ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.95

L_p-ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА m-МЕРНОМ ТОРЕ[1]

Д. Б. Базарханов

В работе устанавливается L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов с символами, негладкими по пространственной переменной, на m-мерном торе при $1 \le p \le \infty$.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, символ, ограниченный оператор, m-мерный тор.

D. B. Bazarkhanov. The L_p-boundedness of some classes of pseudo-differential operators on the m-dimensional torus.

We prove that certain classes of pseudo-differential operators with symbols that are nonsmooth in the spatial variable are L_p-bounded on the m-dimensional torus for $1 \le p \le \infty$.

Keywords: pseudo-differential operator, symbol, bounded operator, m-dimensional torus.

MSC: 58J40, 35S05, 42B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-64-80

1. Введение

Псевдодифференциальные операторы (пдо), т. е. операторы, допускающие представление

$$T_a u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi, \qquad (1.1)$$

играют важную роль в теории общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами (см., например, [1; 2]) в гармоническом анализе (см., например, [3, ch. 6–8]).

Обычно предполагается, что символ $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ оператора T_a является гладким, как по пространственной переменной x, так и по частотной переменной ξ, и удовлетворяет некоторым условиям роста (убывания). Так, класс $S^{\tau}_{\varrho\delta} = S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ $(\tau \in \mathbb{R}; 0 \le \delta, \varrho \le 1)$ был введен Л. Хёрмандером [4] в связи с исследованием гипоэллиптических уравнений: $a \in S^{\tau}_{\varrho\delta}$, если $a(x,\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m \ \ \exists\, c_{\alpha\beta} > 0 :$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le c_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{\tau - \varrho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m. \qquad (1.2)$$

Для $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{N}$ обозначим через $S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ совокупность всех символов $a(x,\xi)$, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам (1.2) при $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$, $|\alpha| \le \mathrm{A}$, $|\beta| \le \mathrm{B}$.

Здесь и ниже используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \in \mathbb{N})$. Для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| := |x|_2 = \sqrt{xx}$, $\langle x\rangle = \sqrt{1 + xx}$; $x \le y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\kappa \le y_\kappa$ $(x_\kappa < y_\kappa)$ для всех $\kappa \in \mathrm{z}_m$. Далее, $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 5130/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ — преобразование Фурье для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Далее для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{N}_0^m$, используем стандартные мультииндексные обозначения:

$$\partial^\alpha f(x) (\equiv \partial_x^\alpha f(x)) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m} f(x), \quad \text{где} \quad \partial_\kappa = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}, \quad \kappa \in \mathrm{z}_m;$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!; \quad \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \quad (\gamma \leq \alpha).$$

Пусть, далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т. е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т. е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

Пусть $L_p^{(\mathtt{i})} = L_p(\mathbb{I}^m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, со стандартной нормой; здесь $(\mathtt{i}, \mathbb{I}) \in \{(\mathtt{r}, \mathbb{R}), (\mathtt{t}, \mathbb{T})\}$. Таким образом, $L_p^{(\mathtt{r})} = L_p(\mathbb{R}^m)$, $L_p^{(\mathtt{t})} = L_p(\mathbb{T}^m)$.

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ $(\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ и $g \in L_1(\mathbb{T}^m)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m))$ имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^m} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Исследование ограниченности (классов) пдо между различными нормированными пространствами функций и распределений — одна из важных задач теории.

Л. Хёрмандер [4; 5] показал, что для ограниченности на $L_2(\mathbb{R}^m)$ (всех) операторов T_a с символами $a \in S^\tau_{\varrho\delta}$ необходимо, а при условии $\delta < \varrho$ и достаточно, чтобы $\tau \leq \min\Big\{0, \dfrac{m}{2} \times (\varrho - \delta)\Big\}$. А. Кальдерон и Р. Вайянкур [6] установили достаточность этого условия при $\delta = \varrho < 1$ для символов из класса $S^\tau_{\varrho\varrho}\Big(2\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 2, 2\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 2\Big)$, где $\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$. Позднее Р. Койфман и И. Мейер [7] доказали, что условия $\tau \leq 0, \delta \leq \varrho, \delta < 1$ гарантируют L_2-ограниченность операторов T_a при минимальных условиях регулярности на символ: $a \in S^\tau_{\varrho\delta}\Big(\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1, \Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1\Big)$. Наконец, в работе [8] в части достаточности снято условие $\delta \leq \varrho$: если $a \in S^\tau_{\varrho\delta}\Big(\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1, \Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1\Big)$ с $0 \leq \delta, \varrho \leq 1, \delta < 1$, $\tau \leq \min\Big\{0, \dfrac{m}{2}(\varrho - \delta)\Big\}$, то T_a ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$. Случай $\delta = 1$ является исключительным: в [9] построен пример символа $a \in S^0_{11}$, для которого оператор T_a не является ограниченным на $L_2(\mathbb{R}^m)$, а в [10] доказано, что все пдо T_a с символами из $S^\tau_{\varrho 1}$ ограничены на $L_2(\mathbb{R}^m)$ тогда и только тогда, когда $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho - 1)$; в частности, построен символ $a \in S^{\frac{m}{2}(\varrho-1)}_{\varrho 1}$ такой, что пдо T_a не ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Далее, пусть $1 < p < \infty$, $0 \leq \delta \leq \varrho \leq 1, \delta < 1$; тогда для ограниченности пдо T_a на $L_p(\mathbb{R}^m)$ для всех $a \in S^\tau_{\varrho 1}$ необходимо (Л. Хёрмандер [4]) и достаточно (Ч. Фефферман [11]), чтобы выполнялось условие $\tau \leq m(\varrho - 1)\Big|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\Big|$. Между тем М. Нагасэ [12] показал, что если выполняются условия (с $0 < \sigma \leq 1$ и $0 \leq \tau < 1$) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, $|\alpha| \leq m+1$, $\exists c_\alpha > 0$:

$$|\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq c_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}, \quad |\partial_\xi^\alpha a(x, \xi) - \partial_\xi^\alpha a(y, \xi)| \leq c_\alpha |x - y|^\sigma \langle\xi\rangle^{-|\alpha| + \sigma\tau},$$

то оператор T_a ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, для L_2-ограниченности оператора T_a достаточно, грубо говоря, конечной гладкости (порядка $m + 1$) по частотной переменной и лишь гельдеровости по пространственной переменной производных $\partial_\xi^\alpha a(x\,,\,\xi)$ $\forall \alpha : |\alpha| \leq m+1$.

В дальнейшем эти результаты получили мощное развитие, в частности, в направлении L_p-ограниченности пдо T_a с нерегулярными по пространственной переменной символами a.

Подробности см., например, в [1–3; 7]. Здесь отметим только два важных для дальнейшего изложения результата Р. Койфмана и И. Мейера [7] и К. Кенига и В. Стаубаха [13].

Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная, возрастающая, выпуклая (на $[0,1]$) функция с $\omega(0) = 0$. Обозначим через $\Sigma_\omega^{(\mathtt{r})} = \Sigma_\omega(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ пространство символов $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ таких, что $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $|\alpha| \le m+1$, $\exists\, c_\alpha > 0$:

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}, \quad |\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(y,\xi)| \le c_\alpha \omega(|x-y|)\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \ \ ((x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m).$$

Теорема A [7]. *Следующие условия на функцию ω эквивалентны:*

i) *ω^2 удовлетворяет условию Дини:* $\displaystyle\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < +\infty$;

ii) *для любого $a \in \Sigma_\omega^{(\mathtt{r})}$ пдо T_a ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$;*

iii) *для любого $a \in \Sigma_\omega^{(\mathtt{r})}$ пдо T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 < p < \infty$.*

Далее, пусть $\tau \in \mathbb{R}$, $0 \le \varrho \le 1$. Класс символов $L_\infty^{(\mathtt{r})} S_\varrho^\tau = L_\infty S_\varrho^\tau(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ состоит из всех функций $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^m)$, измеримых по x, таких, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^m\ \exists\, c_\alpha > 0$:

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\,\cdot\,,\xi) \mid L_\infty(\mathbb{R}^m)\| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

В работе [13] (см. там предложения 2.3, 2.5 и теорему 2.7) доказана следующая

Теорема B. *Предположим, что $1 \le p \le \infty$; $0 \le \varrho \le 1$ и $\tau \in \mathbb{R}$ такие, что $\tau p_* < m(\varrho-1)$; здесь $p_* = \min\{p,2\}$. Пусть $a(x,\xi) \in L_\infty^{(\mathtt{r})} S_\varrho^\tau$. Тогда оператор T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$. В частности, при $\tau < 0$ и $a(x,\xi) \in L_\infty^{(\mathtt{r})} S_1^\tau$ оператор T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$ для всех $1 \le p \le \infty$.*

Как легко видеть из доказательства (и как отмечают сами авторы), теорема B справедлива для символов $a(x,\xi)$ конечной гладкости по частотной переменной ξ. Кроме того, с одной стороны, теорема B существенно ослабляет (в части достаточности) условия ограниченности пдо в $L_2(\mathbb{R}^m)$ из [10], с другой — результат из [10] (в части необходимости) влечет точность условия $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho - 1)$ в теореме B при $p = 2$.

Цель настоящей работы — развить теоремы A и B на случай периодических пдо с символами, которые являются негладкими по пространственной переменной и имеют достаточно малую гладкость по частотной переменной. Рассмотрим периодический символ $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ и соответствующий ему формальный псевдодифференциальный оператор

$$T_a \colon u(x) \mapsto T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i \xi x}. \tag{1.3}$$

Периодический аналог $S_{\varrho\delta}^{\tau(\mathtt{t})} = S_{\varrho\delta}^\tau(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ ($\tau \in \mathbb{R}; 0 \le \delta, \varrho \le 1$) класса Хёрмандера состоит из всех символов $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ таких, что $a(\,\cdot\,,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ для всех $\xi \in \mathbb{Z}^m$, а также $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m\ \ \exists\, c_{\alpha\beta} > 0$:

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le c_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m, \tag{1.4}$$

(здесь Δ_ξ^α — оператор конечной разности порядка α с шагом 1 по каждой из координат частотной переменной ξ; см. разд. 2.1). Теория периодических пдо T_a с символами из классов $S_{\varrho\delta}^\tau(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ и их вариантов конечной гладкости в последнее десятилетие привлекла большое внимание, в частности, исследованию ограниченности (в особенности L_p-ограниченности) посвящено много работ, см., например, [14, ch. 4; 15–17] и приведенную там библиографию. Более подробно мы остановимся на результатах, тесно связанных с теоремой 1, в комментариях к ней. В работе изучаются следующие классы символов.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $1 \le p \le \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varrho \in [0,1]$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда периодический символ $a(x,\xi)$ принадлежит классу $L_p^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s) \equiv L_p S_\varrho^\tau(s)(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, если для него конечна величина

$$\|\, a \,|\, L_p^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s)\,\| \equiv \max_{\alpha : |\alpha| \le s} \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \langle\xi\rangle^{\varrho|\alpha|-\tau} \|\, \Delta_\xi^\alpha a(\,\cdot\,,\,\xi) \,|\, L_p(\mathbb{T}^m)\,\|.$$

Пусть $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})} = \Sigma_\omega(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ — класс символов $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$, которые являются сужениями на $\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$ символов $a^{(\mathtt{r})} \in \Sigma_\omega^{(\mathtt{r})}$ таких, что $\forall \xi \in \mathbb{Z}^m$ функция $a^{(\mathtt{r})}(x,\xi)$ является периодической по пространственной переменной x.

2. Достаточные условия непрерывности пдо T_a на $L_p(\mathbb{T}^m)$

Всюду ниже $\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $p_* = \min\{p, 2\}$, если $1 \le p \le \infty$; $k = \left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 1$; $s(m) = 2k$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Предположим, что $1 \le p \le \infty$, $\varrho \in [0,1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ такое, что $\tau p_* < m(\varrho - 1)$. Пусть $a \in L_\infty^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s(m))$. Тогда пдо T_a — ограниченный оператор из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_p(\mathbb{T}^m)$.*

2.1. Подготовительные конструкции

Для функций $b\,, d : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ и мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ напомним формулы (кратных) разностей порядка α (соответственно "вперед" и "назад")

$$\Delta^\alpha b\,(\xi) \equiv \Delta_\xi^\alpha\, b\,(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^m :\, \gamma \le \alpha} (-1)^{|\alpha - \gamma|} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot b\,(\xi + \gamma),$$

$$\overline{\Delta}^\alpha b\,(\xi) \equiv \overline{\Delta}_\xi^\alpha\, b\,(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^m :\, \gamma \le \alpha} (-1)^{|\gamma|} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot b\,(\xi - \gamma),$$

а также формулу Лейбница

$$\Delta^\alpha (b\,(\xi)\, d\,(\xi)) \equiv \Delta_\xi^\alpha (b\,(\xi)\, d\,(\xi)) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^m :\, \gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot \Delta^\gamma\, b\,(\xi) \cdot \overline{\Delta}^{\alpha - \gamma}\, d\,(\xi + \gamma) \tag{2.1}$$

и формулу суммирования по частям

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} b\,(\xi) \cdot \Delta^\alpha\, d\,(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \overline{\Delta}^\alpha\, b\,(\xi) \cdot d\,(\xi), \tag{2.2}$$

которые понадобятся в дальнейшем.

Для произвольного символа $a\colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ построим его (стандартное) "продолжение" $a^{\mathtt{r}}\colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ следующим образом. Выберем функции $\varphi, \phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^m)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset (-1,1)^m$;

(ii) $\sum_{\xi^\nu \in \mathbb{Z}^{m^\nu}} \widehat{\varphi}(x + \xi) \equiv 1$ на $\mathbb{R}^m$;

(iii) $\varphi(\xi) = \delta_{0\,\xi}, 0, \xi \in \mathbb{R}^m$ $(\delta_{\xi\,\zeta}$ — символ Кронекера; $\xi, \zeta \in \mathbb{Z}^m)$;

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}^m$ имеем $\partial^\alpha \varphi(\xi) = \overline{\Delta}^\alpha \phi_\alpha$. (Существование таких пробных функций φ, ϕ_α нетрудно доказать, отправляясь от одномерного случая; подробнее см., например, [14, Lemma 4.5.1]). Тогда функция

$$a^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \varphi(\xi - \zeta) a(x,\zeta), \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{T}^m, \tag{2.3}$$

очевидно, будет продолжением символа a, т.е. $a^{\mathtt{r}}(x,\xi) \equiv a(x,\xi)$, $(x,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$.

Рассмотрим периодический пдо с символом $a(x,\xi)$: $T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x,\xi) \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$. Элементарные преобразования дают представление T_a в виде интегрального оператора

$$T_a u(x) = \int_{\mathbb{T}^m} K_a(x, x - y)\, u(y) dy \tag{2.4}$$

с ядром Шварца

$$K_a(x,x-y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}a(x,\xi)e^{2\pi i\xi(x-y)}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь (непериодическое) ядро Шварца, отвечающее символу $a^{\mathtt{r}}(x,\xi)$,

$$K_a^{\mathtt{r}}(x,x-y)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}a^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi(x-y)}d\xi. \tag{2.6}$$

Снова простые преобразования устанавливают связь между ядрами $K_a(x,y)$ и $K_a^{\mathtt{r}}(x,y)$:

$$K_a^{\mathtt{r}}(x,y)=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(\xi-\zeta)a(x,\zeta)e^{2\pi i\xi y}d\xi=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)e^{2\pi i\zeta y}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(\xi-\zeta)e^{2\pi i(\xi-\zeta)y}d\xi=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)e^{2\pi i\zeta y}\widehat{\varphi}(-y)=K_a(x,y)\widehat{\varphi}(-y),$$

кроме того,

$$T_a^{\mathtt{r}}u(x)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^m}K_a^{\mathtt{r}}(x,x-y)u(y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^m}K_a(x,x-y)$$

$$\times\,\widehat{\varphi}(y-x)u(y)dy=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{[0,1]^m+\xi}K_a(x,x-y)\widehat{\varphi}(y-x)u(y)dy$$

$$=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y-\xi)\widehat{\varphi}(y-x+\xi)u(y+\xi)dy$$

$$=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y)\widehat{\varphi}(y-x+\xi)u(y)dy=\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y)$$

$$\times\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\varphi}(y-x+\xi)u(y)dy=\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y)u(y)dy=T_au(x). \tag{2.7}$$

В доказательстве теоремы 1 нам понадобится специальное разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Выберем функцию $\eta_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ таким образом, что $0\le\eta_0(\xi)\le 1$, $\xi\in\mathbb{R}^m$, $\eta_0(\xi)=1$, если $|\xi|\le 1$, $\eta_0(\xi)=0$, если $|\xi|\ge 3/2$. Положим $\eta(\xi)\equiv\eta_0(2^{-1}\xi)-\eta_0(\xi)$ и $\eta_j(\xi)\equiv\eta(2^{-j+1}\xi)$, $j\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\{\,\eta_j(\xi),\quad j\in\mathbb{N}_0\,\} \tag{2.8}$$

— гладкое разбиение единицы (по сферическим слоям) на $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим (m-мерный) оператор Лапласа (применяемый по переменной ξ)

$$\Delta=\Delta_\xi=\frac{1}{4\pi^2}(\partial_1^2+\ldots+\partial_m^2).$$

Формальные преобразования, включающие интегрирование по частям и запись k-й итерации $(1-\Delta_\xi)^k$ оператора $1-\Delta_\xi$ в виде $\sum_{|\alpha|\le 2k}c(\alpha;k)\partial_\xi{}^\alpha$, дают ($k\in\mathbb{N}$)

$$K_a^{\mathtt{r}}(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}a^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi y}d\xi=\langle y\rangle^{-2k}\int\limits_{\mathbb{R}^m}a^{\mathtt{r}}(x,\xi)(1-\Delta_\xi)^k e^{2\pi i\xi y}d\xi$$

$$=\langle y\rangle^{-2k}\int\limits_{\mathbb{R}^m}e^{2\pi i\xi y}(1-\Delta_\xi)^k a^{\mathtt{r}}(x,\xi)d\xi=\langle y\rangle^{-2k}\sum_{|\alpha|\le 2k}c(\alpha;k)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\partial_\xi{}^\alpha a^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi y}d\xi. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.3) и свойства функции φ и используя формулу суммирования по частям (2.2), подробнее выпишем представление производной символа-продолжения:

$$\partial_\xi{}^\alpha a^{\mathtt{r}}(x,\xi)=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)\partial_\xi{}^\alpha\varphi^{(m}(\xi-\zeta)=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)\overline{\Delta}_\xi{}^\alpha\phi_\alpha(\xi-\zeta)=(-1)^{|\alpha|}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\phi_\alpha(\xi-\zeta)\Delta_\zeta{}^\alpha a(x,\zeta). \tag{2.10}$$

2.2. Доказательство теоремы 1

Пусть a — произвольный символ из класса $L_\infty^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s(m))$. Фиксируем гладкое разбиение единицы $\eta = \{\,\eta_j(\xi) \mid \; j \in \mathbb{N}_0\}$ (см. (2.8)) и представим символ a в следующем виде:

$$a(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi), \quad a_j(x,\xi) = a(x,\xi)\eta_j(\xi) \;\; (j \in \mathbb{N}_0).$$

Обозначим операторы и ядра Шварца, соответствующие символу a_j (см. (2.4)–(2.6)), через $T_j, K_j, K_j^{\mathtt{r}}$, а $a_j^{\mathtt{r}}$ — его стандартное продолжение (2.3). В силу (2.10) имеем $\forall\, \alpha \; : |\alpha| \le 2k$

$$\partial_\xi^\alpha a_j^{\mathtt{r}}(x,\xi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \phi_\alpha(\xi-\zeta)\Delta_\zeta^\alpha a_j(x,\zeta). \tag{2.11}$$

Далее, по формуле Лейбница (2.1)

$$\Delta_\zeta^\alpha a_j(x,\zeta) = \sum_{\gamma \le \alpha} \tbinom{\alpha}{\gamma} \Delta_\zeta^\gamma a(x,\zeta) \overline{\Delta}_\zeta^{\alpha-\gamma} \eta_j(\zeta+\gamma). \tag{2.12}$$

Из определения 1.1 вытекает оценка ($(x,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$)

$$|\Delta_\zeta^\gamma a(x,\zeta)| \le \|a \,|\, L_\infty^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s(m))\| \langle \zeta \rangle^{\tau - \varrho|\gamma|}; \tag{2.13}$$

далее ради краткости пишем $\|a\|$ вместо $\|a \,|\, L_\infty^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s(m))\|$. По теореме о среднем в виду свойств разбиения единицы η следует, что $\exists\, c_{\alpha-\gamma} = c_{\alpha-\gamma}(m;\eta) > 0, \exists\, \mathrm{R} = \mathrm{R}(m,\eta) > 1, \exists\, \mathrm{r} = \mathrm{r}(m,\eta) \in (0,1)$ такие, что

$$|\overline{\Delta}_\zeta^{\alpha-\gamma} \eta_j(\zeta+\gamma)| \le c_{\alpha-\gamma} 2^{-j|\alpha-\gamma|} \mathtt{I}_{\square^j}(\zeta); \tag{2.14}$$

здесь $\mathtt{I}_A(\cdot)$ — индикатор множества A,

$$\square^j = \{\zeta \in \mathbb{R}^m \colon |\zeta| \le \mathrm{R}\; 2^j\}, \quad j = 0, 1, \dots, J(m,\eta),$$

$$\square^j = \{\zeta \in \mathbb{R}^m \colon \mathrm{r}\; 2^j \le |\zeta| \le \mathrm{R}\; 2^j\}, \quad j = J(m,\eta)+1, \quad J(m,\eta)+2, \dots.$$

Подставляя оценки (2.13) и (2.14) в (2.12), получим

$$|\Delta_\zeta^\alpha a_j(x,\zeta)| \le \|a\| \mathtt{I}_{\square^j}(\zeta) \sum_{\gamma \le \alpha} c_{\alpha-\gamma} \langle \zeta \rangle^{\tau - \varrho|\gamma|} 2^{-j|\alpha-\gamma|}.$$

Так как $\phi_\alpha \in S(\mathbb{R}^m), \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, то $\forall \mathrm{M} > 0$ найдется постоянная $\mathrm{C}(\mathrm{M};\varphi) > 0$ такая, что $|\phi_\alpha(\xi)| \le \mathrm{C}(\mathrm{M};\varphi)\langle \xi \rangle^{-\mathrm{M}}$ $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^m$ $\forall\, \alpha : |\alpha| \le 2k$. Из этих оценок и из (2.11) следует, что

$$|\partial_\xi^\alpha a_j^{\mathtt{r}}(x,\xi)| \le \mathrm{C}(\mathrm{M};\varphi)\|a\| \sum_{\gamma \le \alpha} c_{\alpha-\gamma} 2^{-j|\alpha-\gamma|} \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \frac{\langle \zeta \rangle^{\tau-\varrho|\gamma|} \mathtt{I}_{\square^j}(\zeta)}{\langle \xi - \zeta \rangle^{\mathrm{M}}} \le \mathrm{C}(\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|$$

$$\times \sum_{\gamma \le \alpha} 2^{-j|\alpha|+j|\gamma|} 2^{j(\tau-\varrho|\gamma|)} \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \frac{\mathtt{I}_{\square^j}(\zeta)}{\langle \xi-\zeta \rangle^{\mathrm{M}}} \le \mathrm{C}(\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\| 2^{j(\tau-\varrho|\alpha|)} \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \frac{\mathtt{I}_{\square^j}(\zeta)}{\langle \xi-\zeta \rangle^{\mathrm{M}}}, \tag{2.15}$$

на последнем шаге использовано условие $\varrho \le 1$.

Здесь и далее $\mathrm{C}(\dots)$, $\mathrm{C}^*(\dots)$, $\widetilde{\mathrm{C}}(\dots)$, $\mathrm{C}'(\dots)$, $\mathrm{C}^\star(\dots)$, $\mathrm{C}^{\star\star}(\dots)$, $\mathrm{C}_1(\dots)$, $\mathrm{C}_1^\star(\dots)$, $\mathrm{C}_1^{\star\star}(\dots)$, C_2 — некоторые положительные константы, зависящие только от параметров, стоящих в скобках.

Пусть сперва $j \in \{0, 1, \dots, J(m,\eta)\}$. Тогда ввиду (2.9) и (2.15) имеем (при $\mathrm{M} > m$)

$$K_j^{\mathtt{r}}(x, x-y) \le \sum_{|\alpha| \le 2k} |\mathrm{C}(\alpha;k)| \mathrm{C}(\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi) \frac{\|a\| 2^{j(\tau-\varrho|\alpha|)}}{\langle x-y \rangle^{2k}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^m} \frac{\mathtt{I}_{\square^j}(\zeta) d\xi}{\langle \xi - \zeta \rangle^{\mathrm{M}}}$$

$$= \langle x-y\rangle^{-2k}\|a\|\mathrm{C}'(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\sum_{|\alpha|\le 2k}2^{j(\tau-\varrho|\alpha|)}\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j)$$
$$= \langle x-y\rangle^{-2k}\mathrm{C}(m,\mathrm{M},\varrho,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j)2^{j\tau}. \qquad (2.16)$$

Здесь и ниже $\#A$ — число элементов конечного множества A ($\#A=0\Leftrightarrow A=\varnothing$). Поскольку $2k>m$, из (2.16) следуют оценки

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)|dx\le \mathrm{C}^*(m,\mathrm{M},\varrho,\mathrm{R};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j), \qquad (2.17)$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)|dy\le \mathrm{C}^*(m,\mathrm{M},\varrho,\mathrm{R};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j). \qquad (2.18)$$

По формуле суммирования Пуассона (см., например, [18, гл. 7, теорема 2.4]) и свойству (ii) функции φ находим, с одной стороны, что

$$K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}K_j^{\mathtt{r}}(x+\xi,x+\xi-y)\in L_1(\mathbb{T}^m)$$

как функция x и в силу (2.17)

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}|K_j(x,x-y)|dx\le \mathrm{C}^*(m,\mathrm{M},\varrho,\mathrm{R};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j), \qquad (2.19)$$

с другой стороны, имеем $K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y+\xi)\in L_1(\mathbb{T}^m)$ как функция y и в силу (2.18)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}|K_j(x,x-y)|dy\le \mathrm{C}^*(m,\mathrm{M},\varrho,\mathrm{R};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j). \qquad (2.20)$$

Из неравенств (2.19) и (2.20) по лемме Шура (см., например, [19, гл. 11, теорема 3.1]; лемме Шура соответствует случай $r=\sigma=1$, $1\le p=q\le\infty$) следует, что оператор T_j является ограниченным оператором из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_p(\mathbb{T}^m)$ для всех $1\le p\le\infty$, при этом

$$\|T_j\|_{p\to p}\le \mathrm{C}^*(m,\mathrm{M},\varrho,\mathrm{R};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j)\quad (j\in\{0,1,\dots,J(m,\eta)\}). \qquad (2.21)$$

Теперь докажем ограниченность на $L_p(\mathbb{T}^m)$ операторов T_j с $j\ge J(m,\eta)+1$ и оператора T_a.

I. Сначала предположим, что $1\le p\le 2$ $\Big(\Rightarrow \tau<\dfrac{m}{p}(\varrho-1)\Big)$. Из (2.6) аналогично (2.9) выводим равенство (с $l=0,k; y\ne 0$)

$$(y_1^{2l}+\dots+y_m^{2l})K_j^{\mathtt{r}}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^m}(\partial_{\xi_1}^{2l}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2l})a_j^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi y}d\xi=\mathcal{F}((\partial_{\xi_1}^{2l}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2l})a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot))(-y).$$

Поэтому в силу теоремы Хаусдорфа — Юнга (см., например, [18, гл. 5, §1]) верно неравенство $\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1\Big)$:

$$\|(y_1^{2l}+\dots+y_m^{2l})K_j^{\mathtt{r}}(x,y)\mid L_{p'}^{(\mathtt{r})}\|\le\|(\partial_{\xi_1}^{2l}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2l})a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot)\mid L_p^{(\mathtt{r})}\| \qquad (2.22)$$

(норма слева в (2.22) вычисляется по y).

Пусть $u\in L_p(\mathbb{T}^m)$, тогда по (2.7) получаем

$$T_ju(x)=\Big(\int_{|y|\le 2^{-j\varrho}}+\int_{|y|\ge 2^{-j\varrho}}\Big)K_j^{\mathtt{r}}(x,y)u(x-y)dy=:v_1(x)+v_2(x).$$

Оценим нормы в $L_p(\mathbb{T}^m)$ функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ по отдельности. Поскольку последовательное применение неравенств Гельдера, (2.22) с $l=0$, (2.15) с $\alpha=0$ дает

$$|v_1(x)|^p \le \Big(\int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|^{p'} dy\Big)^{p/p'} \int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |u(x-y)|^p dy$$

$$\le \|a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot) \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\|^p \int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |u(x-y)|^p dy \le ((\mathrm{C}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\| 2^{j\tau})^p$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \xi-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\Big|^p d\xi \int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |u(x-y)|^p dy,$$

то отсюда, интегрируя по $\mathbb{T}^m$ и проводя элементарные оценки, получаем оценку нормы v_1:

$$\|v_1 \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_1(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\| 2^{j(\tau-\frac{m}{p}\varrho)} \| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\| \|u \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}\|. \tag{2.23}$$

Аналогично (используя (2.22) с $l=k$, (2.15) с $\alpha\in\{(2k,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,2k)\}\subset\mathbb{R}^m$) имеем

$$|v_2(x)|^p \le \|(\partial_{\xi_1}^{2k}+\cdots+\partial_{\xi_m}^{2k})a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot) \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\|^p \int\limits_{|y|\ge 2^{-j\varrho}} \frac{|u(x-y)|^p}{(y_1^{2k}+\cdots+y_m^{2k})^p} dy$$

$$\le \Big(m\mathrm{C}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\| 2^{j(\tau-2k\varrho)} \Big\| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|\Big)^p \int\limits_{|y|\ge 2^{-j\varrho}} \frac{|u(x-y)|^p}{(y_1^{2k}+\cdots+y_m^{2k})^p} dy$$

и, далее, интегрируя по $\mathbb{T}^m$ и принимая во внимание, что $y_1^{2k}+\cdots+y_m^{2k}\asymp|y|^{2k}$, получаем оценку нормы v_2:

$$\|v_2 \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\| 2^{j(\tau-2k\varrho)} \Big\| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|$$

$$\times \|u \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}\| 2^{j\varrho(2k-\frac{m}{p})} \le \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\| 2^{j(\tau-\frac{m}{p}\varrho)} \Big\| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|$$

$$\times \|u \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},\mathrm{R},p;\eta,\varphi)\|a\| 2^{j(\tau-\frac{m}{p}(\varrho-1))} \|u \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}\| \tag{2.24}$$

при условии, что $\mathrm{M}=\mathrm{M}(m,p)$ выбрано так, что $\mathrm{M}(p-1)>m$ при $1<p\le 2$ и $\mathrm{M}>m$ при $p=1$. На последнем шаге мы использовали следующее неравенство: при $\mathrm{M}=\mathrm{M}(m,p)$ $\exists\, \mathrm{C}(m,\mathrm{M},p,\mathrm{R})>0$ такая, что

$$\Big\| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\Big\| \le \mathrm{C}(m,\mathrm{M},p,\mathrm{R}) 2^{j\frac{m}{p}}. \tag{2.25}$$

Докажем это неравенство. Пусть сначала $1<p\le 2$. Тогда, последовательно используя неравенство Йенсена (для сумм), ограниченность на $\mathbb{R}^m$ (равномерную по $j\in\mathbb{N}_0$) непрерывных функций $\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}(1-p)}\le \mathrm{C}_1(m,\mathrm{M},p)$, $\xi\in\mathbb{R}^m$ (учитывая выбор $\mathrm{M}=\mathrm{M}(m,p)$!), а также оценку числа целых точек в сферическом слое (хорошо известна сильная асимптотическая оценка числа целых точек в m-мерном шаре $\mathtt{R}>0$; для наших целей достаточна простая (точная по порядку) оценка сверху $\#(\mathbb{Z}^m\cap\{\zeta\in\mathbb{R}^m \,|\, |\zeta|\le\mathtt{R}\})\le \mathrm{C}(m)\,\mathtt{R}^m$), получаем

$$\Big\| \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \,|\, L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|^p \le \int\limits_{\mathbb{R}^m} \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \xi-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}} \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j} \langle \xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}(1-p)} d\xi$$

$$\leq \mathrm{C}_1(m,\mathrm{M},p)\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\Box^j}\int_{\mathbb{R}^m}\langle\xi-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}d\xi = \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},p)\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j) \leq \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},p)\mathrm{C}_m\mathrm{R}2^{jm};$$

таким образом, неравенство (2.25) установлено при $1<p\leq 2$; как легко видеть, случай $p=1$ фактически (по ходу дела) также разобран.

Из (2.23)–(2.25) получаем окончательную оценку

$$\|T_j u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \leq \mathrm{C}^\star(m,\mathrm{M},\mathrm{R},p;\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{p}(\varrho-1))}\|u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|. \tag{2.26}$$

Собирая воедино оценки (2.21) и (2.26), устанавливаем ограниченность оператора T_a на $L_p(\mathbb{T}^m)$:

$$\|T_a\|_{p\to p} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\|T_j\|_{p\to p} \leq \mathrm{C}_1^\star(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{j(\tau-\frac{m}{p}(\varrho-1))} = \mathrm{C}^{\star\star}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|; \tag{2.27}$$

здесь на последнем шаге мы учли, что по условию теоремы $\tau<\dfrac{m}{p}(\varrho-1)$.

II. Теперь рассмотрим случай $p=\infty$. Как отмечено выше, оценки (2.21) для операторов T_j с $j\in\{0,1,\dots,J(m,\eta)\}$ получены для всех $1\leq p\leq\infty$.

Пусть теперь $j\geq J(m,\eta)+1$. В силу (2.7) имеем для $u\in L_\infty(\mathbb{T}^m)$

$$|T_j u(x)| \leq \|u\,|\,L_\infty^{(\mathtt{t})}\|\int_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy, \tag{2.28}$$

поэтому остается доказать подходящую оценку для интеграла справа. Снова разобьем этот интеграл на две части:

$$\int_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy = \Bigg(\int_{|y|\leq 2^{-j\varrho}} + \int_{|y|\geq 2^{-j\varrho}}\Bigg)|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy =: w_1(x)+w_2(x). \tag{2.29}$$

Оценим $w_1(x)$, последовательно применяя неравенство Гельдера, неравенство, полученное при оценке функции $|v_1(x)|^p$ выше, и (2.25) (все три с $p=2$):

$$\int_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy \leq \Bigg(\int_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|^2dy\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}dy\Bigg)^{1/2}$$
$$\leq \mathrm{C}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}\varrho)}\Bigg\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\Box^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_2^{(\mathtt{r})}\Bigg\|$$
$$\leq \widetilde{\mathrm{C}}(m,\mathrm{M},\mathrm{R},p;\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}(\varrho-1))}. \tag{2.30}$$

Аналогично оценивается $w_2(x)$ (единственное отличие: используется неравенство, полученное при оценке функции $|v_2(x)|^p$ выше, а не $|v_1(x)|^p$):

$$\int_{|y|\geq 2^{-j\varrho}}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy \leq \Bigg(\int_{|y|\geq 2^{-j\varrho}}|(y_1^{2k}+\dots+y_m^{2k})K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|^2dy\Bigg)^{1/2}$$
$$\times\Bigg(\int_{|y|\geq 2^{-jp}}\frac{dy}{(y_1^{2k}+\dots+y_m^{2k})^2}\Bigg)^{1/2} \leq \mathrm{C}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-2k\varrho)}2^{j\varrho(2k-\frac{m}{2})}$$
$$\times\Bigg\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\Box^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_2^{(\mathtt{r})}\Bigg\| \leq \widetilde{\mathrm{C}}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}(\varrho-1))}. \tag{2.31}$$

Таким образом, из (2.28) ввиду (2.29)–(2.31) получаем требуемую оценку

$$\|T_j u \,|\, L^{(\mathtt{t})}_\infty\| \le \mathrm{C}_1^{\star\star}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}(\varrho-1))}\|u\,|\,L^{(\mathtt{t})}_\infty\|.$$

Следовательно, для $j \ge J(m,\eta)+1$ мы доказали ограниченность оператора T_j на $L_\infty(\mathbb{T}^m)$ и установили оценку

$$\|T_j\|_{\infty\to\infty} \le \mathrm{C}_1^{\star\star}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}(\varrho-1))}.$$

Отсюда, складывая установленные оценки и учитывая условие теоремы $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho-1)$, которое выполняется в случае $p=\infty$, окончательно получаем оценку

$$\|T_a\|_{\infty\to\infty} \le \mathrm{C}_1^{\star\star}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|. \tag{2.32}$$

III. Пусть теперь $2 < p < \infty$. Ограниченность оператора T_a на $L_p(\mathbb{T}^m)$ следует из его ограниченности на $L_2(\mathbb{T}^m)$ и на $L_\infty(\mathbb{T}^m)$ в силу интерполяционной теоремы Рисса (см. [18, гл. 5, теорема 1.3]), при этом справедлива оценка, которая вытекает из (2.27) и (2.32) (с $p=2$),

$$\|T_a\|_{p\to p} \le c^{\star\star}(m,p,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|.$$

Итак, теорема 1 полностью доказана.

В связи с теоремой 1 сделаем несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 — периодический аналог теоремы B, доказанной в [13]. При оценке (нормы) ядра $K_j^{\mathtt{r}}$ $(j\in\mathbb{N}_0)$ мы следуем схеме рассуждений и используем конструкции из [13]. Легко видеть, что число $2\left\lfloor\dfrac{m}{2}\right\rfloor+2$ в условии теоремы 1 можно заменить на $m+1$: в случае четного m следует в ее доказательстве дифференциальный оператор $\partial^{2k}_{\xi_1}+\ldots+\partial^{2k}_{\xi_m}$ заменить на $\operatorname{sign}(y_1)\,\partial^{m+1}_{\xi_1}+\ldots+\operatorname{sign}(y_m)\,\partial^{m+1}_{\xi_m}$ и функцию $y_1^{2k}+\ldots+y_m^{2k}$ на $|y_1|^{m+1}+\ldots+|y_m|^{m+1}$. Таким образом, порядок гладкости символа по частотной переменной в теореме 1 (а также в теореме B) тот же, что и в результате М. Нагасэ, упомянутом во введении: $|\alpha|\le m+1$.

З а м е ч а н и е 2. Условие $\tau<\dfrac{m}{2}(\varrho-1)$ в теореме 1 является точным по крайней мере при $p=2$ и $p=\infty$. Обсудим лишь случай $p=2$. Прежде всего покажем, что условие $\tau\le \min\left\{0,\dfrac{m}{2}(\varrho-\delta)\right\}$ необходимо для ограниченности на $L_2^{(\mathtt{t})}$ всех пдо (1.3) с символами из $S^{\tau(\mathtt{t})}_{\varrho\delta}$. Необходимость условия $\tau\le 0$ очевидна, поэтому предположим, что $0\ge\tau>\dfrac{m}{2}(\varrho-\delta)$, и построим символ $\widetilde{a}\in S^{\tau(\mathtt{t})}_{\varrho\delta}$, для которого пдо $T_{\widetilde{a}}$ неограничен на $L_2^{(\mathtt{t})}$. Фиксируем функцию $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ с $\operatorname{supp}\psi=\{\xi\in\mathbb{R}^m \,|\, |\xi|\le 1/2\}$ такую, что $\psi(\xi)=1$ при $|\xi|\le 1/4$. Рассмотрим функцию ($\mathsf{e}=(1,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^m$)

$$a_{\mathrm{R}}(x,\xi)=\sum_{|\zeta|<\mathrm{R}^{\delta-\varrho}} e^{-2\pi i\zeta x\mathrm{R}^{\varrho}}\psi((\xi-\mathrm{R}\mathsf{e})\mathrm{R}^{-\varrho}-\zeta)\quad(\mathrm{R}>0).$$

Носители слагаемых здесь попарно не пересекаются: $\forall\,\zeta,\lambda\in\mathbb{Z}^m\colon \zeta\ne\lambda\Rightarrow\ 1\le|\zeta-\lambda|\le |(\xi-\mathrm{R}\mathsf{e})\mathrm{R}^{-\varrho}-\zeta|+|(\xi-\mathrm{R}\mathsf{e})\mathrm{R}^{-\varrho}-\lambda|$, следовательно, одно из слагаемых $\ge 1/2$ $(\forall\,\xi\in\mathbb{R}^m)$. Напомним пример Хёрмандера [5]

$$\bar{a}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}10^{j\tau}\bar{a}_j(x,\xi),\quad \bar{a}_j(x,\xi)=a_{10^j}(x,\xi)\quad(j\in\mathbb{N})$$

(носители (по ξ) слагаемых $\bar{a}_j(x,\xi)$ также попарно не пересекаются). В [5] показано, что $\bar{a}(x,\xi)\in S^{\,\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m)$. Вообще говоря, символ $\bar{a}(x,\xi)$ не является периодическим по x, поэтому рассмотрим "подправленный" пример Хёрмандера

$$\widetilde{a}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}10^{j\tau}\widetilde{a}_j(x,\xi),\quad \widetilde{a}_j(x,\xi)=\widetilde{a}^{\,\tau}_{\varrho\delta j}(x,\xi)=\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} e^{-2\pi i\zeta x\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor}\psi((\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1}-\zeta).$$

Ясно, что $\widetilde{a}(x,\xi)$ — символ, периодический по x, наследует все указанные свойства, — в частности, удовлетворяет неравенствам (1.2) и, как следствие, (1.4). Другими словами, $\widetilde{a}(x,\xi)\in S^{\tau(\mathtt{t})}_{\varrho\delta}$. Покажем, что оператор $T_{\widetilde{a}}$ вида (1.3) не ограничен на $L^{(\mathtt{t})}_2$. Фиксируем неотрицательную функцию $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ с $\operatorname{supp}\varphi=\{\xi\in\mathbb{R}^m\,|\,|\xi|<\mathsf{r}\}$, где $\mathsf{r}=\mathsf{r}_\varrho$ выбрано из условия $\mathsf{r}\lfloor 10^\varrho\rfloor^{-1}<1/4$. По φ определим полиномы

$$\phi(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi(\xi)e^{2\pi i\xi x}, \tag{2.33}$$

$$u_j(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}e^{2\pi i\xi x}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)\quad (j\in\mathbb{N}).$$

Если $\xi\in\mathbb{Z}^m\colon \widehat{u}_j(\xi)\neq 0$, то $\exists\,\lambda=\lambda(\xi)\colon |\lambda|<10^{j(\delta-\varrho)}$ и $\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\lambda\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)>0$. Поэтому $|(\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1}-\lambda|<1/4$, так что $\psi((\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1}-\lambda)=1$ и $\psi((\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1}-\zeta)=0$ $\forall\,\zeta\neq\lambda$, следовательно, $\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)=0$ $\forall\,\zeta\neq\lambda$. Таким образом, $\forall j\in\mathbb{N}$, $\forall\xi\in\mathbb{Z}^m$ имеем $\widehat{u}_j(\xi)=\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\lambda\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$ и $|\widehat{u}_j(\xi)|^2=\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\varphi^2(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$. Отсюда по теореме Парсеваля получаем, с одной стороны,

$$\|u_j\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\|^2=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\varphi^2(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)=\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi^2(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$$

$$=\|\,\phi\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\,\|^2\#\{\zeta\in\mathbb{Z}^m\colon|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}\}=:\|\,\phi\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\,\|^2\,\mathrm{N}_j(\varrho,\delta),$$

с другой стороны, находим, что

$$T_{\widetilde{a}}u_j(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widetilde{a}(x,\xi)\widehat{u}_j(\xi)e^{2\pi i\xi x}=10^{j\tau}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widetilde{a}_j(x,\xi)\widehat{u}_j(\xi)e^{2\pi i\xi x}$$

$$=10^{j\tau}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}e^{-2\pi i\lambda(\xi)x\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor}e^{2\pi i\xi x}\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\lambda(\xi)\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$$

$$=10^{j\tau}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)e^{2\pi i(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)x}$$

$$=10^{j\tau}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)e^{2\pi i(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)x}=10^{j\tau}\,\phi(x)\,\mathrm{N}_j(\varrho,\delta)$$

и поэтому $\|\,T_{\widetilde{a}}u_j\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\|=10^{j\tau}\,\|\,\phi\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\,\|\,\mathrm{N}_j(\varrho,\delta)$. Следовательно,

$$\frac{\|\,T_{\widetilde{a}}u_j\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\|}{\|u_j\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\|}=10^{j\tau}\,(\mathrm{N}_j(\varrho,\delta))^{1/2}. \tag{2.34}$$

Так как имеет место сильная асимптотическая оценка (для числа целых точек m-мерного шара радиуса R при $\mathrm{R}\to\infty$; b_m — объем единичного m-мерного шара)

$$\#\{\zeta\in\mathbb{Z}^m\,|\,|\zeta|<\mathrm{R}\}\sim\mathsf{b}_m\,\mathrm{R}^m, \tag{2.35}$$

то из (2.34) следует неограниченность оператора $T_{\widetilde{a}}$ на $L^{(\mathtt{t})}_2$ $\Big($по предположению $\tau>\dfrac{m}{2}(\varrho-\delta)!\Big)$.

Теперь докажем, что при условии $\tau=\dfrac{m}{2}(\varrho-1)$ в классе $L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho$ при любом $\varrho\in[0,1]$ существует символ $\breve{a}(x,\xi)=a^{(\varrho)}(x,\xi)$ такой, что $T_{\breve{a}}$ неограничен на $L_2(\mathbb{T}^m)$. С этой целью подправим символ $\widetilde{a}_j=\widetilde{a}^\tau_{\varrho\delta j}$ с $\delta=1$ следующим образом (ср. [9, (4.2); 10, (4),(6)]):

$$\breve{a}_j(x,\xi)=\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}e^{-2\pi i(10^j\mathsf{e}+\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)x}\psi((\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1}-\zeta)$$

и положим $\breve{a}(x,\xi) = a^{(\varrho)}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{j\tau}\dfrac{1}{\sqrt{j}}\breve{a}_j(x,\xi)$. Легко видеть, что $\breve{a}(x,\xi) \in S^{\tau(\mathtt{t})}_{\varrho\delta} \subset L^{(\mathtt{t})}_{\infty}S^{\tau}_{\varrho}$. Для любого $J\in\mathbb{N}$ и произвольного набора $(d_j)_{j=1}^{J}$ положительных чисел рассмотрим полином

$$u_J(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} e^{2\pi i\xi x}\sum_{j=1}^{J} d_j \sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} \varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor).$$

Рассуждая, как выше, нетрудно проверить, что (ϕ — полином из (2.33))

$$T_{\breve{a}}u_J(x) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} d_j\frac{1}{\sqrt{j}}10^{j\tau}\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,1)\cdot\phi(x), \quad \|u_j \,|\, L^{(\mathtt{t})}_2\|^2 = \|\,\phi \,|\, L^{(\mathtt{t})}_2\,\|^2 \sum_{j=1}^{J} d_j^2\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,\delta),$$

$$\|\,T_{\breve{a}}u_J \,|\, L^{(\mathtt{t})}_2\| = \|\,\phi \,|\, L^{(\mathtt{t})}_2\,\| \sum_{j=1}^{J} d_j\frac{1}{\sqrt{j}}10^{j\tau}\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,1).$$

Если $T_{\breve{a}}$ ограничен на $L_2(\mathbb{T}^m)$, то неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^{J} d_j\frac{1}{\sqrt{j}}10^{j\tau}\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,1)\Big)^2 \le \|\,T_{\breve{a}}\,\|^2_{2\to 2}\sum_{j=1}^{J} d_j^2\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,\delta)$$

справедливо для любого набора $(d_j)_{j=1}^{J}$. Отсюда следует, что $\sum_{j=1}^{J} 1/j\; 10^{j2\tau}\,\mathrm{N}_j(\varrho,1) \le \|\,T_{\breve{a}}\,\|_{2\to 2}$. Последнее неравенство влечет сходимость гармонического ряда, если учесть (2.35) и равенство $\tau = m/2\,(\varrho-1)$. Полученное противоречие доказывает неограниченность $T_{\breve{a}}$ на $L_2(\mathbb{T}^m)$.

З а м е ч а н и е 3. Развитие теории периодических пдо (т. е. пдо вида (1.3)) до 2009 г. (включая известные работы М. С. Аграновича по их квантизации Фурье) весьма полно отражено в не столь давней монографии [14]. После 2009 г. наблюдается существенный рост интереса к теории и приложениям периодических пдо. Здесь мы обсудим лишь результаты, которые имеют прямое отношение к теореме 1 и замечанию 2. М. Ружанский и В. Турунен [15] доказали ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_2$ пдо T_a при условии, что для его символа $a(x,\xi)$ конечна величина $\max_{|\alpha|\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\|\partial^{\alpha}_x a(\cdot,\xi)\,|\,L^{(\mathtt{t})}_{\infty}\|$ (в частности, это верно для T_a с $a\in S^{0(\mathtt{t})}_{\varrho 0}$). Затем Х. Дельгадо [16] установил ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ при $2\le p<\infty$ пдо T_a с символами $a(x,\xi)$, удовлетворяющими условию ($0<\varrho<1$)

$$\max_{|\alpha|\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\langle\xi\rangle^{\frac{m}{2}\varrho+(1-\varrho)|\alpha|}\|\Delta^{\alpha}_{\xi}a(\cdot,\xi)\,|\,L^{(\mathtt{t})}_{\infty}\| + \max_{|\beta|\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\langle\xi\rangle^{\frac{m}{2}\varrho}\|\partial^{\beta}_x a(\cdot,\xi)\,|\,L^{(\mathtt{t})}_{\infty}\| < \infty, \quad (2.36)$$

(в частности, с символами $a\in S^{-\frac{m}{2}\varrho(\mathtt{t})}_{1-\varrho\,0}$) как следствие интерполяции между упомянутым результатом М. Ружанского и В. Турунена и следующей теоремой из [16]: пдо T_a ограничен из $L^{(\mathtt{t})}_{\infty}$ в $BMO(\mathbb{T}^m)$, если его символ $a(x,\xi)$ удовлетворяет условию (2.36) при $0<\varrho<1$. Следует подчеркнуть, что идея доказательства ограниченности из $L^{(\mathtt{r})}_{\infty}$ в $BMO(\mathbb{R}^m)$ и на $L^{(\mathtt{r})}_2$ пдо (1.1) с символами $a(x,\xi)\in S^{\frac{m}{2}\varrho}_{\varrho-1\delta}$ и последующей интерполяции для получения их ограниченности на $L^{(\mathtt{r})}_p$ при $2<p<\infty$ принадлежит Ч. Фефферману: именно так были получены результаты работы [11], упомянутые во введении. (Здесь $BMO(\mathbb{I}^m)$ — пространство функций ограниченной средней осцилляции на $\mathbb{I}^m$, $\mathbb{I}\in\{\mathbb{R},\,\mathbb{T}\}$.) Наконец, Д. Кардона [17] доказал ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ для всех $1<p<\infty$ пдо T_a с символами $a\in S^{0(\mathtt{t})}_{1\,\delta}$ при $0\le\delta<1$. В [17] используется классический (в теории сингулярных интегральных операторов Кальдерона — Зигмунда) подход: сначала доказывается, что оператор T_a имеет слабый тип $(1,1)$ и ограничен на $L^{(\mathtt{t})}_2$, затем (с помощью действительной интерполяции) — ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ при $1<p<2$, и, наконец, по двойственности устанавливается ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ и при $2<p<\infty$.

Замечание 4. Отметим, что вопросы ограниченности на $L_p(\mathbb{T}^m)$ пдо T_a вида (1.3) с символами, не гладкими по пространственной переменной, по-видимому, до сих пор не рассматривались. Достаточные условия ограниченности из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_q(\mathbb{T}^m)$ пдо T_a вида (1.3) в терминах классов символов $L_r^{(\mathtt{t})}S_\varrho^\tau$ $(1 \le p, q \le \infty, r = r(p,q))$ в стиле теоремы 1 будут рассмотрены в следующей работе. Пример пдо $T_{\breve{a}}$ с символом из $S_{1+\epsilon\,1}^{\frac{m}{2}\epsilon(\mathtt{t})}$, построенный в замечании 2 $(\epsilon = \varrho - 1,\ 0 \le \varrho \le 1)$, показывает, что упомянутые результаты работ [15–17], вообще говоря, не верны для операторов с символами из $S_{1-\varrho\,1}^{-\frac{m}{2}\varrho(\mathtt{t})}$. Как следствие теоремы 2, доказываемой в разд. 3 ниже, из класса $L_\infty^{(\mathtt{t})}S_1^0(m+1)$ выделяется подкласс $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})}$, пдо с символами из которого оказываются заведомо ограниченными на $L_p(\mathbb{T}^m)$ при всех $1 < p < \infty$.

3. Аналог теоремы А для периодических пдо

Всюду в этом разделе предполагается, что $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная, возрастающая, выпуклая (на $[0,1]$) функция с $\omega(0) = 0$. Следующая теорема является периодической версией теоремы А из введения (класс символов $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})}$ — из определения 1.1).

Теорема 2. *Псевдодифференциальный оператор T_a вида* (1.3) *ограничен на $L_p(\mathbb{T}^m)$ при всех $1 < p < \infty$ для любого $a \in \Sigma_\omega(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ тогда и только тогда, когда ω^2 удовлетворяет условию Дини:* $\displaystyle\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < +\infty$.

Доказательство теоремы 2 следует в основном схеме рассуждений из [7] и использует три ключевые идеи: мультипликаторный подход к пдо (см. предложение 1 ниже), микролокализацию, теорию Литлвуда — Пэли. Прежде всего отметим, что условие $\displaystyle\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < \infty$ равносильно условию $\sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j}) < \infty$ (в силу монотонности ω).

Сначала докажем *необходимость условия теоремы* 2. Предположим, что ω не удовлетворяет условию Дини, и, следовательно, расходится ряд $\sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j}) = +\infty$. Построим пдо вида (1.3) с символом $a \in \sum_\omega^{(\mathtt{t})}$, который не будет ограниченным на $L_2(\mathbb{T}^m)$.

Выберем неотрицательные пробные функции $\psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ такие, что $\operatorname{supp}\psi = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, \dfrac{2}{3} \le |\xi| \le \dfrac{4}{3}\Big\}$, $\operatorname{supp}\varphi = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, \dfrac{4}{5} \le |\xi| \le \dfrac{6}{5}\Big\}$, $\psi(\xi) = 1$ при $\dfrac{4}{5} \le |\xi| \le \dfrac{6}{5}$. Положим $\lambda^j = (2^j, \dots, 2^j) \in \mathbb{Z}^m$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ и определим символ $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ по формуле

$$a(x,\xi) = a_{\omega,\psi}(x,\xi) = \sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j})\psi(2^{-j}\xi)e^{-2\pi i\lambda^j x}.$$

Покажем, что $a \in \sum_\omega^{(\mathtt{t})}$. Во-первых, $\forall\,\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ имеем

$$\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) = \sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j})2^{-j|\alpha|}\partial^\alpha\psi(2^{-j}\xi)e^{-2\pi i\lambda^j x},$$

и поскольку открытые сферические слои $\square_0^j = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, \dfrac{2}{3}2^j < |\xi| < \dfrac{4}{3}2^j\Big\}$ попарно не пересекаются, то $a(x,\xi) \ne 0 \ \Rightarrow \exists\,!j_0 = j_0(\xi) \in \mathbb{N}_0\colon \xi \in \square_0^{j_0}$; следовательно, $\langle\xi\rangle \asymp |\xi| \asymp 2^{j_0}$. Поэтому

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le \omega(2^{-j_0})\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}.$$

Во-вторых, предполагая сначала, что $0 < 2^{j_0}|x-y| < 1$, находим

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(y,\xi)| \le \omega(2^{-j_0})\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}|e^{-2\pi i\lambda^{j_0}x} - e^{-2\pi i\lambda^{j_0}y}|$$

$$\leq 2\pi\sqrt{m}\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\omega(2^{-j_0})2^{j_0}|x-y| \leq 2\pi\sqrt{m}\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\omega(|x-y|).$$

На последнем шаге использована выпуклость ω на $[0,1]$; если же $2^{j_0}|x-y| \geq 1$, то, поскольку $2^{-j_0} \leq |x-y|$, получаем

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(y,\xi)| \leq 2\omega(2^{-j_0})\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \leq 2\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\omega(|x-y|).$$

Таким образом, $a \in \sum_\omega^{(\mathtt{t})}$. Теперь докажем, что оператор T_a не ограничен на $L_2(\mathbb{T}^m)$. Для этого достаточно построить такую функцию $u = u_{\omega,\varphi} \in L_2(\mathbb{T}^m)$, что $T_a u \notin L_2(\mathbb{T}^m)$. По функции φ определим полином $\phi(x)$ по формуле (2.33), затем функцию $u = u_{\omega,\varphi}(x) = \sum_{j=0}^\infty d_j e^{2\pi i\lambda^j x}\phi(x)$, где положительная числовая последовательность $(d_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ выбрана из условий $\|(d_j) \,|\, \ell_2\| = 1$, $\sum_{j=0}^\infty d_j\omega(2^{-j}) = +\infty$. Ясно, что спектр функции u есть множество

$$\Lambda(u) = \bigcup_{j=0}^\infty \big(\lambda^j + \{\xi\in\mathbb{Z}^m \,|\, \varphi(\xi)\neq 0\}\big) =: \bigcup_{j=0}^\infty \Lambda_j(u) \subset \bigcup_{j=0}^\infty \Big(\lambda^j + \Big\{\xi\in\mathbb{Z}^m \,\Big|\, \frac{4}{5} \leq |\xi| \leq \frac{6}{5}\Big\}\Big),$$

причем множества $\Lambda_j(u)$ попарно не пересекаются. Следовательно, $u = u_{\omega,\varphi} \in L_2(\mathbb{T}^m)$, при этом по равенству Парсеваля $\|u \,|\, L_2^{(\mathtt{t})}\|^2 = \sum_{j=0}^\infty d_j^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi^2(\xi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi^2(\xi)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в замечании 2 разд. 2, поэтому мы их не приводим.

Для непустого конечного множества $\Lambda\subset\mathbb{Z}^m$ пусть $d(\Lambda) = \max\{|\xi-\zeta| \colon \xi,\zeta\in\Lambda\}$, $\bar{d}(\Lambda) = \max(1, d(\Lambda))$ и

$$\mathrm{T}(\Lambda) = \Big\{\, t(x) = \sum_{\xi\in\Lambda}\widehat{t}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x} \;\Big|\; \widehat{t}(\xi)\in\mathbb{C},\ \xi\in\Lambda\Big\}$$

— пространство тригонометрических полиномов со спектром Λ. Нам понадобятся пространство бесселевых потенциалов $H^\varkappa(\mathbb{R}^m)$ (см., например, [20, ch. 9], там оно обозначается $L_2^\varkappa(\mathbb{R}^m)$):

$$H^\varkappa(\mathbb{R}^m) = \big\{g\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \,\big|\, \|g \,|\, H^\varkappa\| = \|\mathcal{F}g(\xi)\langle\xi\rangle^\varkappa \,|\, L_2^{(\mathtt{r})}\| < \infty\big\} \quad (\varkappa\in\mathbb{R})$$

и пространство $\mathrm{H}^\omega = \mathrm{H}^\omega(\mathbb{T}^m)$ всех функций $u : \mathbb{T}^m\to\mathbb{C}$ таких, что конечна величина

$$\|u \,|\, \mathrm{H}^\omega\| := \sup_{x\in\mathbb{T}^m}|u(x)| + \sup_{x,y\in\mathbb{T}^m\colon x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{\omega(|x-y|)},$$

которая, очевидно, является нормой для $\mathrm{H}^\omega(\mathbb{T}^m)$. Положим $\Lambda_0 = \{\xi\in\mathbb{Z}^m \,|\, |\xi|\leq 2\}$, $\Lambda_j = \{\xi\in\mathbb{Z}^m \,|\, 2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}\}$, $j\in\mathbb{N}$. Будем ради краткости использовать обозначение

$$\|(f_j) \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\| := \Big\|\Big(\sum_{j=0}^\infty |f_j(\cdot)|^2\Big)^{1/2} \,\Big|\, L_p^{(\mathtt{t})}\Big\|$$

для функциональной последовательности $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ $(x\in\mathbb{T}^m)$.

Следующее утверждение — основной ингредиент *доказательства достаточности* в теореме 2.

Предложение 1. *Предположим, что* $1 < p < \infty$, ω^2 *удовлетворяет условию Дини*: $\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < +\infty$. *Пусть* $(\mathrm{m}_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ *— ограниченная последовательность в* H^ω. *Тогда существует постоянная* $\mathrm{c}(m,p) > 0$ *такая, что для любой последовательности* $(\mathrm{v}_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ *тригонометрических полиномов* $\mathrm{v}_j\in\mathrm{T}(\Lambda_j)$ *имеет место неравенство*

$$\Big\|\sum_0^\infty \mathrm{m}_j(x)\mathrm{v}_j(x) \,\Big|\, L_p^{(\mathtt{t})}\Big\| \leq \mathrm{c}(m,p)\big\|(\mathrm{v}_j) \,|\, L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\big\|. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следующий результат легко вытекает из теоремы 1 работы [21]: $\forall\, m\in\mathbb{N}\ \forall\,\alpha > \frac{m-1}{2}\ \exists\,\mathrm{c}(m,\alpha) > 0\ \forall\, f : \mathbb{T}^m\to\mathbb{C}$ — непрерывной функции справедлива оценка $(\mathrm{R} > 0)$

$$\|f - t_{\mathrm{R}}(f) \,|\, L_\infty^{(\mathtt{t})}\| \leq \mathrm{c}(m,\alpha)\sup_{|h|_{\mathrm{R}}\leq 1}\|f(\cdot+h) - f(\cdot) \,|\, L_\infty^{(\mathtt{t})}\|. \tag{3.2}$$

Здесь $t_{\mathrm{R}}(f,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m:\,|\xi|<\mathrm{R}}\Big(1-\dfrac{|\xi|^2}{\mathrm{R}^2}\Big)^{\alpha}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$ — средние Рисса порядка α ряда Фурье функции f. В силу оценки (3.2) и условия предложения 1 представим функцию $m_j(x)$ в следующем виде $m_j(x) = t_j(x) + w_j(x)$, где $t_j(x) = t_{2^{j-2}}(m_j, x)$ $(j\in\mathbb{N})$; при этом $\|w_j\,|\,L_\infty^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\omega(2^{-j})$, $\|t_j\,|\,L_\infty^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star$ (постоянная $\mathrm{C}^\star > 0$ — это радиус шара в пространстве H^ω, которому принадлежит последовательность (m_j)). Теперь рассмотрим функции

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j(x)\mathrm{v}_j(x), \quad h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{w}_j(x)\mathrm{v}_j(x),$$

и оценим их нормы в $L_p(\mathbb{T}^m)$ по отдельности. По неравенству Гельдера для рядов имеем

$$|h(x)| \le \Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{w}_j(x)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{v}_j(x)|^2\Big)^{1/2} \le \mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^2(2^{-j})\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{v}_j(x)|^2\Big)^{1/2}$$

следовательно,

$$\|h\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^2(2^{-j})\Big)^{1/2}\|(\mathrm{v}_j(x))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|. \tag{3.3}$$

Для оценки нормы g применим следующие неравенства. Введем операторы Δ_j^η $(j\in\mathbb{N}_0$; гладкое разбиение единицы $\eta = \{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ на $\mathbb{R}^m$ — из (2.8)) следующим образом: для $u\in L_1(\mathbb{T}^m)$ положим

$$\Delta_j^\eta(u,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\eta_j(\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

По теореме типа Литтлвуда — Пэли для “гладких двоичных пачек” [22, ch. 3, Theorem 3.4.4] при $1<p<\infty$ существует постоянная $\mathrm{C}(p,m,\eta) > 1$ такая, что для всех $u\in L_p(\mathbb{T}^m)$ справедливы неравенства

$$\mathrm{C}(p,m,\eta)^{-1}\|\,u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\,\| \le \|\,(\Delta_j^\eta(u\,,\,\cdot))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\,\| \le \mathrm{C}(p,m,\eta)\|\,u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\,\|. \tag{3.4}$$

Далее, по теореме о мультипликаторах Фурье [22, ch.3, Theorem 3.4.1(2)] при $1<p<\infty$, $\varkappa > 3/2\,m$ существует константа $\mathrm{C} = \mathrm{C}(p,m,\varkappa) > 0$ такая, что для любой совокупности $(\Gamma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ конечных множеств $\varnothing \ne \Gamma_j \subset \mathbb{Z}^m$ выполняется неравенство

$$\Big\|\Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\mathtt{M}_j(\xi)\widehat{\mathtt{T}}_j(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}\Big)\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\,\Big\| \le \mathrm{C}\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\big(\|\mathtt{M}_j(\bar{d}(\Gamma_j)\,x)\,|\,H^\varkappa\,\|\big)\big\|(\mathtt{T}_j(x))|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\Big\| \tag{3.5}$$

для всех последовательностей функций (мультипликаторов) $\big(\mathtt{M}_j(x)\big)\subset H^\varkappa(\mathbb{R}^m)$ и полиномов $(\mathtt{T}_j(x))$ с $\mathtt{T}_j(x)\in \mathrm{T}(\Gamma_j)$. Поскольку $t_j(x)v_j(x)\in\mathrm{T}(\overline{\Lambda}_j)$, где $\overline{\Lambda}_j = \{\xi\in\mathbb{Z}^m\,|\,2^{j-2}\le|\xi|\le 2^{j+2}\}$, и следовательно,

$$\Delta_k^\eta(g,x) = \Theta_k * g(x) = \Theta_k * \sum_{|j-k|\le 3} t_j(x)v_j(x),\ \Theta_j(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\eta_j(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,(j\in\mathbb{N}_0),$$

то последовательно применяя соотношение (3.4) и неравенство (3.5), получаем

$$\|g\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}(p,m,\eta)\|(\Delta_l^\vartheta(g,x))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\| \le \mathrm{C}(p,m,\eta)\mathrm{C}(p,m,\varkappa)$$
$$\times\,\|(t_j(x)v_j(x))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\| \le \mathrm{C}(p,m,\eta)\mathrm{C}(p,m,\varkappa)\mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\|(\mathrm{v}_j)\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|. \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.3) и (3.6) следует требуемая оценка (3.1). Итак, предложение 1 доказано.

Теперь *достаточность* в теореме 2 легко доказывается с использованием предложения 1, соотношения (3.4), неравенства (3.5) и того факта, что символы $a_j(x,\xi) = a(x,\xi)\eta_j(\xi)$, как нетрудно показать, принадлежат $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})}$.

Автор признателен Стефану Хайнриху (Университет Кайзерслаутерна) за обсуждение ряда аспектов теории пдо, инициировавшее исследование, частью которого стали результаты настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. М.: Мир, 1987. Т. 3: Псевдодифференциальные операторы. 696 с.
2. **Kumano-go H.** Pseudo-differential operators. Cambridge: MIT Press, 1982. 455 p.
3. **Stein E.M.** Harmonic analysis: Real–Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. 716 p.
4. **Hörmander L.** Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations // Singular Integrals (Chicago, IL, 1966). Providence: Amer. Math. Soc., 1967. P. 138–183. (Proc. Sympos. Pure Math. 10).
5. **Hörmander L.** On the L^2 continuity of pseudo-differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1971. Vol. 24. P. 529–535.
6. **Calderon A. P.,Vaillancourt R.** A class of bounded pseudo-differential operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1972. Vol. 6. P. 1185–1187.
7. **Coifman R.R., Meyer Y.** Au–dela des operateurs pseudo-differentiels // Asterisque. 1978. Vol. 57. P. 1–185.
8. **Hounie J.** On The L^2 continuity of pseudo–differential operators // Communications in Partial Diff. Eq. 1986. T. 11, no. 7. C. 765-778.
9. **Ching C. H.** Pseudo-differential operators with nonregular symbols // J. Diff. Eq. 1972. Vol. 11. P. 436–447.
10. **Rodino L.** On the boundedness of pseudo differential operators in the class $L^m_{\varrho,1}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. T. 58, no. 1. C. 211–215.
11. **Fefferman C.** L^p bounds for pseudo-differential operators // Israel J. Math. 1973. Vol. 14. P. 413–417.
12. **Nagase M.** The L^p–boundedness of pseudo–differential operators with non-regular symbols // Communications in Partial Diff. Eq. 1977. Vol. 2, no. 10. P. 1045–1061.
13. **Kenig C. E., Staubach W.** Ψ–pseudodifferential operators and estimates for maximal oscillatory integrals // Studia mathematica. 2007. Vol. 183, no. 3. C. 249–258.
14. **Ruzhansky M., Turunen V.** Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics. Basel; Birkhauser: Springer, 2009. 710 p.
15. **Ruzhansky M., Turunen V.** Quantization of pseudo-differential operators on the torus // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, no. 6. C. 943–982.
16. **Delgado J.** L_p-bounds for pseudo-differential operators on the torus // Operator Theory: Advances and Appl. 2013. Vol. 231. C. 103–116.
17. **Cardona D.** Weak type $(1,1)$ bounds for a class of periodic pseudo–differential operators // J. Pseudo-Diff. Oper. Appl. 2014. Vol. 5, no. 4. P. 507–515.
18. **Стейн И., Вейс. Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 336 с.
19. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 752 с.
20. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 455 с.
21. **Степанец А.И.** Приближение непрерывных периодических функций многих переменных сферическими средними Рисса // Мат. заметки. 1974. Т. 15, вып. 5. С. 821–832.
22. **Schmeisser H. J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Chichester: J. Wiley & Sons, 1987. 300 p.

Базарханов Даурен Болысбекович
канд. физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и математического моделирования МО и Н РК
e-mail: dauren.mirza@gmail.com

Поступила 7.11.2016

REFERENCES

1. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators III: Pseudodifferential operators.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985, Ser. Fundamental Principles Math. Sci, vol. 274. 525 p.
2. Kumano-go H. *Pseudo-differential operators.* Cambridge: MIT Press, 1982, 455 p.

3. Stein E.M. *Harmonic analysis: real–variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1993, 716 p.
4. Hörmander L. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. *Singular Integrals, Chicago, IL, 1966*, Providence: Amer. Math. Soc., 1967, Ser. Proc. Sympos. Pure Math. 10, pp. 138–183.
5. Hörmander L. On the L^2 continuity of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1971, vol. 24, pp. 529–535.
6. Calderon A. P.,Vaillancourt R. A class of bounded pseudo-differential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1972, vol. 6, pp. 1185–1187.
7. Coifman R. R., Meyer Y. Au–dela des operateurs pseudo-differentiels. *Asterisque*, 1978, vol. 57, pp. 1–185.
8. Hounie J. On The L^2 continuity of pseudo–differential operators. *Communications in Partial Diff. Eq.*, 1986, vol. 11, no. 7, pp. 765–778.
9. Ching C.H. Pseudo-differential operators with nonregular symbols. J. Diff. Eq., 1972, vol. 11, pp. 436–447.
10. Rodino L. On the boundedness of pseudo differential operators in the class $L^m_{\varrho,1}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 58, no. 1, pp. 211–215.
11. Fefferman C. L^p bounds for pseudo-differential operators. *Israel J. Math.*, 1973, vol. 14, pp. 413–417.
12. Nagase M. The L^p–boundedness of pseudo–differential operators with non-regular symbols. *Communications in Part. Diff. Eq.*, 1977, vol. 2, no. 10, pp. 1045–1061.
13. Kenig C. E., Staubach W. Ψ–pseudodifferential operators and estimates for maximal oscillatory integrals. *Studia mathematica*, 2007, vol. 183, no. 3, pp. 249–258.
14. Ruzhansky M., Turunen V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics.* Basel, Birkhauser: Springer, 2009, 710 p.
15. Ruzhansky M., Turunen V. Quantization of pseudo-differential operators on the torus. *J. Fourier Anal. Appl.* 2010, vol. 16, no. 6, pp. 943–982.
16. Delgado J. L_p-bounds for pseudo-differential operators on the torus. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2013, vol. 231, pp. 103–116.
17. Cardona D. Weak type $(1, 1)$ bounds for a class of periodic pseudo–differential operators. *J. Pseudo-Diff. Oper. Appl.*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 507–515.
18. Stein E., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton: Princeton University Press, 1971, Princeton Mathematical Ser., No. 32, 297 p.
19. Kantorovich L.V. and Akilov G.P. *Fukncionalnyj analiz* (Functional analysis). Oxford, New York: Pergamon Press, 1982, 589 p.
20. Nikolski S.M. *Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya* (Approximation of functions of several variables and embedding theorems). Berlin: Springer, 1975, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 205, 418 p.
21. Stepanets A.I. Approximation of continuous periodic functions of many variables by spherical Riesz means. *Math. Notes*, 1974, vol 15, no. 5, pp. 492–498.
22. Schmeisser H.J., Triebel H. *Topics in Fourier analysis and function spaces.* Chichester: J. Wiley & Sons, 1987, 300 p.

D. B. Bazarkhanov., Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125 Pushkin str., Almaty, 050010 Kazakhstan, e-mail: dauren.mirza@gmail.com .