ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518.834

ОДНОСТОРОННИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ЯДРА ПУАССОНА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ[1]

А. Г. Бабенко, Т. З. Наум

Рассматривается обобщенное ядро Пуассона $\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos(\alpha\pi/2)P(t)+\sin(\alpha\pi/2)Q(t)$, $q \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, представляющее собой линейную комбинацию ядра Пуассона $P(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ и сопряженного ядра Пуассона $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$. Найдены величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра $\Pi_{q,\alpha}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного и соответствующие полиномы наилучшего одностороннего приближения.

Ключевые слова: аппроксимация с ограничениями, тригонометрические полиномы, обобщенное ядро Пуассона.

A. G. Babenko, T. Z. Naum. One-sided integral approximations of the generalized Poisson kernel by trigonometric polynomials.

We consider the generalized Poisson kernel $\Pi_{q,\alpha} = \cos(\alpha\pi/2)P + \sin(\alpha\pi/2)Q$ with $q \in (-1, 1)$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, which is a linear combination of the Poisson kernel $P(t) = 1/2+\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ and the conjugate Poisson kernel $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$. The values of the best upper and lower integral approximations of the kernel $\Pi_{q,\alpha}$ by trigonometric polynomials of order not exceeding a given number are found. The corresponding polynomials of the best one-sided approximation are obtained.

Keywords: constrained approximation, trigonometric polynomials, generalized Poisson kernel.

MSC: 42A10, 41A29

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-53-63

Введение

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к задачам одностороннего интегрального приближения конкретных функций полиномами. Такого рода задачи возникают в теории чисел, теории кодирования и других областях математики. Первые результаты в этом направлении были получены в 1880-е годы А. А. Марковым и Т. И. Стилтьесом. В дальнейшем эти исследования были продолжены в работах Карамата (1930), Фройда и Ганелиуса (середина XX века). Теория одностороннего взвешенного интегрального приближения функций алгебраическими многочленами впервые была разработана в статье Р. Бояника и Р. ДеВора [11]. В монографии Н. П. Корнейчука, А. А. Лигуна и В. Г. Доронина [8] содержится теория одностороннего приближения функций полиномами по чебышевской системе, в частности, довольно подробно рассмотрены вопросы одностороннего интегрального приближения периодических функций тригонометрическими полиномами. В. Г. Доронин и А. А. Лигун [7] нашли величины наилучшего одностороннего интегрального приближения классического ядра Пуассона тригонометрическими полиномами на периоде. В данной работе решена аналогичная задача для произвольной линейной комбинации ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона. Насколько нам известно, полученный результат является новым даже в случае сопряженного ядра Пуассона.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

1. Обозначения. Формулировка основного результата

В дальнейшем используются следующие обозначения: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ — период длины 2π, т. е. полуинтервал $[\eta, \eta+2\pi)$ с отождествленными концами, где η — произвольное фиксированное вещественное число, C — пространство 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций с нормой $\|f\|_C = \max_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|$; L — пространство 2π-периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой $\|f\| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt$; $\mathcal{T}_{n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов $\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t)$ порядка не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами; как обычно, для $g, f \in C$ равенство $g = f$ (неравенство $g \le f$) означает, что $g(x) = f(x)$ ($g(x) \le f(x)$) для всех $x \in \mathbb{R}$;

$$E_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1}} \|g-\tau\|, \quad E^-_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1},\, \tau\le g} \|g-\tau\|, \quad E^+_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1},\, g\le\tau} \|g-\tau\| \tag{1.1}$$

— величины наилучшего приближения, наилучшего приближения снизу и сверху функции $g \in C$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ соответственно по норме пространства L. Тригонометрические полиномы, реализующие точные нижние грани в правых частях равенств (1.1), называются *полиномами наилучшего* (*интегрального*) *приближения функции g и наилучшего одностороннего приближения* (*снизу и сверху*) *соответственно.*

Зафиксируем произвольное число $q \in (-1, 1)$. *Ядром Пуассона и сопряженным ядром Пуассона* называются соответственно (см. [6, т. 1, гл. 1, § 1, с. 12; гл. 3, § 6, формулы (6.2), (6.3)]) функции

$$P(t) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\Big) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t+q^2)}, \tag{1.2}$$

$$Q(t) = \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}.$$

Линейную комбинацию $\Big(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\Big)P(t) + \Big(\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\Big)Q(t) = \Pi_{q,\alpha}(t)$ условимся называть *обобщенным ядром Пуассона* с параметрами $q \in (-1, 1)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задачу наилучшего одностороннего интегрального приближения ядра $\Pi_{q,\alpha}$ в важном частном случае $\alpha = 0$ исследовали В. Г. Доронин и А. А. Лигун. Они нашли величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ тригонометрическими полиномами [7, лемма 3] (см. [8, теорема 3.2.2]), а именно,

$$E^-_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1+q^n}, \quad E^+_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1-q^n}, \quad 0 < q < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение, которое частично вместе с краткой схемой доказательства было анонсировано в [1, теорема 1, лемма 1].

Теорема. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $q \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1 - |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1 + |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{1.3}$$

Полином $\tau^-_{q,\alpha} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ снизу имеет вид

$$\tau^-_{q,\alpha}(t) = \Pi_{q,\alpha}(t) - B(t) = \frac{\Upsilon_{q,\alpha}(t)}{1-q^{2n}},$$

где

$$\Upsilon_{q,\alpha}(t)=\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}q^k\big(1-q^{2(n-k)}\big)\Big[\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{1-q^{2n}}\cos kt+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin kt\Big],$$

$B=B_{q,\alpha,n}$ — *неотрицательная дробь*

$$B(t)=\frac{\gamma\big(\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\big)^2}{1+q^2-2q\cos t}=\frac{\gamma}{2}\,\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{1+q^2-2q\cos t},\tag{1.4}$$

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\left(1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$\cos n\xi=\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}},\quad \sin n\xi=\frac{(1-q^{2n})\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}.$$

Полином $\tau^+_{q,\alpha}$ *наилучшего интегрального приближения сверху функции* $\Pi_{q,\alpha}$ *связан с полином* $\tau^-_{q,\alpha+2}$ *наилучшего приближения снизу функции* $\Pi_{q,\alpha+2}$ *равенством* $\tau^+_{q,\alpha}=-\tau^-_{q,\alpha+2}$.

Обратим внимание, что сумма $E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})+E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})=2|q|^n/(1-q^{2n})$ не зависит от α; кроме того, неотрицательная дробь B, определенная формулой (1.4), явно выражается в терминах параметров q, α, n (без использования параметра ξ)

$$\frac{(1-q^{2n})^2}{q^n(1-q^2)}B(t)$$

$$=\frac{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}+\Big((1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n\Big)\cos nt+(1-q^{2n})\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin nt}{1+q^2-2q\cos t}.$$

З а м е ч а н и е. В случае $\alpha=0$ с помощью замены переменной $x=\cos t$ задача одностороннего интегрального приближения ядра Пуассона $P=\Pi_{q,0}$ сводится к задаче одностороннего приближения простейшей алгебраической дроби на отрезке $[-1,1]$ алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Чебышева первого рода. Производная произвольного порядка указанной простейшей дроби сохраняет знак на $[-1,1]$. Поэтому применение результата Р. Бояника и Р. ДеВора [11, теорема 4 и замечание к ней] дает конструкцию полиномов наилучшего одностороннего приближения. В общем случае $\alpha\in\mathbb{R}$ этот способ нахождения полиномов наилучшего одностороннего приближения неприменим, в том числе в важном частном случае $\alpha=1$, т. е. в случае сопряженного ядра Пуассона $Q=\Pi_{q,1}$.

Принципиальное различие указанных в замечании двух случаев хорошо иллюстрируют приведенные ниже рис. 1, 2, соответствующие случаю $q=1/2$, $n-1=3$. На рис. 1 приведены графики ядра Пуассона P (утолщенная линия) и полиномы его наилучшего приближения снизу и сверху, а на рис. 2 — графики сопряженного ядра Пуассона Q (утолщенная линия) и полиномы его наилучшего одностороннего приближения.

2. Вспомогательные утверждения

Для $\alpha\in\mathbb{R}$, $q\in(-1,1)$, $n\in\mathbb{N}$ положим[2]

$$\mathcal{E}^-_{n-1}(q,\alpha):=E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}),\quad \mathcal{E}^+_{n-1}(q,\alpha):=E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}).\tag{2.1}$$

[2]Краткая запись обозначений (2.1) имеет вид $\mathcal{E}^\pm_{n-1}(q,\alpha):=E^\pm_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$; такой прием сокращенной записи часто используется в литературе, в данной работе он также будет применяться.

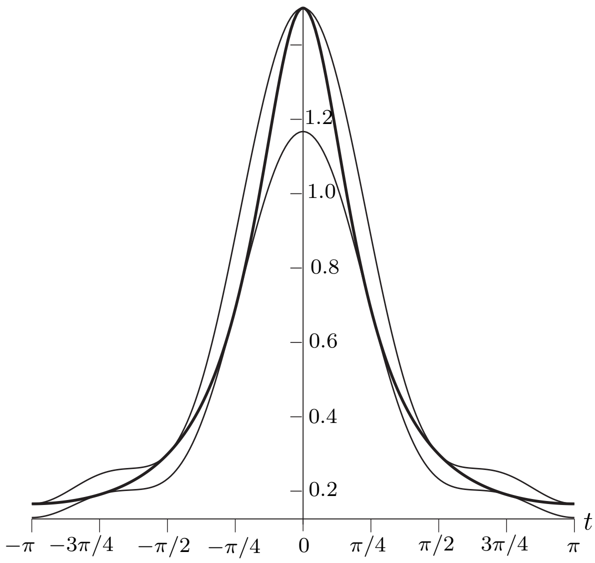

Рис. 1.

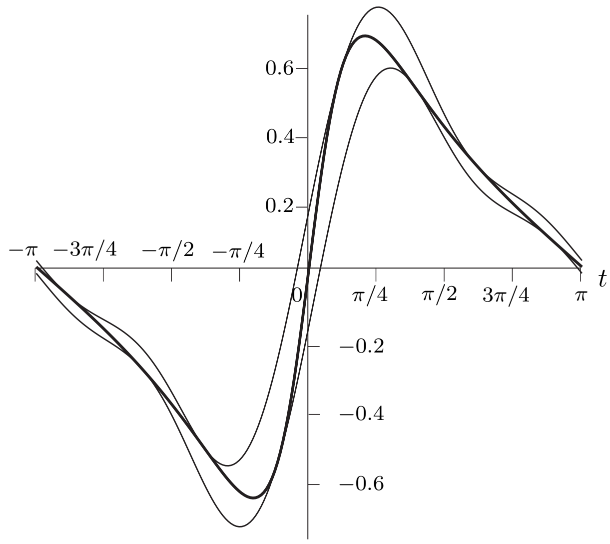

Рис. 2.

Имеем

$$\Pi_{q,\alpha}(t)=\cos\frac{\alpha\pi}{2}P(t)+\sin\frac{\alpha\pi}{2}Q(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\Big(kt-\frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$
$$=\frac{(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t+q^2)}. \tag{2.2}$$

Поскольку $\Pi_{q,\alpha}(t+\pi)=\Pi_{-q,\alpha}(t)$, то

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha)=\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(-q,\alpha)=\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(|q|,\alpha)\quad\text{при}\quad\alpha\in\mathbb{R},\quad q\in(-1,1),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Поэтому задача вычисления величин (2.1) при $q\in(-1,1)$ сводится к случаю[3] $q\in(0,1)$, который в дальнейшем и будет рассматриваться.

Приведем еще одно свойство обобщенного ядра Пуассона

$$\Pi_{q,\alpha+2}(t)=-\Pi_{q,\alpha}(t)\quad\text{при}\quad\alpha\in\mathbb{R},\quad q\in(0,1),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что полином $\tau^{+}_{q,\alpha}$ наилучшего приближения сверху функции $\Pi_{q,\alpha}$ связан с полиномом $\tau^{-}_{q,\alpha+2}$ наилучшего приближения снизу функции $\Pi_{q,\alpha+2}$ формулой

$$\tau^{+}_{q,\alpha}=-\tau^{-}_{q,\alpha+2}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) вытекает также 4-периодичность величин $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$, $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ по α, т. е.

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+4)=\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha),\quad\alpha\in\mathbb{R},\quad q\in(0,1),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.6}$$

поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $\alpha\in[0,4]$. Кроме того, из (2.4) вытекает, что

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+2)=\mathcal{E}^{\mp}_{n-1}(q,\alpha)\quad\text{при}\quad\alpha\in[0,2],\quad q\in(0,1),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Следовательно, $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ выражается через $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$ с помощью формулы (2.7), а именно

$$\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)=\begin{cases}\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha+2) & \text{при}\quad\alpha\in[0,2],\\ \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha-2) & \text{при}\quad\alpha\in[2,4].\end{cases} \tag{2.8}$$

[3] Случай $q=0$ тривиален: $\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(0,\alpha)=0$.

Перейдем к задаче нахождения минимума и максимума ядра $\Pi_{q,\alpha}$. Для $q \in (0,1)$, $\alpha \in [0,4]$ определим $t_1 = t_1(q,\alpha)$, $t_2 = t_2(q,\alpha)$ следующим образом:

$$t_1 = t_1(q,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{1 + q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}} & \text{при} \quad 0 < \alpha < 2, \\[4ex] \dfrac{\alpha\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{1 + q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}} - 2\pi & \text{при} \quad 2 < \alpha < 4; \end{cases} \tag{2.9}$$

при $\alpha = 0, 2, 4$ соответствующие значения t_1 доопределим по непрерывности, т. е. положим

$$t_1(q,0) = -\pi, \quad t_1(q,2) = 0, \quad t_1(q,4) = \pi;$$

$$t_2 = t_2(q,\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{1 - q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}. \tag{2.10}$$

Величины $t_1(q,\alpha)$, $t_2(q,\alpha)$ являются непрерывными возрастающими функциями параметра $\alpha \in [0,4]$. Если α пробегает отрезок $[0,4]$, значения каждой из этих функций пробегает свой отрезок длины 2π, причем $t_1(q,0) = -\pi$, $t_2(q,0) = 0$.

Лемма 1. *При* $q \in (0,1)$, $\alpha \in [0,4]$ *выполняются равенства*

$$\min_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q,\alpha}(t) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{q}{1-q^2}, \quad \max_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q,\alpha}(t) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{q}{1-q^2}.$$

Существуют единственные точки $t_1 = t_1(q,\alpha)$, $t_2 = t_2(q,\alpha)$, *расположенные на периоде* $\mathbb{T}$, *в которых функция* $\Pi_{q,\alpha}(t)$ *достигает своего минимума и максимума соответственно. Явные формулы для указанных точек имеют вид* (2.9), (2.10).

Доказательство. С учетом (2.2) имеем $\Pi'_{q,\alpha}(t) = \dfrac{-q\,\varphi_{q,\alpha}(t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}$, где

$$\varphi_{q,\alpha}(t) = 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2} + \sin\Big(t - \frac{\alpha\pi}{2}\Big) - q^2\sin\Big(t + \frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{2.11}$$

С помощью замены $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ $\Big(\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}\Big)$, где $x = t - \dfrac{\alpha\pi}{2}$, задача нахождения корней тригонометрического полинома $\varphi_{q,\alpha}(t)$ сводится к квадратному уравнению относительно неизвестного y. Решив это уравнение и сделав обратную замену, получим общий вид корней указанного тригонометрического полинома

$$t_1 = \frac{\alpha\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1 - q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}} + 2\pi k, \quad t_2 = \frac{\alpha\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{1 + q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, эти два равенства задают счетное число корней полинома $\varphi_{q,\alpha}(t)$, определенного формулой (2.11), при каждом фиксированном α. Два таких корня $t_1 = t_1(q,\alpha)$, $t_2 = t_2(q,\alpha)$, заданные формулами (2.9), (2.10), являются непрерывными возрастающими функциями параметра $\alpha \in [0,4]$. Значения обобщенного ядра Пуассона в этих точках t_1, t_2 имеют вид

$$\Pi_{q,\alpha}(t_1) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{q}{1-q^2}, \quad \Pi_{q,\alpha}(t_2) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{q}{1-q^2}.$$

Поскольку $\Pi_{q,\alpha}(t_1) < \Pi_{q,\alpha}(t_2)$ и кроме t_1, t_2 на периоде у производной $\Pi'_{q,\alpha}$ нет других нулей, то t_1 и t_2 являются соответственно точками минимума и максимума ядра $\Pi_{q,\alpha}$ на периоде. □

3. Оценки снизу

Обобщенное ядро Пуассона является непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функцией, поэтому в силу теоремы 1.8.1 из [8, гл. 1, § 1.8] существует единственный полином $\tau^-_{n-1} = \tau^-_{n-1,q,\alpha} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$.

Предположим, что квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k \tau(x_k)$$

с неотрицательными коэффициентами $p_1, \dots, p_m$ справедлива для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$. Тогда, как известно (см. [8, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5]), для любой непрерывной 2π-периодической функции g выполняются неравенства (см. [8, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5])

$$E^+_{n-1}(g) \ge \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx, \quad E^-_{n-1}(g) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k). \tag{3.1}$$

С помощью этих неравенств в дальнейшем будет получена оценка снизу величин $E^\pm_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$.

Зафиксируем произвольное вещественное число ϑ. Хорошо известна (см. [6, т. 2, гл. 10, формула (2.5); 8, гл. 1, § 1.7, предложение 1.7.2]) квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\Big(\vartheta + \frac{2k\pi}{n}\Big), \tag{3.2}$$

которая выполняется для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Обратим внимание на то, что правой частью формулы (3.2) определяется линейный оператор, сопоставляющий полиному $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ усреднение его сдвижек. Этот оператор можно продолжить на пространство L естественным образом, положив

$$M_n f(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(t + \frac{2k\pi}{n}\big), \quad f \in L.$$

Для произвольной функции $g \in C$ с помощью неравенств (3.1) и формулы (3.2) приходим к неравенствам [8, гл. 1, § 1.7, следствие 1.7.2]

$$E^+_{n-1}(g) \ge \sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} M_n g(\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx, \quad E^-_{n-1}(g) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx - \inf_{\vartheta\in\mathbb{R}} M_n g(\vartheta). \tag{3.3}$$

Оператор M_n переводит 2π-периодические функции в $\dfrac{2\pi}{n}$ - периодические, оставляет без изменения гармоники $e_\nu(t) = e^{i\nu t}$ порядка $\nu = mn$, где m — произвольное целое число, а остальные гармоники аннулирует. Таким образом, функции $f \in L$ с рядом Фурье $f(t) \sim \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu t}$ оператор M_n сопоставляет функцию $F = M_n f \in L$ с рядом Фурье [6, т. 1, гл. 2, § 1, теорема (1.1)] $M_n f(t) \sim \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_{mn} e^{imnt}$. В частности, обобщенное ядро Пуассона с параметрами q и α оператор M_n переводит в "n-сжатие" обобщенного ядра Пуассона с параметрами q^n и α, т. е.

$$M_n \Pi_{q,\alpha}(t) = \Big(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Big) M_n P(t) + \Big(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Big) M_n Q(t) = \Pi_{q^n,\alpha}(nt).$$

Отсюда с учетом (3.3) и леммы 1 получаем следующие оценки при $q \in (0,1)$:

$$E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \geq \sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} \Pi_{q^n,\alpha}(n\vartheta) - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \max_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q^n,\alpha}(t) - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$= \Pi_{q^n,\alpha}(t_2(\alpha, q^n)) - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\Bigl(1 + q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Bigr), \tag{3.4}$$

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \geq \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \inf_{\vartheta\in\mathbb{R}} \Pi_{q^n,\alpha}(n\vartheta) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \min_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q^n,\alpha}(t)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \Pi_{q^n,\alpha}(t_1(\alpha, q^n)) = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\Bigl(1 - q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Bigr); \tag{3.5}$$

формулы для $t_1(\alpha, q^n)$, $t_2(\alpha, q^n)$ получаются соответственно из формул (2.9), (2.10) путем замены q на q^n.

Оценки (3.4), (3.5) для односторонних приближений классического ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ были получены в [7] (см. [8, гл. 3, § 3.2]).

4. Оценки сверху. Доказательство теоремы

В данном разделе построен полином порядка $n-1$, приближающий $\Pi_{q,\alpha}$ снизу, с помощью которого получена оценка сверху для $E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$, совпадающая с нижней оценкой (3.5).

Задача о приближении в L обобщенного ядра Пуассона $\Pi_{q,\alpha}$ возникла в конце 1930-х годов при нахождении наилучшего приближения в равномерной метрике класса функций $W_\infty(\Pi_{q,\alpha}) = \{f :\ f(x) = c + \int_{\mathbb{T}} \Pi_{q,\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt,\quad \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного (одновременно с задачей Фавара для класса функций W^r_∞). Подробную историю и основные результаты см. в работах М. Г. Крейна [9] ($\alpha = 0$), Б. Надя [12] ($\alpha = 0, \alpha = 1$), А. В. Бушанского [5] ($\alpha \in \mathbb{R}$). Отметим также обзор близких результатов в монографии А. И. Степанца [13, Ch. 7]. Н. А. Барабошкина [2] вычислила величину $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ новым методом, отличным от классического, и получила [3, теорема 1] еще одно выражение для указанной величины, а именно,

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{1}{2\pi}A_{n-1}\Bigl(q, \frac{\alpha\pi}{2}\Bigr), \quad q \in (0,1),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

где $A_{n-1}(q,\theta)$ определяется с помощью $s(q,\theta,n) := \sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\theta + q^{4n}}$ по формуле

$$A_{n-1}(q,\theta) = (2\cos\theta)\operatorname{arctg}\frac{2q^n\cos\theta}{s(q,\theta,n)} + (\sin\theta)\ln\frac{s(q,\theta,n) + 2q^n\sin\theta}{s(q,\theta,n) - 2q^n\sin\theta}.$$

При этом для построения полинома наилучшего интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ на периоде был предложен подход, основанный на представлении тригонометрической дроби $B_n(t) = \dfrac{\gamma^*\sin n(t-\xi^*)}{1+q^2-2q\cos t}$ в виде суммы $B_n = \tau + r$, в которой τ — некоторый тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, а r — остаток. Реализация указанного подхода заключается в подборе параметров γ^*, ξ^* таким образом, чтобы остаток r совпал с $\Pi_{q,\alpha}$. Как отмечается в [2, разд. 1], указанный подход основан на идеях, содержащихся в работах П. Л. Чебышева (1859) [10, разд. 9–11] и С. Н. Бернштейна (1912) [4, ст. 7].

Перейдем к построению полинома наилучшего интегрального приближения снизу ядра $\Pi_{q,\alpha}$. Введем следующие величины:

$$\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(q,\alpha,n) = \frac{2q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\Bigl(1 + q^{2n} - 2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Bigr), \tag{4.1}$$

$$\sigma=\sigma(q,\alpha,n)=\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(\frac{1-q^2}{\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right)=\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}. \tag{4.2}$$

Заметим, что

$$\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n)>0 \quad \text{и} \quad |\sigma(q,\alpha,n)|\le 1 \quad \text{при} \quad q\in(0,1), \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Ключевую роль в дальнейшем играет тригонометрическая дробь

$$B_{q,\alpha,n}(t)=\frac{\widetilde{\gamma}\big(\cos\dfrac{n(t-\widetilde{\xi})}{2}\big)^2}{1+q^2-2q\cos t},$$

в которой величина $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n)$ задана формулой (4.1), а параметр $\widetilde{\xi}$ связан с величиной (4.2) соотношением

$$\cos n\widetilde{\xi}=\sigma(q,\alpha,n). \tag{4.4}$$

При заданных $q\in(0,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ дробь $B_{q,\alpha,n}(t)$ неотрицательна при всех $t\in\mathbb{R}$ в силу первого неравенства в (4.3). Связь этой дроби с обобщенным ядром Пуассона выражает

Лемма 2. *Пусть $q\in(0,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда разность $B_{q,\alpha,n}-\Pi_{q,\alpha}=Y_{q,\alpha,n}$ представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n-1$. При этом полином $\tau^-:=-Y_{q,\alpha,n}\in\mathcal{T}_{n-1}$ удовлетворяет неравенству $\tau^-\le\Pi_{q,\alpha}$. Кроме того,*

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})\le\|\Pi_{q,\alpha}-\tau^-\|=\|B_{q,\alpha,n}\|=\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(1-q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Паре вещественных чисел γ и ξ сопоставим дробь

$$B(t)=\frac{\gamma\big(\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\big)^2}{1+q^2-2q\cos t}=\frac{\gamma}{2}\,\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{1+q^2-2q\cos t}. \tag{4.6}$$

Применив лемму 1 из [2] к (4.6), получим представление $B=Y+H$, в котором Y — некоторый полином из $\mathcal{T}_{n-1}$, а H — остаток от деления, который задается формулой

$$H(t)=\frac{\gamma}{2}\frac{1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t}{1+q^2-2q\cos t}, \quad c(n)=\frac{1+q^{2n}}{2q^n}, \quad d(n)=\frac{1-q^{2n}}{(1-q^2)q^{n-1}}. \tag{4.7}$$

Подберем положительный параметр γ и вещественный параметр ξ так, чтобы остаток H совпал с ядром $\Pi_{q,\alpha}$. Для этого по переменной $t\in\mathbb{R}$ должно выполняться тождество

$$\frac{\gamma}{2}\frac{1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t}{1+q^2-2q\cos t}\equiv\frac{(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t+q^2)},$$

которое равносильно тождеству

$$\gamma\big(1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t\big)\equiv(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t.$$

Отсюда приходим к системе двух уравнений

$$\gamma\big(1+c(n)\cos n\xi\big)=(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}, \quad \gamma d(n)\sin n\xi=2q\sin\frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.8}$$

с двумя неизвестными γ и ξ, причем нас интересует решение с положительным числом γ. Перепишем систему в эквивалентном виде, используя обозначение $\lambda:=\dfrac{1}{\gamma}$,

$$\cos n\xi=\frac{1}{c(n)}\left(\lambda(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right), \quad \sin n\xi=\frac{2\lambda q}{d(n)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{4.9}$$

Возведя оба равенства системы в квадрат и складывая, получим уравнение для неизвестного положительного λ:

$$1=\frac{1}{c^2(n)}\left(\lambda(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right)^2+\frac{4\lambda^2q^2}{d^2(n)}\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}.$$

После элементарных преобразований получим квадратное уравнение $a\lambda^2+b\lambda+v=0$ с коэффициентами

$$a=(1-q^2)^2\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}+\left(\frac{2qc(n)}{d(n)}\right)^2\sin^2\frac{\alpha\pi}{2},\quad b=-2(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2},\quad v=1-c^2(n).$$

Используя формулы для $c(n)$, $d(n)$ (см. (4.7)), находим

$$a=\frac{(1-q^2)^2}{(1-q^{2n})^2}\left((1+q^{2n})^2-4q^{2n}\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Вычислим коэффициент $v=1-c^2(n)=1-\dfrac{(1+q^{2n})^2}{4q^{2n}}=-\dfrac{(1-q^{2n})^2}{4q^{2n}}$ и дискриминант квадратного уравнения

$$D=b^2-4av=4(1-q^2)^2\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}+4\frac{(1-q^2)^2}{(1-q^{2n})^2}\frac{(1-q^{2n})^2}{4q^{2n}}\left((1+q^{2n})^2-4q^{2n}\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$=4(1-q^2)^2\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{4(1-q^2)^2}{4q^{2n}}\left((1+q^{2n})^2-4q^{2n}\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\right)=\frac{(1-q^2)^2(1+q^{2n})^2}{q^{2n}}.$$

Дискриминант D и коэффициент a являются положительными, кроме того $|b|<\sqrt{D}$, поэтому квадратное уравнение имеет два различных корня $\lambda_1<\lambda_2$, причем разных знаков. Нас интересует положительный корень $\lambda=\lambda_2$. Учитывая найденные выше выражения для a и b, получаем

$$\gamma=\frac{1}{\lambda}=\frac{2a}{-b+\sqrt{D}}=\frac{2q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\left(1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right)=\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n). \tag{4.10}$$

Отсюда с помощью первого уравнения системы (4.9) приходим к равенствам

$$\cos n\xi=\frac{1}{c(n)}\left(\lambda(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right)=\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(\frac{1-q^2}{\gamma}\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right), \tag{4.11}$$

которые с учетом (4.2) равносильны соотношению (4.4).

Таким образом, первое утверждение леммы 2 доказано. Проверим справедливость оставшихся утверждений. Неравенство $\tau^-\le\Pi_{q,\alpha}$ следует из неотрицательности дроби B, поскольку $\gamma>0$ в силу (4.10). Отсюда получаем первое неравенство в (4.5). Осталось доказать последнее равенство в (4.5). Имеем

$$\|B\|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}B(t)\,dt=\frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt$$

$$=\frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt+\frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt\cos n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt$$

$$=\frac{\gamma}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(t)\,dt+\frac{\gamma\cos n\xi}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(t)\cos nt\,dt=\frac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)},$$

где P — ядро Пуассона (см. (1.2)). Таким образом, $\|B\| = \dfrac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)}$. Отсюда с учетом формул (4.10), (4.11) приходим к равенству $\|B\| = \dfrac{q^n}{1-q^{2n}}\left(1 - q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$. □

Доказательство теоремы. Первое равенство в (1.3) при $q \in (0,1)$ следует из (3.5) и (4.5). Отсюда с помощью (2.3), (2.6) и (2.8) получаем оба равенства в (1.3) при $q \in (-1,1)$. Второе утверждение теоремы следует из того, что первое неравенство в (4.5) обращается в равенство, а также из равенств (4.1), (4.2), (4.4) и второго равенства в (4.8). Равенство (2.5) влечет последнее утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Наум Т.З.** Односторонние приближения в L линейной комбинации ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона тригонометрическими полиномами // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе: Полиграфия ООО “Офсет”, 2016. С. 44–49.
2. **Барабошкина Н.А.** Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 79–86.
3. **Барабошкина Н.А.** Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.
4. **Бернштейн С.Н.** Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). 581 с.
5. **Бушанский А.В.** О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1978. С. 2–37.
6. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с; Т. 2. 538 с.
7. **Доронин В.Г., Лигун А.А.** Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1979. № 8 (207). С. 20–25.
8. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
9. **Крейн М.Г.** К теории наилучшего приближения // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
10. **Чебышев П.Л.** Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций // Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2: Математический анализ. С. 151–235.
11. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 12. P. 139–164.
12. **Sz. Nagy B.** Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, 1938. Bd. 90. S. 103–134.
13. **Stepanets A.I.** Methods of approximation theory. Leiden; Boston: VSP, 2005. 919 p.

Поступила 26.09.2016

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук , зав. отделом
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Наум Татьяна Зиновьевна
математик, магистрант
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: tanusha502_1993@mail.ru

REFERENCES

1. Babenko A.G., Naum T.Z. One-sided approximations in L of a linear combination of the Poisson kernel and its conjugate kernel by trigonometric polynomials. *Proc. Internat. Summer Math. Stechkin School-Conf. on Function Theory*, Dushanbe: Polygraphy Ltd “Ofset”, 2016, pp. 44–49 (in Russian).
2. Baraboshkina N.A. L-approximation of a linear combination of the Poisson kernel and its conjugate kernel by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Instit. Math*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. S59–S67.
3. Baraboshkina N.A. Approximation of harmonic functions by algebraic polynomials on a circle of radius smaller than one with constraints on the unit circle. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 19, no. 2, 2013, pp. 71–78 (in Russian).
4. Bernstein S.N. Collected Works (Russian): Vol. 1: The constructive theory of functions (1905–1930), transl.: Atomic Energy Commission, Springfield, Va, 1958.
5. Bushanskii A.V. On the best harmonic approximation in the mean of some functions. *Investigations in the Theory of Approximation of Functions and Their Applications*, Institute of Mathematics Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 1978, pp. 29–37 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric serie*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 1959, Vol. 1,2.
7. Doronin V.G., Ligun A.A. Exact values of best one-sided approximations of certain classes of periodic functions. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 20–25.
8. Korneichuk N.P., Ligun A.A., Doronin V.G. *Approksimaciya s ogranicheniyami* (Approximation with Constraints). Kiev: Naukova Dumka, 1976, 252 p. (in Russian).
9. Krein M.G. On theory of best approximation of periodic functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1938, vol. 18, no. 4–5, pp. 245–249 (in Russian).
10. Chebyshev P.L. Problems about smallest quantities connected with an approximate representation of a function. *Complete Collected Works*, in 5 vol., Moscow: Izd. AN SSSR, 1947, vol. 2, pp. 151–235 (in Russian).
11. Bojanic R., DeVore R. On polynomials of best one-sided approximation. *Enseign. Math.*, 1966, vol. 12, pp. 139–164.
12. Sz. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall, *Ber. Verh. sächs. Akad.*, Leipzig, 1938, Bd. 90, S. 103–134.
13. Stepanets A.I. Methods of approximation theory. Leiden, Boston: VSP, 2005, 919 p.

A. G. Babenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: babenko@imm.uran.ru .

T. Z. Naum, mathematician, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: tanusha502_1993@mail.ru .