ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 512.54

УСЛОВИЕ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ БЫТЬ ГРУППОЙ ШМИДТА

В. А. Белоногов

Пусть G — конечная группа и π — множество простых чисел такое, что $2 \in \pi$. В статье доказано, что если G имеет лишь π-замкнутые максимальные подгруппы, хотя сама не является π-замкнутой, то G есть группа Шмидта. В доказательстве используются более ранние результаты автора о свойствах пар (G, π), где G — простая минимальная не π-замкнутая группа при произвольном π.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, π-замкнутая группа, простая группа, максимальная подгруппа.

V. A. Belonogov. A condition for a finite group to be a Schmidt group.

Let G be a finite group G, and let π be a set of primes such that $2 \in \pi$. We prove that if all maximal subgroups of G are π-closed and G itself is not π-closed then G is a Schmidt group. The proof employs the author's earlier results on the properties of pairs (G, π) where G is a simple minimal non-π-closed group and π is arbitrary.

Keywords: finite group, Schmidt group, π-closed group, simple group, maximal subgroup.

MCS: 20E28, 20D06, 20D08
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-81-86

Введение

Одно из важных направлений в теории конечных групп составляют исследования групп G, все собственные подгруппы которых обладают некоторым теоретико-групповым свойством Σ, в то время как сама группа G свойством Σ не обладает. Такие группы G называют *минимальными не Σ-группами*, причем считается, что единичная группа не является минимальной не Σ-группой ни при каком Σ. Начало этому направлению положила работа 1903 г. Г. Миллера и Х. Морено [1], в которой определено строение конечных минимальных не абелевых групп. Эти группы называются *группами Миллера — Морено*. Второй очень важный шаг в этом направлении был сделан О. Ю. Шмидтом в работе 1924 г. [2], где получено описание конечных минимальных не нильпотентных групп. Такие группы называются в настоящее время *группами Шмидта*. Подгруппа группы G, являющаяся группой Шмидта, называется подгруппой Шмидта группы G. Результаты, связанные с наличием в группе и свойствами подгрупп Шмидта, очень широко используются в современной теории конечных групп. Отметим важную обзорную статью [3], а также более поздние работы [4–7], подчеркивающие актуальность рассматриваемой темы.

Используемая далее терминология стандартна и соответствует [8; 9].

Идея обобщения результата О. Ю. Шмидта путем рассмотрения вместо нильпотентных подгрупп подгрупп более сложного строения принадлежит С. А. Чунихину. Основополагающим исследованием в этом направлении является статья И. К. Чунихиной и С. А. Чунихина [10], в которой были изучены конечные минимальные не p-разложимые группы, где p — произвольное простое число. Напомним, что группа называется *p-разложимой*, если она является прямым произведением p-группы и группы, порядок которой не делится на p. Класс p-разложимых групп несравненно более широк, чем класс нильпотентных групп; любая конечная группа является подгруппой p-разложимой группы при подходящем p. Тем не менее в [10] установлен следующий замечательный и удивительный факт.

A1. *При любом простом p конечная минимальная не p-разложимая группа является группой Шмидта.*

Пусть далее π означает некоторое множество простых чисел и π' — его дополнение во множестве всех простых чисел; при этом неявно предполагается, что

(*a*) *ни одно из множеств π и π' не пусто*,

поскольку в противном случае рассматриваемые ниже минимальные не π-разложимые и минимальные не π-замкнутые группы не существуют. Естественным обобщением понятия p-разложимой группы является понятие *π-разложимой* (или *(π, π')-разложимой*) группы, т. е. группы, являющейся прямым произведением π-группы и π'-группы. Следующее, более общее, чем **A1**, утверждение, известное ранее среди специалистов по теории конечных групп как гипотеза С. А. Чунихина, было доказано (см. [11; 12]) гораздо позже утверждения **A1**, а именно лишь с использованием классификации конечных простых групп.

A2. *При любом множестве π простых чисел (со свойством (a)) конечная минимальная не π-разложимая группа является группой Шмидта.*

Попытаемся продолжить начатый ряд утверждений, рассмотрев естественное ослабление условия π-разложимости подгрупп, заменив его π-замкнутостью. *π-замкнутая* группа H есть полупрямое произведение $H = A \rightthreetimes B$, где A есть π-группа, а B — π'-группа. В частном случае, когда $\pi = p'$, т. е. когда π состоит из всех простых чисел, кроме заданного простого числа p, Нобору Ито [13] (см. также [8, теорема IV.5.4]) доказал следующий важный и снова удивительный результат.

A3. *При любом простом числе p конечная минимальная не p'-замкнутая группа является группой Шмидта.*

Используя индукцию по порядку группы, легко переформулировать это утверждение в виде следующего критерия p'-замкнутости группы: конечная группа p'-замкнута если и только если каждая ее подгруппа Шмидта p'-замкнута (т. е. в группе нет не p'-замкнутых подгрупп Шмидта). Отсюда легко вытекает известная теорема Фробениуса (см. [8, теорема IV.5.8] или [9, теорема 7.4.5]) о p'-замкнутости конечной группы (в других терминах,— о существовании в группе нормального p-дополнения).

Однако сохранить форму утверждения **A3** для любого множества π (вместо p') не удается, поскольку среди минимальных не π-замкнутых групп имеются (при некоторых π) простые группы. Исследованию таких простых групп и соответствующих π посвящены работы автора 2015 и 2016 гг. (итоговый результат сформулирован также в [14]). Одно из установленных там свойств таких множеств π (см. ниже второе предложение в **A4**) является решающим аргументом в доказательстве основного результата этой статьи, теоремы 1. Другой важный аргумент этого доказательства (см. первое предложение в **A4**) был доказан в [15, теорема 1′].

A4. *Если G — конечная минимальная не π-замкнутая группа, то либо $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, либо G — группа Шмидта. Если при этом сама группа G проста, то $2 \notin \pi$.*

Первое утверждение в **A4** влечет, в частности, следующий факт.

A5. *Конечная π-разрешимая (в частности, разрешимая) минимальная не π-замкнутая группа является группой Шмидта при любом заданном π.*

Главная цель настоящей статьи — доказать следующий результат в духе утверждений A1–A3 и A5. (Заметим, что в теоремах 1 и 2 не предполагается, что 2 делит порядок G.)

Теорема 1. *Пусть π — множество простых чисел и $2 \in \pi$. Тогда любая конечная минимальная не π-замкнутая группа является группой Шмидта.*

Отметим, что теорема 1 становится ложной при замене в ней числа 2 любым простым числом $p > 2$ из $\pi(G)$. Действительно, минимальной не $\{p\}$-замкнутой группой является группа $PSL_2(p)$ при любом простом $p > 3$ и группа $PSL_2(8)$ при $p = 3$.

Легко увидеть, что теорема 1 равносильна следующему критерию π-замкнутости конечной группы (при $2 \in \pi$).

Теорема 2. *Пусть π — множество простых чисел и $2 \in \pi$. Тогда конечная группа G является π-замкнутой если и только если каждая подгруппа Шмидта группы G π-замкнута (т. е. в G нет не π-замкнутых подгрупп Шмидта).*

Предположим, что верна теорема 1, и докажем теорему 2. Из π-замкнутости группы G, очевидно, следует π-замкнутость всех ее подгрупп, в том числе и подгрупп Шмидта. Если же, обратно, в G каждая подгруппа Шмидта π-замкнута, то, используя индукцию по порядку группы, заключаем, что в G любая максимальная подгруппа π-замкнута. Но тогда по теореме 1 группа G либо π-замкнута, либо является группой Шмидта. Но мы предположили, что в G каждая подгруппа Шмидта π-замкнута. Следовательно, G π-замкнута. $\square$

Далее, пусть верна теорема 2, и докажем теорему 1. Пусть G — минимальная не π-замкнутая группа, т. е. G не π-замкнута, но все ее собственные подгруппы π-замкнуты. По теореме 2 группа G, будучи не π-замкнутой, имеет не π-замкнутую подгруппу Шмидта S. Но так как в G каждая собственная подгруппа π-замкнута, то $S = G$ и, значит, G — группа Шмидта.

В случае, когда $\pi = \{2\}$, теоремы 1 и 2 получены В. С. Монаховым [4, лемма 3.1, следствие 3.1.1].

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [16].

1. Доказательство теоремы 1

Предложение 1. Пусть G — конечная минимальная не π-замкнутая группа для некоторого множества π простых чисел и N — нормальная подгруппа из G, лежащая в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G. Тогда фактор-группа G/N также есть минимальная не π-замкнутая группа.

Доказательство. Далее для упрощения формулировок тот факт, что группа H есть минимальная не π-замкнутая группа, мы будем записывать в виде $(H, \pi) \in (*)$. Таким образом, по условию $(G, \pi) \in (*)$, и нужно доказать, что $(G/N, \pi) \in (*)$. Это заключение мы получим из следующих утверждений **B1–B4**.

B1. Если N — π-подгруппа, то $(G/N, \pi) \in (*)$.

Действительно, по условию G не π-замкнута, но любая ее максимальная подгруппа M π-замкнута. Примем $\overline{G} = G/N$ и предположим, что $(\overline{G}, \pi) \notin (*)$. Тогда, очевидно, группа $\overline{G} = G/N$ сама π-замкнута (так как образы в $\overline{G}$ всех максимальных подгрупп группы G π-замкнуты), т. е. $\overline{G} = \overline{H} \rtimes \overline{K}$, где $\overline{H} = H/N$ — π-группа с $H \trianglelefteq G$ и $\overline{K} = K/N$ — π'-группа с $K \leq G$. Так как N — π-группа, то из предыдущих равенств следует, что H — π-группа и согласно теореме Цассенхауза [8, теорема I.18.1] $K = N \rtimes K_1$, где K_1 — π'-группа. Но тогда $G = HK = (HN) \rtimes K_1 = H \rtimes K_1$ π-замкнута, что противоречит условию. Утверждение **B1** доказано.

B2. Если N — π'-подгруппа, то $(G/N, \pi) \in (*)$.

Действительно, положим $\overline{G} := G/N$. По условию

(a) G не π-замкнута и

(b) M π-замкнута для любой максимальной подгруппы M группы G.

Мы должны доказать, что

($\overline{a}$) $\overline{G}$ не π-замкнута и

($\overline{b}$) $\overline{M}$ π-замкнута для любой максимальной подгруппы $\overline{M}$ группы $\overline{G}$.

Очевидно, условие ($\overline{b}$) следует из (b), так как $\overline{M} = M/N$ для некоторой максимальной подгруппы M из G, а фактор-группы π-замкнутых групп π-замкнуты.

Остается доказать условие ($\overline{a}$). Предположим, от противного, что $\overline{G}$ π-замкнута. Тогда $\overline{G} = \overline{A} \rtimes \overline{B}$, где $\overline{A} = A/N$ — π-группа с $A \trianglelefteq G$ и $\overline{B} = B/N$ с $B \leq G$; здесь $\overline{B}$, а следовательно и

B — π'-группа. Отсюда N — π'-холлова подгруппа в A и по теореме Шура — Цассенхауза (см. [8, теорема I.18.1] или [9, теорема 6.2.1]) $A = N \leftthreetimes A_1$, где A_1 — π-группа, $G = AB$, $N = A \cap B$ и A_1 — π-холлова подгруппа в G.

Таким образом, группа G имеет нормальный ряд $G = BA \trianglerighteq A \trianglerighteq N \trianglerighteq 1$, индексы которого являются π- или π'-числами, т. е. группа G π-обособлена. Отсюда и из теоремы Фейта — Томпсона [17] следует, что G π-разрешима или π'-разрешима. Но тогда согласно теореме Холла — Чунихина [8, теорема VI.1.7, пп. a)–c)] G имеет точно по одному классу сопряженных π-холловых и π'-холловых подгрупп. Подобно, любая π-холлова подгруппа из A должна быть сопряжена в A с ее π-холловой подгруппой A_1. Следовательно, для любого $g \in G$ подгруппа A_1^g, будучи π-холловой в A, сопряжена в A с A_1. Таким образом, для любого $g \in G$ существует элемент $a \in A$ такой, что $A_1^g = A_1^a$, и, значит, $g \in aN_G(A_1) \subseteq AN_G(A_1)$. Поэтому $G = AN_G(A_1) = NA_1N_G(A_1) = NN_G(A_1) = \Phi(G)N_G(A_1) = N_G(A_1)$, т. е. $A_1 \trianglelefteq G$. Но теперь G оказывается π-замкнутой, а это противоречит условию (a). Итак, верны условия ($\overline{a}$) и ($\overline{b}$).

Утверждение **B2** доказано.

Мы можем завершить доказательство предложения 1, доказав, что $(G/N, \pi) \in (*)$ без дополнительных ограничений на N. Поскольку подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна (см., например, [8, теорема III.3.6]) и по условию $N \leq \Phi(G)$, то N можно представить в виде $N = N_\pi \times N_{\pi'}$, где N_π есть π-группа, а $N_{\pi'}$ — π'-группа, причем подгруппы N_π и $N_{\pi'}$ нормальны в G. Очевидно, $G/N \cong (G/N_\pi)/(N/N_\pi)$. По **B1** $G/N_\pi \in (*)$. Далее, так как N/N_π является π'-группой и, очевидно, содержится в $\Phi(G/N_\pi)$, то согласно **B2** $((G/N_\pi)/(N/N_\pi), \pi) \in (*)$, а следовательно, и $(G/N, \pi) \in (*)$.

Предложение 1 доказано.

Из предложения 1 и первого утверждения в **A4** непосредственно вытекает следующее уточнение этого утверждения.

Предложение 2. *Пусть G — конечная минимальная не π-замкнутая группа, где π — множество простых чисел. Тогда либо $G/\Phi(G)$ — простая минимальная не π-замкнутая группа, либо G — группа Шмидта.*

Теперь, используя эти результаты, мы докажем теорему 1. Пусть G — конечная минимальная не π-замкнутая группа и $2 \in \pi$. Предположим, что G не является группой Шмидта. Тогда согласно предложению 2 $G/\Phi(G)$ есть простая минимальная не π-замкнутая группа, а по второму утверждению в **A4** (с $G/\Phi(G)$ в роли G) должно быть $2 \notin \pi$. Но это противоречит нашему предположению. Следовательно, G — группа Шмидта.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miller G.A., Moreno H.** Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. No. 4. P. 398–404.
2. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, №. 3–4. С. 366–372.
3. **Шеметков Л.А.** О. Ю. Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 586–590.
4. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Т. 13. С. 153–171.
5. **Княгина В.Н., Монахов В.С.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
6. **Луценко Ю.В., Скиба А.Н.** Строение групп Шмидта и групп Белоногова, в которых любые две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными // Вестн. Витеб. гос. ун-та. Математика. 2009. № 2 (52). С. 134–138.
7. **Тютянов В.Н.** Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта // Проблемы физики, математики и техники. 2015. Т. 22, № 1. С. 88–91.
8. **Huppert B.** Endliche gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.

9. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper & Row, 1968. 527 p.
10. **Чунихина И.К., Чунихин С.А.** О p-разложимых группах // Мат. сб. 1944. Т. 15, № 2. С. 325–342.
11. **Arad Z., Chillag D.** A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. Vol. 87, no. 2. P. 472–482.
12. **Белоногов В.А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
13. **Itô N.** Note on (LM)-groups of finite orders // Kōdai Math. Sem. 1951.Vol. 3, no. 1–2. P. 1–6.
14. **Belonogov V.A.** On finite minimal non-π-closed groups // Abstracts of the Internat. Conf. and PhD-Master Summer School "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries"/ Sobolev Inst. Math. Novosibirsk, 2016. P. 47.
15. **Белоногов В.А.** О конечных группах, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты // Междунар. шк.-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В. В. Кабанова: сб. ст. / Кабард.-Балкар. гос. ун-т. Нальчик, 2014. С. 6–9.
16. **Belonogov V.A.** Some conditions for a finite group to be a Schmidt group // XI шк.-конф. по теории групп: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского. Красноярск, 2016. С. 66–67.
17. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13. P. 755–1029.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 31.05.2016

REFERENCES

1. Miller G.A., Moreno H. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1903, no. 4, pp. 398–404.
2. Schmidt O.Yu. Groups whose all subgroups are special. *Mat. Sb.*, 1924., vol. 31, no. (3-4), pp. 366–372 (in Russian).
3. Shemetkov L.A. O. Yu. Shmidt and finite groups. *Ukr. Math. J.*, 1971, vol. 23, no. 5, pp. 482–486.
4. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Voprosy Algebry*, 1998, vol. 13, pp. 153–171 (in Russian).
5. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with subnormal Schmidt subgroups. *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, pp. 1075–1079.
6. Lutsenko Yu.V., Skiba A.N. The structure of Schmidt and Belonogov groups, in which every two 3-maximal subgroups are $F(G)$-permutable. *Vest. Vitebsk. Gos. Univ. Matematika*, 2009, № 2 (52), pp. 134–138 (in Russian).
7. Tyutyanov V.N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Schmidt subgroups. *Probl. Phys. Matem. Tekhn.*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 88–91 (in Russian).
8. Huppert B. *Endliche gruppen* I. Berlin: Springer, 1967, 793 S.
9. Gorenstein D. *Finite groups.* New York: Harper & Row, 1968, 527 p.
10. Chunikhin, I.K., Chunikhin, S.A. On p-decomposable groups. *Mat. Sb.*, 1944, vol. 15, no. 2, p. 325–342 (in Russian).
11. Arad Z., Chillag D. A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups. *J. Algebra*, 1984, vol. 87, no. 2, pp. 472–482.
12. Belonogov V.A. On control of the prime spectrum of a finite simple group. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 285, suppl. 1, pp. S25–S41.
13. Itô N. Note on (LM)-groups of finite orders. *Kōdai Math. Sem.*, 1951, vol. 3, no. 1-2, pp. 1–6.
14. Belonogov V.A. On finite minimal non-π-closed groups. *Abstr. of the Internat. Conf. and PhD-Master Summer School "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries" (Sobolev Inst. Math., 2016)*, Novosibirsk, 2016, p. 47.

15. Belonogov V.A. On finite groups in which all maximal subgroups are π-closed. *Internat. School-Conf. on Group Theory*: *Collection of Articles, devoted to the 70th anniversary of V. V. Kabanov* (*Kabard.-Balkar. State Univ., 2014*), Nalchik, 2014, pp. 6–9 (in Russian).
16. Belonogov V.A. Some conditions for a finite group to be a Schmidt group. *XI School-Conf. on Group Theory*: *Abstr. of the XI Internat. School-Conf. on Group Theory, dedicated to the 70th anniversary of A. Yu. Olshanskii.* Krasnoyarsk, 2016, pp. 66–67 (in Russian).
17. Feit W., Thompson J.G. Solvability of groups of odd order. *Pacific J. Math.*, 1963, vol. 13, pp. 755–1029.

V. A. Belonogov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: belonogov@imm.uran.ru .