ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.852.2

МНОЖЕСТВО ЦЕЛЕВЫХ ВЕКТОРОВ ЗАДАЧИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РАЗРЫВОМ ДВОЙСТВЕННОСТИ[1]

Н. Н. Астафьев, А. В. Иванов, С. П. Трофимов

Для задач полубесконечного линейного программирования (ПбЛП) предлагается геометрический способ анализа соотношений двойственности пары задач, основанный на использовании конической оболочки коэффициентов системы ограничений. Устанавливается связь наличия разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. На основе геометрического подхода строится противоположная пара двойственных задач и исследуются соотношения двойственности для этой пары. Построен нетривиальный пример задачи ПбЛП с n переменными, для которой разрыв двойственности выполняется для целевых векторов, образующих выпуклое множество с относительной размерностью $n-1$.

Ключевые слова: полубесконечное линейное программирование, разрыв двойственности, геометрический подход, выпуклый незамкнутый конус, множество целевых векторов.

N. N. Astaf'ev, A. V. Ivanov, S. P. Trofimov. The set of target vectors in a problem of semi-infinite linear programming with a duality gap.

We propose a geometric method for the analysis of duality relations in a pair of semi-infinite linear programming (SILP) problems. The method is based on the use of the conical hull of the coefficients in the constraint system. A relation between the presence of a duality gap and the nonclosedness of the boundary of the conical hull of points in a multidimensional space is established. The geometric approach is used to construct an opposite pair of dual problems and to explore the duality relation for this pair. We construct a nontrivial example of a SILP problem in which the duality gap occurs for noncollinear target vectors.

Keywords: semi-infinite linear programming, duality gap, geometric approach, convex nonclosed cone, set of target vectors.

MSC: 90C34

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-43-52

Введение

Задачи полубесконечного линейного программирования (ПбЛП) являются важным объектом исследования в теории оптимизации и интенсивно изучаются, начиная с 60-х годов прошлого века [1]. За это время для задач ПбЛП были поставлены и исследованы вопросы, аналогичные конечномерным задачам ЛП [2]. Принципиальным отличием задачи ПбЛП от конечномерной задачи ЛП явился тот факт, что в задачах ПбЛП возможен ненулевой *разрыв двойственности* [3–5]. Возникновение последнего затрудняет анализ и численное решение задачи ПбЛП и рассматривается как недостаточное качество задания ограничений множества допустимых решений [6, с. 36]. Стоит отметить, что большинство результатов для задач ПбЛП обычно формулируется в предположении нулевого разрыва двойственности. С другой стороны, известны примеры задач ПбЛП, для которых существование или отсутствие разрыва двойственности зависит от выбора того или иного эквивалентного способа записи ограничений. Поэтому задача ПбЛП с разрывом двойственности до сих пор считалась нежелательной и экзотической. В настоящей работе мы показываем теоретическую важность исследования таких задач и приводим пример, в котором разрыв двойственности наблюдается для целевых

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

векторов из выпуклого множества с относительной размерностью $n-1$. Тем самым показывается, что задачи с разрывом двойственности перестают быть уникальным явлением и образуют богатое семейство задач.

Таким образом, мотивацией нашего исследования является построение задач ПбЛП, в которых для нетривиального множества целевых векторов c имеет место конечный разрыв двойственности.

Статья организована следующим образом.

Разд. 1 посвящен рассмотрению задачи ПбЛП с точки зрения геометрического подхода. Мы показываем важность исследования таких задач и связываем наличие разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. Геометрический подход применяется к противоположной паре двойственных задач, получающейся из исходной пары двойственных задач заменой критериев и знаков неравенств ограничений на противоположные. Приводится пример анализа соотношений двойственности на основе геометрического подхода.

В разд. 2 рассматривается нетривиальный пример полубесконечной задачи ЛП с n переменными. Показано, что целевые векторы, для которых имеется разрыв двойственности, заполняют $(n-1)$-мерную область.

1. Геометрический подход в полубесконечном линейном программировании

1.1. Двойственные задачи полубесконечного линейного программирования

Пара двойственных задач линейного программирования в хаусдорфовых топологических векторных пространствах имеет вид:

$$\inf\{(x,y_0) : Tx \in z_0 + Q_Z,\ x \in Q_X\}, \quad x \in X, \quad y_0 \in Y, \tag{1.1}$$

$$\sup\{(z_0,w) :\ -T^*w + y_0 \in Q_X^*,\ w \in Q_Z^*\}, \quad z_0 \in Z, \quad w \in W. \tag{1.2}$$

Здесь пространства X и Y, Z и W находятся в соотношении двойственности; T — линейный непрерывный оператор из X в Z; $T^*\colon W \to Y$ — сопряженный к T оператор; $Q_X \subset X$, $Q_Z \subset Z$ — замкнутые выпуклые конусы; $Q_X^* \subset Y$, $Q_Z^* \subset W$ — сопряженные конусы.

Традиционно рассматриваются два частных случая пары двойственных задач (1.1)–(1.2), которые сводятся к эквивалентным задачам ПбЛП.

1. Пространства X и Y — конечномерные пространства $\mathbb{R}^n$, Z и W — бесконечномерные пространства над полем $\mathbb{R}$, конусы Q_X и Q_Z являются неотрицательными ортантами. Тогда задача (1.1) принимает вид полубесконечной задачи линейного программирования

$$v = \inf\{(x,c)\colon Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}. \tag{1.3}$$

В этой задаче A — полубесконечная матрица, строки которой $a_\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega$, Ω — некоторое счетное множество индексов, $b = (b_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — вектор-столбец из пространства $\mathbb{R}^\Omega$, v — оптимальное значение задачи.

Двойственная задача (1.2) принимает вид

$$v^* = \sup\{(u,b)\colon A^T u \leqslant c,\ u \geqslant 0,\ u \in F\}, \tag{1.4}$$

где F — подпространство последовательностей из $\mathbb{R}^\Omega$ с конечным носителем (в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля), v^* — оптимальное значение двойственной задачи.

Применяя стандартную технику замены переменных, перепишем пару двойственных задач (1.3), (1.4) в эквивалентной, более удобной для нас, форме:

$$v = \inf\{(x, c)\colon Ax \geqslant b\}, \tag{1.5}$$

$$v^* = \sup\{(u, b)\colon A^T u = c,\ u \geqslant 0,\ u \in F\}. \tag{1.6}$$

2. Пространства X и Y — конечномерные пространства $\mathbb{R}^n$; Z и W — конечномерные пространства $\mathbb{R}^m$; Q_X и Q_Z — замкнутые выпуклые конусы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Преобразуем задачу (1.1) к виду (1.5). Ограничение $x \in Q_X$ задачи (1.1) эквивалентно системе линейных неравенств

$$(x, y) \geqslant 0 \quad \forall y \in Q_X^*. \tag{1.7}$$

Пусть $\{e_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ — базис единичных ортов пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, и ограничение $Tx \in z_0 + Q_Z$ задачи (1.1) эквивалентно системе

$$\Big(T\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) - z_0, w\Big) \geqslant 0 \quad \forall w \in Q_Z^*$$

(несчетное множество можно заменить всюду плотным счетным подмножеством), что равносильно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, (Te_i, w) \geqslant (z_0, w) \quad \forall w \in Q_Z^*. \tag{1.8}$$

Объединенная система ограничений (1.7) и (1.8) аналогична системе ограничений задачи (1.5). Таким образом, задача ПбЛП представляет собой форму записи многих оптимизационных задач.

Известно, что для пары задач (1.5), (1.6) справедливо слабое соотношение двойственности $v \geqslant v^*$. В основном исследуются условия, при которых выполняется сильное соотношение двойственности

$$v = v^*. \tag{1.9}$$

В [5; 7] в качестве достаточного условия для (1.9) требуются выполнение условия Слейтера для системы ограничений задачи (1.5) и замкнутость конической оболочки множества

$$K = \operatorname{cone}\{[a_\alpha;\ b_\alpha] : \alpha \in \Omega\}.$$

Здесь и далее запись $[a_\alpha;\ b_\alpha]$ означает присоединение числа b_α к вектору-строке a_α.

В данной статье исследуется случай, когда

$$v > v^*, \tag{1.10}$$

т. е. когда задача ПбЛП имеет ненулевой *разрыв двойственности*, определяемый значением

$$\delta = v - v^*.$$

1.2. Геометрический подход к анализу разрыва двойственности

В работе используется геометрический подход [8], связывающий неравенство (1.10) со свойствами некоторого промежутка. Данный подход позволяет взглянуть на задачи (1.5) и (1.6) с некоторой единой геометрической точки зрения. Нам понадобятся следующие известные результаты (см., например, [3; 8]). Введем обозначение

$$P = \{[c;\ r]\colon r \in \mathbb{R}\}.$$

Из геометрических соотношений между конусом K и прямой P можно получить ряд важных свойств задач (1.5) и (1.6). Возможны следующие случаи взаимного расположения K и P:

$$\overline{K} \cap P = \varnothing, \tag{1.11}$$

$$K \cap P = \varnothing, \quad \overline{K} \cap P \neq \varnothing, \tag{1.12}$$

$$K \cap P \neq \varnothing. \tag{1.13}$$

Здесь $\overline{K}$ — замыкание конуса K.

Для каждого из случаев (1.11)–(1.13) справедливы следующие легко проверяемые утверждения.

Утверждение 1. *Если выполняется* (1.11)*, то*
1) $v = +\infty$, $v^* = -\infty$, *если система* $Ax \geqslant b$ *несовместна*;
2) $v = -\infty$, $v^* = -\infty$, *если система* $Ax \geqslant b$ *совместна.*

Утверждение 2. *Если выполняется* (1.12)*, то*

$$v = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\}, \quad v^* = -\infty.$$

Утверждение 3. *Если выполняется* (1.13)*, то*

$$v = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\},$$

$$v^* = \sup\{r\colon [c;\ r] \in K\}. \tag{1.14}$$

Построим с помощью конуса K и прямой P одномерный интервал S, который назовем *характеристическим интервалом* задачи ПбЛП. С учетом утверждения 3 определим интервал S следующим образом:

$$S = [\sup\{r\colon [c;r] \in K\}, \sup\{r\colon [c;r] \in \overline{K}\}].$$

Интервал S, если он не пустой, представляет собой точку, отрезок, луч или всю прямую P и расположен в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Если интервал S не вырождается в точку, то он содержится на границе конуса $\overline{K}$, но не содержится в самом конусе K. В этом случае конус K не является замкнутым. Таким образом, интервал S содержится в незамкнутой части границы конуса K, позволяет определить оптимальные значения пары двойственных задач (1.5) и (1.6) и, следовательно, наличие разрыва двойственности.

Теорема 1. *Для характеристического интервала S имеют место равенства*

$$v = \sup\{r\colon [c;r] \in S\}, \quad v^* = \inf\{r\colon [c;r] \in S\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема вытекает из определения интервала S и утверждений 2 и 3.

Следствие 1 (Критерий разрыва двойственности). *Пусть $v^* > -\infty$. У пары задач* (1.5) *и* (1.6) *существует разрыв двойственности тогда и только тогда, когда множество S имеет непустую внутренность.*

Из теоремы 1 следует, что конус K и прямая P определяют оптимальные значения задач (1.5) и (1.6). Исследуем вопрос о разрешимости двойственной задачи. Двойственная задача (1.6) достигает своего значения тогда и только тогда, когда достигается супремум (1.14) в утверждении 3.

Переход от множества $\{[a_\alpha;\ b_\alpha],\ \alpha \in \Omega\}$ к конусу K может привести к тому, что часть и таким образом ограничения задачи (1.5) теряют свою индивидуальность. Поэтому восстановить оптимальное решение задачи (1.6), вообще говоря, невозможно.

Рассмотрим разрешимость исходной задачи. Известно, что в случае совместности системы ограничений задачи (1.5) функция оптимума $v(c)$ является собственной, вогнутой и по утверждению 3 $v(c) = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\}$. В [9, следствие 23.5.3] утверждается, что субдифференциал $\partial v(c)$ представляет собой все множество оптимальных решений задачи (1.5). Из геометрического смысла субдифференциала получаем

Утверждение 4. *Задача* (1.5) *имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда через точку* $[c; v(c)]$ *можно провести гиперплоскость такую, что ее подграфик содержит конус* $\overline{K}$.

З а м е ч а н и я.

(1) Из [10, теорема 3] вытекает следующее. Если конус K замкнут, то двойственная задача (1.6) достижима. Если конус $\{[Ax + z; (x, c) - r]\colon x \in \mathbb{R}^n,\ z \geqslant 0,\ r \geqslant 0\}$ замкнут в декартовом произведении $\mathbb{R}^\Omega \times \mathbb{R}^1$ с топологией покоординатной сходимости, то исходная задача достижима. А из утверждения 3 вытекает, что из одного конуса K можно определить достижимость задач (1.5) и (1.6).

(2) В пространстве $\mathbb{R}^\Omega$ с покоординатной сходимостью положительный конус не имеет внутренности. Поэтому условия типа Слейтера (например, существует x_0 такой, что $(x_0, a_\alpha) > b_\alpha$ для каждого $\alpha \in \Omega$) недостаточны для анализа разрыва двойственности. Это и неудивительно, так как данное условие Слейтера равносильно $[x_0;\ -1] \in \mathrm{int} K^*$ и не связано с границей конуса K, от которой в соответствии с утверждением 3 зависит разрыв.

(3) Из утверждений 2 и 3 легко вывести теорему о слабой двойственности [5] в несколько измененной формулировке: если $v(c_0)$ конечно, то

$$v(c_0) = \lim_{dB(c_0)\to 0} \sup_{c \in B(c_0)} v^*(c), \tag{1.15}$$

где $B\,(c_0)$ — шар с центром в точке c_0 и радиусом $dB(c_0)$.

В (1.15) вектор c берется из телесной окрестности $B(c_0)$ вектора c_0. Данный результат основан на том, что окрестность $B(c_0)$ пересекается с внутренностью конуса, натянутого на векторы a_α, и для векторов c из этого пересечения разрыва двойственности нет. Однако анализ поведения функции $v^*(c)$ в этой окрестности не проводился. Ниже в разд. 2 мы показываем, что в окрестности вектора c_0 может иметь место конечный разрыв двойственности для множества целевых векторов с относительной размерностью $n - 1$.

1.3. Геометрический подход к построению противоположной пары двойственных задач

Заменим в исходной паре двойственных задач (1.5)–(1.6) критерий и знаки неравенств в системе ограничений на противоположные. Полученную пару задач назовем *противоположной парой двойственных задач* ЛП [8]

$$v' = \sup\{(x, c)\colon Ax \leqslant b\}. \tag{1.16}$$

$$v'^* = \inf\{(b, u)\colon A^T u = c,\ u \geqslant 0\}. \tag{1.17}$$

Повторное применение процедуры построения противоположной пары задач возвращает нас к исходной паре задач (1.5)–(1.6). Таким образом, пара противоположных задач и пара двойственных задач ЛП обладают одним и тем же свойством взаимной обратимости. Заметим, что в работе [11] аналогичная пара задач строится с игровой точки зрения.

Рассмотрим противоположную пару задач с точки зрения геометрического подхода.

Теорема 2. *Для противоположной пары задач* (1.16)–(1.17) *справедливы соотношения*

$$v' = \inf\{t\colon [c;t] \in \overline{K}\},$$

$$v'^{*} = \inf\{t\colon [c;t] \in K\},$$

при этом

$$v \geqslant v^{*} \geqslant v'^{*} \geqslant v'. \tag{1.18}$$

Доказательство. Найдем v'. Используем известное правило замены критериев при оптимизации произвольной функции $f(x)$: $\sup f(x) = -\inf(-f(x))$. Тогда $v' = -\inf\{(x,-c)\colon -Ax \geqslant -b\}$. Используя утверждение 3, продолжаем

$$v' = -\sup\{r\colon [-c;r] \in -\overline{K}\} = -(-\inf\{-r\colon [-c;r] \in -\overline{K}\}) = \inf\{-r\colon [-c;r] \in -\overline{K}\}.$$

Сделаем замену $t = -r$. Получаем

$$v' = \inf\{t\colon [-c;-t] \in -\overline{K}\} = \inf\{t\colon [c;t] \in \overline{K}\}.$$

Аналогично получаем

$$v'^{*} = \inf\{t\colon [c;t] \in K\} \leqslant \sup\{t\colon [c;t] \in K\} = v^{*}.$$

Относительно ограничений противоположной задачи можно привести следующие легко проверяемые утверждения.

Утверждение 5. *Если $M = \{x\colon Ax \geqslant b\}$ — непустое ограниченное множество, не состоящее из одной точки, то $M' = \{x\colon Ax \leqslant b\} = \varnothing$.*

Утверждение 6. *Пусть $M = \{x\colon Ax \geqslant b\}$ неограничено. Если множество $M' = \{x\colon Ax \leqslant b\}$ непустое, то оно неограничено.*

Из утверждений 5 и 6 следует, что противоположная задача может оказаться полезной именно при наличии конечного разрыва двойственности для задач (1.5) и (1.6), так как этот разрыв существует только тогда, когда $\{x\colon Ax \geqslant b\}$ неограничено.

Рассмотрим пример, в котором исходная и противоположная задачи ПбЛП имеют конечные разрывы двойственности.

Пример 1. Найти $\inf x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} \qquad\qquad x_2 \geqslant 1, \\ \qquad\qquad x_2 \geqslant 2, \\ (1/m)x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ (1/m)x_1 + x_2 \geqslant 3, \quad m = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Конус K, натянутый на точки

$$C = [0,1;\ 1], \quad B = [0,1;\ 2], \quad D_m = [1/m,1;\ 0], \quad A_m = [1/m,1;\ 3],$$

не замкнут и содержится в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Последовательность $\{A_m\}$ сходится к точке $A = [0,1;\ 3]$, $\{D_m\}$ сходится к точке $D = [0,1;\ 0]$, причем точки A и D лежат на незамкнутой границе конуса K. Прямая $P = \{[0,1;\ r],\ r \in \mathbb{R}\}$ проходит через точки A, B, C и D. Отрезок $[A,B]$ является характеристическим для исходной задачи, а отрезок $[C,D]$ — для противоположной задачи. Используя теорему 2, получаем

$$v = 3, \quad v^{*} = 2, \quad v'^{*} = 1, \quad v' = 0.$$

Результаты численного анализа соотношений двойственности

M	v	v^*	v'^*	v'
100	2.00000	2.00000	1.00000	1.00000
1000	2.99800	2.00000	1.00000	$1.20669 \cdot 10^{-4}$
10000	2.99980	2.00000	1.00000	$1.18445 \cdot 10^{-5}$
100000	3.00000	2.00000	1.00000	$1.18193 \cdot 10^{-7}$

Для проведения численного анализа соотношений двойственности (1.18) разработана программа на языке MATLAB [12]. Оптимальные значения v и v' задач (1.5), (1.16) находились с помощью оптимизационной функции fseminf, оптимальные значения v^* и v'^* задач (1.6), (1.17) — с помощью оптимизационной функции linprog. Особенностью разработанной программы является указание конечного множества значений переменной $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$ в полубесконечных ограничениях исходной задачи, что приводит к аппроксимации задачи ПбЛП задачей ЛП с конечным числом ограничений.

Стоит отметить, что указанная аппроксимация задачи ПбЛП с разрывом двойственности может привести к изменению оптимального значения обеих задач [13]. В перспективе предполагается разработка новой MATLAB-программы с возможностью для пользователей указания бесконечной последовательности ограничений.

Результаты вычислений для примера 1 сведены в таблицу.

2. Размерность множества целевых векторов задачи полубесконечного линейного программирования с разрывом двойственности

Рассмотрим задачу ПбЛП L_n с n переменными. Обозначим через $DG(L_n)$ множество целевых векторов, при которых для пары двойственных задач L_n и L_n^* имеет место конечный разрыв двойственности $-\infty < v^* < v < \infty$. Очевидно, $DG(L_n)$ содержится в конической оболочке векторов a_α.

Множество $DG(L_n)$ может быть пустым. В этом случае для любого целевого вектора c или выполняется строгое соотношение двойственности, или одно из оптимальных значений v или v^* может быть бесконечным по причине неограниченности исходной задачи или пустоты допустимого множества. Можно построить примеры, когда $DG(L_n)$ не обладает свойствами выпуклости и замкнутости.

Рассмотрим вопрос об относительной размерности $DG(L_n)$.

Утверждение 7. *Пусть P — произвольное выпуклое подмножество из $DG(L_n)$. Относительная размерность подмножества P не превосходит величины $n-1$.*

Доказательство. Допустим $DG(L_n)$ содержит телесное выпуклое подмножество P с размерностью n и целевой вектор $c \in \operatorname{int}(P)$. В [2] показано, что если $c \in \operatorname{int}(\operatorname{cone}\{a_\alpha,\ \alpha \in \Omega\})$, то равенство (1.9) имеет место. Таким образом, для вектора c отсутствует разрыв двойственности, т. е. $c \notin DG(L_n)$. Получили противоречие.

Утверждение доказано.

Пример 2. Рассмотрим задачу ПбЛП с n переменными, для которой разрыв двойственности выполняется на выпуклом множестве целевых векторов, имеющем относительную размерность $n-1$. Система ограничений задачи имеет вид

$$\begin{cases} (1-1/m)x_1 + x_2 + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ (1-1/m)x_1 + x_3 + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ \dots\dots\dots \\ (1-1/m)x_1 + x_{n-1} + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ (1-1/m)x_1 - x_2 + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1 + x_3 \geqslant 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_{n-1} \geqslant 1, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Здесь $m = 2, 3, \dots$. Для рассматриваемой системы конус K порождается следующими точками:

$$A_m^{(1)} = [1-1/m, 1, 0, \dots, 0, 1/m;\ 2]\,, \quad A_m^{(2)} = [1-1/m, 0, 1, \dots, 0, 1/m;\ 2]\,, \dots,$$

$$A_m^{(n-2)} = [1-1/m, 0, 0, \dots, 1, 1/m;\ 2]\,, \quad B_m = [1-1/m, -1, 0, \dots, 0, 1/m;\ 2]\,, \quad m = 2, 3, \dots;$$

$$C^{(1)} = [1, 1, 0, \dots, 0, 0;\ 1]\,, \dots, C^{(n-2)} = [1, 0, 0, \dots, 1, 0;\ 1]\,,$$

$$D = [1, -1, 0, \dots, 0, 0;\ 1]\,, \quad h = [0, 0, 0, \dots, 0, 0;\ -1]\,.$$

Последовательности $\{A_m^{(i)}\}$ $(m = 2, 3, \dots)$ сходятся к точкам

$$A^{(i)} = [1, 0, \dots, 1_{i+1}, \dots, 0;\ 2]\,, \quad i = \overline{1, n-2},$$

где запись 1_{i+1} означает, что на $i+1$ месте стоит единица. Последовательность $\{B_m\}$ сходится к точке $B = [1, -1, 0, \dots, 0, 0;\ 2]$.

Рассмотрим n-мерную гиперплоскость H в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемую уравнением

$$([a;\ b], d) = 0, \quad d = [0, 0, \dots, 0, 1_n;\ 0],$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$ являются переменными. Очевидно, точки

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-2)},\ B,\ C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(n-2)},\ D$$

лежат в H, а элементы последовательностей $\{A_m^{(1)}\}, \{A_m^{(2)}\}, \dots, \{A_m^{(n-2)}\}, \{B_m\}$ лежат в открытом полупространстве $([a;\ b], d) > 0$.

Легко показать, что точки $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-2)}$, B не могут быть получены как выпуклая комбинация векторов $C^{(i)}$, $i = \overline{1, n-2}$ и D. Отсюда вытекает, что точки $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,…, $A^{(n-2)}$, B принадлежат замыканию конуса K, но не самому K, т. е. лежат на незамкнутой части границы конуса K. Аналогичным свойством обладают все точки открытых интервалов $(A^i,\ C^i)$, $i = \overline{1, n-2}$, и $(B,\ D)$.

Рассмотрим множество G целевых векторов

$$g^{(i)} = [1, 0, \dots, 1_{i+1}, \dots, 0;\ 0], \quad i = \overline{1, n-2}, \quad g = [1, -1, 0, \dots, 0, 0;\ 0].$$

Векторы множества G линейно независимы. Это вытекает из того, что ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен $n-1$. Таким образом, относительная размерность G равна $n-1$. Очевидно, что $G \subset H$.

Для каждого целевого вектора $c \in G$ по утверждению 3 выполняется следующее свойство.
1. $v = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\} = 2$, и супремум достигается в точке $A^{(i)}$ или B.
2. $v^* = \sup\{r\colon [c;\ r] \in K\} = 1$, и супремум достигается в соответствующей точке $C^{(i)}$ или D. Аналогичные соотношения справедливы для всех целевых векторов из выпуклой оболочки множества G.

Заявленное выше свойство примера 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chames A., Cooper W. W., Kortanek K. O.** A duality theory for convex programs with convex constraints // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68, no. 6. P. 605–608.
2. **Goberna M. A., Lopez M. A.** Linear semi-infinite optimization. Chichester: Wiley, 1998. 356 p.
3. **Karney D .F.** Duality gaps in semi-infinite linear programming — an approximation problem // Math. Progr. 1981. Vol. 20, no. 1. P. 129–143.
4. **Soyster A. L.** A note on duality gaps in linear programming over convex sets // J. Optim. Theory Appl. 1974. Vol. 13, no. 4. P. 484–489.
5. **Duffin R. J., Karlovitz L. A.** An infinite linear program with a duality gap // Management Sci. 1965. Vol. 12, no. 1. P. 122–134.
6. **Glashoff K., Gustafson S. A.** Linear optimization and approximation: An introduction to the theoretical analysis and numerical treatment of semi-infinite programs. N. Y.: Springer, 1983. 212 p.
7. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 489 с.
8. **Трофимов С. П.** Критерий разрыва двойственности для полубесконечных задач линейного программирования // Противоречивые модели оптимизации: сб. науч. тр. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 64–70.
9. **Rockafellar R.T.** Convex analysis. Princeton; New Jork: Princeton University Press, 1970. 260 p.
10. **Kretschmer K. S.** Programmes in paired spaces // Canad. J. Math. 1961. Vol. 13. P. 221–238.
11. **Астафьев Н. Н.** Противоположные задачи линейного программирования, двойственность, приложения к балансовой модели // Дискретная оптимизация и исследование операций: материалы росс. конф. / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2007. С. 12–16.
12. Программа численного анализа соотношений двойственности [e-resource]. Репозиторий MATLAB-программы. URL: https://github.com/re3burn/DGA (дата обращения: 20.08.2016).
13. **Астафьев Н.Н.** Бесконечные системы линейных неравенств. М.: Наука, 1991. 136 с.

Астафьев Николай Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: astnn@imm.uran.ru

Поступила 20.06.2016

Трофимов Сергей Павлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: tsp61@mail.ru

Иванов Алексей Витальевич
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: av.ivanov.2014@yandex.ru

REFERENCES

1. Chames A., Cooper W. W., Kortanek K. O. A duality theory for convex programs with convex constraints. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 68, no. 6, pp. 605–608.
2. Goberna M. A., Lopez M. A. Linear semi-infinite optimization. Chichester: Wiley, 1998. 356 p.
3. Karney D .F. Duality gaps in semi-infinite linear programming – an approximation problem. *Math. Progr.*, 1981, vol. 20, no. 1, pp. 129–143.
4. Soyster A. L. A note on duality gaps in linear programming over convex sets. *J. Optim. Theory Appl.*, 1974, vol. 13, no. 4, pp. 484–489.
5. Duffin R. J., Karlovitz L. A. An infinite linear program with a duality gap. *Management Sci.*, 1965, vol. 12, no. 1, pp. 122–134.
6. Glashoff K., Gustafson S. A. *Linear optimization and approximation: An introduction to the theoretical analysis and numerical treatment of semi-infinite programs.* N. Y.: Springer, 1983, 212 p.
7. Chernikov S.N. *Linejnye neravenstva* (Linear inequalities.) Moscow: Nauka, 1968, 489 p.

8. Trofimov S.P. A criterion for a discontinuity in the duality for semi-infinite problems of linear programming. *Inconsistent Optimization Models: Sb. Nauch. Tr. IMM UNC AN SSSR*, Sverdlovsk, 1987, pp. 64–70 (in Russian).
9. Rockafellar R.T. *Convex analysis.* Princeton, New York: Princeton University Press, 1970, 260 p.
10. Kretschmer K. S. Programmes in paired spaces. *Canad. J. Math.*, 1961, vol. 13, pp. 221–238.
11. Astafiev N.N. Inverse problems of linear programming, duality, applications to the balance model. *Discrete Optimization and Operations Research: Proc. of the Rus. Conf. IM SO RAN*, Novosibirsk, 2007, pp. 12–16 (in Russian).
12. Numerical analysis of duality relations program. *MATLAB Program Repository.* Available at: https://github.com/re3burn/DGA (date accessed: 20.08.2016).
13. Astafiev N.N. *Beskonechnye sistemy linejnyh neravenstv* (Infinite systems of linear inequalities). Moscow: Nauka, 1991, 136 p (in Russian).

N.N. Astaf'ev, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: astnn@imm.uran.ru .

S. P. Trofimov, Cand. Sci (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: tsp61@mail.ru .

A. V. Ivanov, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: av.ivanov.2014@yandex.ru .