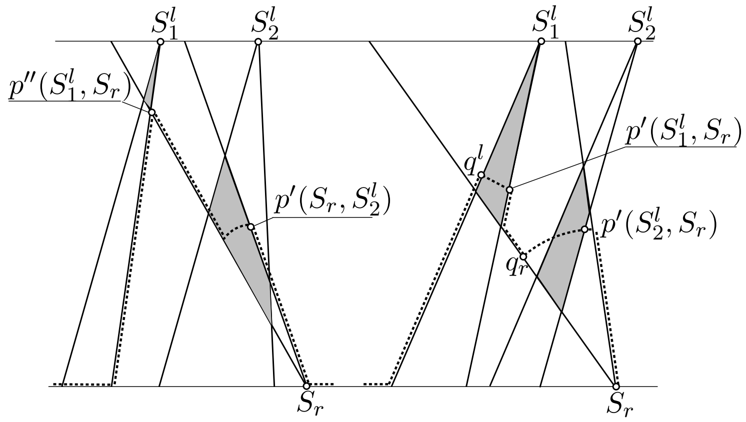

Рис. 1.

конуса $K(S_1^l)$, содержащую точку $p''(S_1^l, S_r)$. Пусть (см. рис. 1) упомянутые выше точки имеют вид $p''(S_1^l, S_r),\ p'(S_r, S_2^l)$, тогда в $\mathcal{T}^*$ включим дугу $C'(S_r)$ и три отрезка: один на стороне конуса $K(S_r)$ от точки $p''(S_1^l, S_r)$ до этой дуги, другой на стороне конуса $K(S_1^l)$ от точки $p''(S_1^l, S_r)$ до Γ_r и отрезок на стороне конуса $\overline{K}(S_r)$ от точки $p'(S_r, S_2^l)$ до L_r. Рассмотрим, наконец, случай точек $p'(S_1^l, S_r),\ p'(S_r, S_2^l)$. Ввиду соотношения (9) имеем

$$\|S_r - p(S_r, S_2^l)\| < \|S_r - p'(S_2^l, S_r)\|.$$

Включим в $\mathcal{T}^*$ дуги $C'(S_r) \cap K(S_r),\ C'(S_1^l) \cap K(S_1^l)$, отрезок на стороне конуса $\overline{K}(S_1^l)$ от q^l до Γ_r, отрезок на стороне конуса $K(S_r)$, не содержащей точку q_r от $C'(S_r)$ до границы L_r, отрезок на стороне конуса $\overline{K}(S_r)$ от q_r до $K(S_1^l)$, если $q_r \notin K(S_1^l)$. Построенная кривая (на рисунке она отмечена точками) дополняется участками границы L_r. Предложение 3 доказано. $\square$

IV. Рассмотрим случай произвольного (конечного) числа наблюдателей. Естественно требование расположить их экономно в определенном смысле, в частности, ограничить сверху кратность покрытия коридора Y множествами $K_Y(S),\ S \in \mathbb{S}$. Ясно, что группа наблюдателей, расположенных на одном "берегу", например, на Γ^l, обеспечивает более полное покрытие в зоне Γ_r, чем вблизи Γ^l. На обоих "берегах" должно быть (с учетом раствора конусов $K_Y(S)$) примерно одинаковое число наблюдателей. Будем нумеровать их в порядке от t_* к t^* посредством верхних индексов для левой границы и нижних индексов для правой. Итак, имеем набор конусов $\{K(S^i),\ S^i \in \mathbb{S}_l\},\ \{K(S_j),\ S_j \in \mathbb{S}_r\}$. Будем считать, что выполняется условие

$$K_Y(S^i) \cap K_Y(S^n) = \varnothing, \quad K_Y(S_j) \cap K_Y(S_m) = \varnothing \ \text{ при } \ i \neq n,\ j \neq m, \tag{11}$$

поэтому имеет место соотношение

$$\big(K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j)\big) \cap \big(K_Y(S^k) \cap K_Y(S_m)\big) = \varnothing \ \text{ при } \ (i,j) \neq (k,m), \tag{12}$$

обеспечивающее кратность покрытия коридора Y конусами $K(S)$ не более двух.

Кроме требований (11)–(12) на набор $\{K(S):\ S \in \mathbb{S}\}$ наложим условие регулярности, без которого общая картина может оказаться хаотичной при большом числе наблюдателей. Пусть пара вершин (S^l, S_r) такова, что

$$K_r^l \stackrel{\text{def}}{=} K_Y(S^l) \cap K_Y(S_r) \neq \varnothing.$$

Отрезок $[S^l, S_r]$ разбивает коридор Y на две части. Условимся называть часть, содержащую точку t_*, левой, а часть, содержащую точку t^*, правой. В этой связи пару (S^l, S_r) будем называть:

— левой, если $\overline{K}_r^l \cap [S^l, S_r] = \varnothing$ и множество K_r^l лежит в левой части коридора;

— правой, если $\overline{K}^l_r \cap [S^l, S_r] = \varnothing$ и множество K^l_r лежит в правой части коридора;
— средней, если $\overline{K}^l_r \cap [S^l, S_r] \neq \varnothing$.

Требование регулярности состоит в следующем: множество вершин можно разбить на группы вида

$$(S^i, S^{i+1}, \ldots, S^{i+n};\ S_j, S_{j+1}, \ldots, S_{j+m}) \quad (n \geq 0,\ m \geq 0)$$

такие, что любая пара (S^{i+n_1}, S_{j+m_1}), $0 \leq n_1 \leq n$, $0 \leq m_1 \leq m$, является левой или любая такая пара является правой. Если таких групп более одной, то они чередуются и между соседними группами левых и правых пар может присутствовать группа средних пар (S^i, S_j), $(S^{i+1}, S_{j+1}) \ldots (S^{i+k}, S_{j+k})$.

Имеет место

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\bigl\{M(S^i, S_j), M(S^i), M(S_j)\colon K(S^i) \cap K(S_j) \neq 0,\ S^i \in \mathbb{S}_l,\ S_j \in \mathbb{S}_r\bigr\}. \tag{13}$$

Наилучшая траектория $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$ характеризуется свойствами:

— $\mathcal{T}^*$ содержит точки $p(S^i), p(S_j)$ для всех одиночных наблюдателей S^i, S_j и точки $p(S^i, S_j)$ для всех пар (S^i, S_j) наблюдателей из каждой группы, реализующих минимум (13), *$S^j \in \mathbb{S}^l$, $S_j \in \mathbb{S}_r$;*

— $\rho(S, \mathcal{T}^*) \geq \mathbb{M}$ для всех $S \in \mathbb{S}$.

Существует наилучшая траектория, содержащая все точки $p(S^i, S_j)$ для $S^i \in \mathbb{S}^l$, $S_j \in \mathbb{S}_r$ таких, что $K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через D^i (через D_j) замкнутую область в Y, расположенную между конусами $K(S^i)$, $K(S^{i+1})$ (между конусами $K(S_j)$, $K(S_{j+1})$ соответственно), и рассмотрим множества точек:

— $K^i_j = K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j)$ (см. (13)) — открытое множество с кратностью покрытия, равной двум;
— $K_Y(S^i) \cap \mathcal{D}_j$, $K_Y(S^j) \cap \mathcal{D}^i$ — открыто-замкнутые множества с кратностью покрытия, равной единице;
— $\mathcal{D}^i_j = \mathcal{D}^i \cap \mathcal{D}_j$ — замкнутое множество точек с нулевой кратностью покрытия.

Отметим, что

$$\rho(t, S) = +\infty \quad \forall\ t \in \mathcal{D}^i_j, \quad \forall\ S \in \mathbb{S},$$

поэтому ограничений на положение траекторий $\mathcal{T}^*$ в множестве $\mathcal{D}^i_j$ нет.

Построение оптимальной траектории в окрестности множеств K^i_j осуществлялось в пп. I–III. Оно основано на решении $p(S^i, S_j)$ задачи (4), которое в двух возможных случаях II_1 и II_2 обозначалось как $p'(\cdot,\cdot)$, $p''(\cdot,\cdot)$, и порядок аргументов S^i, S_j определялся в зависимости от взаимного расположения конусов $K(S^i)$, $K(S_j)$.

Рассмотрим группу левых пар (см. рис. 2). Зафиксируем номер i и рассмотрим положение точек $p(S^i, S_j)$ на конусе $K(S^i)$. Если ближайшая к вершине S^i точка имеет вид $p''(S^i, S_j)$, то может быть еще несколько точек того же вида, расположенных подряд с номерами j, монотонно убывающими по мере возрастания их расстояния до вершины S^i от номера j до некоторого номера $j(i)+1$. При этом все они лежат на стороне конуса $K(S^i)$, обращенной к отрезку $[S^i, S_{j(i)}]$. Следующая по расстоянию от S^i точка $p(S^i, S_{j(i)})$ принадлежит границе множества $K^i_{j(i)}$ и является а) либо $p'(S_{j(i)}, S^i)$-точкой, либо $p'(S^i, S_{j(i)})$-точкой, б) либо точкой вида $p''(S_{j(i)}, S^i)$, которая лежит уже на стороне конуса $K(S_{j(i)})$, обращенной к отрезку $[S^i, S_{j(i)}]$. В этих случаях в силу пп. I, II полуинтервал прямой $L(S^i, p''(S^i, S_j))$ от S^i до встречи с множеством $\overline{K}^i_{j(i)}$, обозначим его через Δ^i $(S^i \notin \Delta^i)$, может быть включен в оптимальную траекторию. Пусть $p''(S_{j(i)}, S^m)$ — ближайшая к $S_{j(i)}$ точка $p''(S_{j(i)}, S^m)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что полуинтервал прямой $L(S_{j(i)}, p''(S_{j(i)}, S^m))$

от точки $S_{j(i)}$ до встречи с множеством $\overline{K}^i_{j(i)}$, обозначим его через $\Delta_{j(i)}$ ($S_{j(i)} \notin \Delta_{j(i)}$), может быть включен в оптимальную траекторию. Ясно, что отрезки Δ^i, $\Delta_{j(i)}$ имеют общий конец, обозначим его через v_i, при этом для него выполняется включение

$$v_i \in (bd\overline{K}^i_{j(i)}) \cap \mathcal{D}^i_{j(i)}. \tag{14}$$

Итак, двузвенную ломаную $\Delta^i \cup \Delta_{j(i)}$ (на рис. 2 она помечена точками) можно включить в оптимальную траекторию, оставляя величину $\rho(t, \mathbb{S})$, $t \in \mathcal{T}$, не меньше минимума (13).

В случае а) отрезок $[p(S^i, S_{j(i)}), v_i]$ (см. II$_1$, N$'$) может быть включен в траекторию $\mathcal{T}^*$. В случае б) весь отрезок $[p''(S_{j(i)}, S^i), S_{j(i)}]$ согласно п. II$_2$, N$''$ включается в $\mathcal{T}^*$.

Теперь предположим, что при заданном i ближайшая к S^i точка имеет вид $p'(S_j, S^i)$ или $p'(S^i, S_j)$ при некотором j. По аналогии с уже исследованным случаем следует рассматривать положение точек $p(S_j, S^i)$ на конусе $K(S_j)$ для разных i при фиксированном j.

Таким образом, все точки $p''(S^i, S_j)$ расположены на совокупности двузвенных ломаных вида $\Delta^i \cup \Delta_{j(i)}$ для тех i, при которых ближайшая к S^i точка $p(S^i, S_j)$ является $p''(S^i, S_j)$-точкой, и ломаных вида $\Delta_j \cup \Delta^{i(j)}$ для j, при которых ближайшая к S_j точка $p(S_j, S^i)$ является $p''(S_j, S^i)$-точкой. Как показано выше, точки $p'(S^i, S_{j(i)})$, $p'(S_{j(i)}, S^i)$ лежат на границе множества $\overline{K}^i_{j(i)}$, и аналогично проверяется, что точки $p'(S_j, S^{i(j)})$, $p'(S^{i(j)}, S_j)$ лежат на границе множества $\overline{K}^{i(j)}_j$. В случае а) с помощью дуг C' (см. N')) можно соединить множество $\mathcal{D}^{i-1}_{j(i)-1}$ и, значит, ввиду (14) и ломаную $\Delta^{i-1} \cup \Delta_{j(i)-1}$ с множеством $\mathcal{D}^i_{j(i)}$ и, значит, с ломаной $\Delta^i \cup \Delta_{j(i)}$. В случае б) отрезки Δ^i, Δ^{i-1} соединяются посредством отрезка, один конец которого $S_{j(i)}$, а другой — пересечение отрезка Δ^{i-1} с прямой $L(S_{j(i)}, p''(S_{j(i)}, S^i))$. Точка $p(S^i)$ (точка $p(S_j)$), см. п. I, может быть соединена отрезком границы Γ^l (границы Γ_r) с ближайшим слева отрезком $\Delta^{n(i)}$ (отрезком $\Delta_{m(j)}$).

Таким образом, построена траектория $\mathcal{T}^*$, составленная из прямолинейных отрезков, фрагментов границы Γ и дуг окружностей с соблюдением неравенства

$$\rho(S, \mathcal{T}^*) \geq \min\left\{M(S^i, S_j),\ M(S^i),\ M(S_j)\colon S^i \in \mathbb{S}^l,\ S_j \in \mathbb{S}_r\right\} \quad \forall\ S \in \mathbb{S}.$$

Аналогично строится траектория для группы правых пар. Задача построения траектории для двух соседних групп, одна из которых содержит левые пары, а другая правые, или для трех соседних групп, состоящих первая из левых пар, вторая из средних пар, третья из правых пар, сводится к задаче построения траектории для двух соседних пар — левой и правой, левой и средней, средней и правой, которая без труда решается методами, изложенными в п. II. Теорема установлена. □

На рис. 2 с целью экономии места используются следующие обозначения:
$p'(S^i, S_j) =' (i/j)$;
$p''(S^i, S_j) ='' (i/j), \quad p''(S_j, S^i) ='' (j\backslash i)$.

На правой стороне приведен увеличенный фрагмент общего изображения, обведенного окружностью.

Оптимальная траектория не обязана содержать все точки $p(S^i, S_j)$, $p(S^i)$, $p(S_j)$. Приведенная теорема позволяет упростить задачу построения оптимальной траектории из упомянутого выше набора составляющих частей: дуг окружностей, частей границы bdY, отрезков границ конусов $K(S)$ в том случае, когда задача на минимум (13) имеет большое число решений.

З а м е ч а н и е. Построенная траектория содержит участки возвратного движения. Актуальна задача поиска кратчайшей оптимальной траектории.

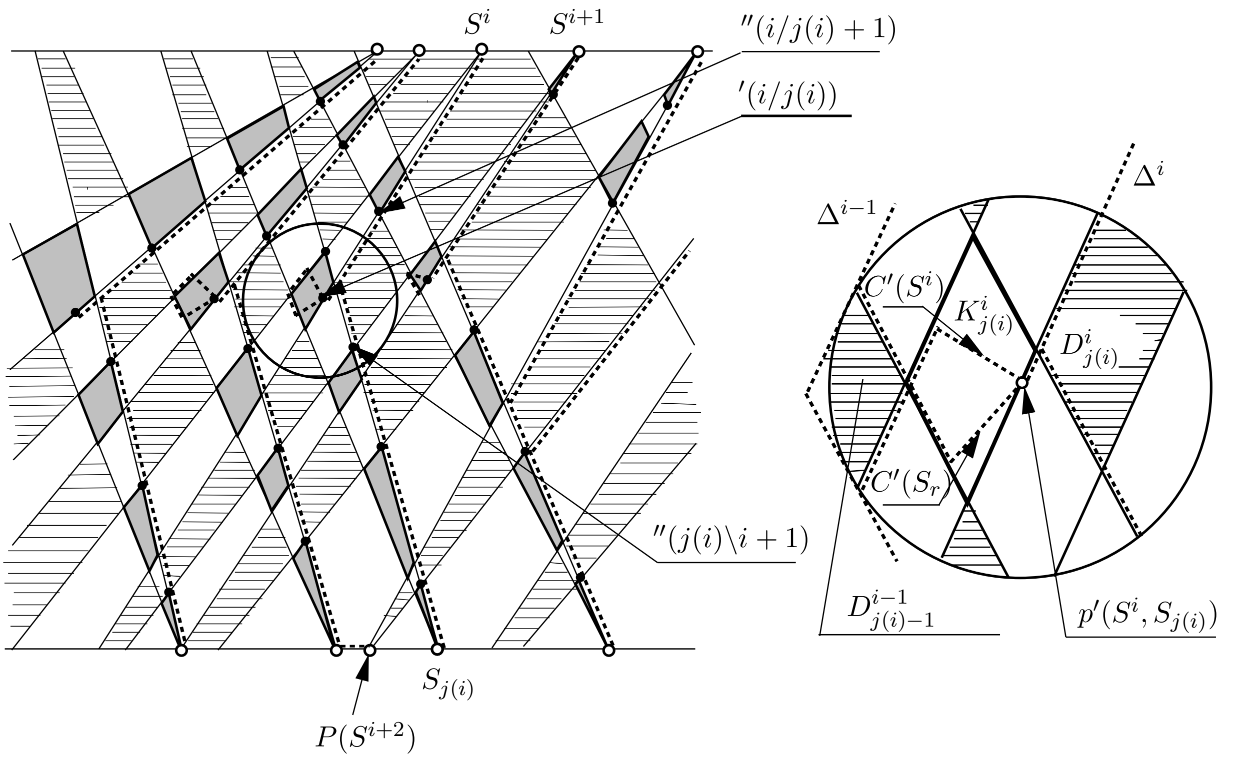

Рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И., Костоусов В.Б.** Экстремальные задачи планирования маршрута движущегося объекта в условиях наблюдения // Proc. of the 47th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. (Yekaterinburg. 2016.) P. 32–41. (CEUR Workshop Proceedings; vol.1662). URL: http://ceur-ws.org/Vol-1662/ .

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 15.09.2016

REFERENCES

1. **Berdyshev V.I. , V.B. Kostousov .** Extreme problems in planning the route of the moving object under observation. MPMA 2016: Proc. of the 47th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. *Ser. CEUR Workshop Proceedings, vol.1662*, 2016, pp. 32–41. Available at: http://ceur-ws.org/ (in Russian).

V.I. Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru .