ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.65

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛОГОВ ВСПЛЕСКОВ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ B-СПЛАЙНОВ[1]

В. Т. Шевалдин

В статье построен аналог двухмасштабных соотношений для базисных тригонометрических сплайнов с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору порядка $2r+1$ с постоянными коэффициентами $\mathcal{L}_{2r+1}(D)=D(D^2+\alpha_1^2)(D^2+\alpha_2^2)\dots(D^2+\alpha_r^2)$, где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ — произвольные положительные числа, и исследованы свойства вложенных подпространств тригонометрических сплайнов.

Ключевые слова: двухмасштабное соотношение, тригонометрический B-сплайн, дифференциальный оператор, всплески.

V. T. Shevaldin. A method for the construction of analogs of wavelets by means of trigonometric B-splines.

We construct an analog of two-scale relations for basis trigonometric splines with uniform knots corresponding to a linear differential operator of order $2r+1$ with constant coefficients $\mathcal{L}_{2r+1}(D)=D(D^2+\alpha_1^2)(D^2+\alpha_2^2)\dots(D^2+\alpha_r^2)$, where $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ are arbitrary positive numbers. The properties of embedded subspaces of trigonometric splines are analyzed.

Keywords: two-scale relation, trigonometric B-spline, differential operator, wavelets.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-320-327

Введение

В теории всплесков (см., например, [1–4]) для построения кратномасштабного анализа вложенных друг в друга замкнутых подпространств $\{V_j\subset L^2(\mathbb{R}),\ j\in\mathbb{Z}\}$ основную роль играют двухмасштабные соотношения для специальной выбранной функции $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \varphi\in L^2(\mathbb{R})$ (она называется *масштабирующей*) вида

$$\varphi(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_j\varphi(2x-jh)\quad(x\in\mathbb{R},\ h>0).\tag{0.1}$$

При построении всплесков с компактным носителем эта сумма состоит из конечного числа слагаемых, и в качестве функции φ может быть выбран полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) порядка r (степени $r-1$) с равномерными узлами $0,h,2h,\dots,rh$ (см., например, монографию [1] К. Чуи). Напомним, что *полиномиальным B-сплайном порядка* r (см., например, [5]) называется функция

$$B_{r,h}(x)=m_r(h)\Delta_h^r((x-rh)_+)^{r-1}\quad(x\in\mathbb{R}),$$

где $\Delta_h^r f(x)$ — конечная разность порядка r с шагом $h>0$, определенная для функций $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Здесь $m_r(h)>0$ — нормирующий множитель (будем полагать его равным 1) и $t_+=\max\{0;t\}$. При этом (см. [1])

$$\gamma_j=C_r^j=\frac{r!}{j(r-j)!}\quad(j=\overline{0,r}),\quad \gamma_j=0\quad(j<0,\ j>r).$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Для B-$\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [6; 7] и определения в следующем разделе) с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ с постоянными действительными коэффициентами, в отличие от полиномиального случая $\mathcal{L} = D^r$ ($r \in \mathbb{N}$) соотношение (0.1) может не иметь места, поскольку если функция $e^{\beta x}$ ($\beta \in \mathbb{C}$) принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}$, т. е. $e^{\beta x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}$, то функция $e^{2\beta x}$, вообще говоря, не лежит в этом ядре. Несмотря на это обстоятельство, в [8] без применения аппарата преобразования Фурье были построены аналоги масштабирующих соотношений (по форме близких к (0.1)) для базисных экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору с постоянными коэффициентами, все корни характеристического многочлена которого были действительными. При этом вместо формулы (0.1), в которой масштабирующая функция $\varphi(x)$ была представлена в виде линейной комбинации сдвигов функции $\varphi(2x)$, вдвое сжатой по горизонтальной оси по сравнению с $\varphi(x)$, были получены “двухмасштабные соотношения” для одних и тех же экспоненциальных B-сплайнов, рассматриваемых на равномерных сетках с шагом, который каждый раз увеличивается в два раза.

В данной статье в разд. 1 по схеме работы [8] получены подобные соотношения для тригонометрических B-сплайнов с равномерными узлами, определяемых линейным дифференциальным оператором порядка $2r+1$ вида

$$\mathcal{L}_{2r+1} = \mathcal{L}_{2r+1}(D) = D(D^2+\alpha_1^2)(D^2+\alpha_2^2)\cdots(D^2+\alpha_r^2), \tag{0.2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — произвольные положительные числа. Для такого оператора и достаточно малых шагов $h > 0$ в разд. 2 уточняются связи построенных “вложенных” подпространств сплайнов (т. е. аналогов пространств V_j и W_j в [1]). С помощью матриц задача сводится к изучению результантов соответствующих алгебраических многочленов, но в отличие от экспоненциальных сплайнов, ее решение существенно зависит от шага сетки h.

1. Двухмасштабные соотношения

Дадим необходимые определения. Пусть $h > 0$, D — оператор дифференцирования, $r \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_{2r+1} = \mathcal{L}_{2r+1}(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными действительными коэффициентами вида (0.2), причем все числа α_j ($j = \overline{1,r}$) в его представлении являются положительными. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_{2r+1}$ может быть записан в виде

$$p_{2r+1}(x) = p_{\mathcal{L}_{2r+1}}(x) = x\prod_{j=1}^{r}(x^2+\alpha_j^2).$$

Автором ([9], см. также [10]) для функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ был построен разностный оператор с шагом $h > 0$

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x) = (T-E)\prod_{j=1}^{r}(T^2 - 2T\cos\alpha_j h + E)f(x)$$

$$= \sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2r+1-s}\mu_s^{(2r+1)}(h)f(x+sh) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{2r+1}$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$, E — тождественный оператор, и числа $\mu_s^{(2r+1)}(h)$ ($s = \overline{0, 2r+1}$) находятся из следующего равенства:

$$P_{2r+1}(x) = P_{\mathcal{L}_{2r+1},h}(x) = (x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1) = \sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2r+1-s}\mu_s^{(2r+1)}(h)x^s. \tag{1.2}$$

Многочлен $P_{2r+1}(x)$ является характеристическим многочленом разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ и имеет нули $x=1,\ x=e^{\pm i\alpha_j h}$ $(j=\overline{1,r})$. Ясно, что

$$\mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)=1,\ \mu_{2r}^{(2r+1)}(h)=2\sum_{j=1}^{r}\cos\alpha_j h,\dots,\mu_0^{(2r+1)}(h)=1.$$

Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ выбран таким образом, что для любого решения линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_{2r+1}(D)f=0$ имеет место тождество $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}f(x)\equiv 0$.

В частности, если все $\alpha_j=0$ $(j=\overline{1,r})$, т.е. $\mathcal{L}_{2r+1}=D^{2r+1}$, то $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}=\Delta_h^{2r+1}$ — конечная разность порядка $2r+1$ с шагом h и при этом $P_{2r+1}(x)=(x-1)^{2r+1}$, $\mu_j^{(2r+1)}=C_{2r+1}^j$ $(j=\overline{0,2r+1})$. Пусть $\varphi_{2r+1}=\varphi_{2r+1}(x)$ — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_{2r+1}(D)f=0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_{2r+1}^{(j)}(0)=\delta_{j,2r}$ $(j=\overline{0,2r})$, где $\delta_{j,2r}$ — символ Кронекера. Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\varphi_{2k+1}(t)=\int_0^t\frac{\sin\alpha_k(t-x)}{\alpha_k}\varphi_{2k-1}(x)\,dx\ \ (k=\overline{1,r}),\quad \varphi''_{2k+1}(x)+\alpha_k^2\varphi_{2k+1}(x)=\varphi_{2k-1}(x)\quad (k=\overline{1,r}),$$

$$\varphi_1(x)=1.$$

B-$\mathcal{L}$-сплайн с равномерными узлами $0,h,2h,\dots,2rh,(2r+1)h$, соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{2r+1}$ вида (0.2), определяется равенством (см., например, [7])

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}(x)=m_{\mathcal{L}_{2r+1}}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}\varphi_{2r+1}((x-(2r+1)h)_+)\quad (x\in\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Нормализующий множитель $m_{\mathcal{L}_{2r+1}}$ положим равным 1. Такой сплайн будем называть *тригонометрическим*. Заметим, что данное определение не совсем корректно, поскольку в работе И. Шенберга [11], в которой впервые были введены тригонометрические сплайны, они определялись только для оператора $\mathcal{L}_{2r+1}(D)=D(D^2+1^2)(D^2+2^2)\cdots(D^2+r^2)$, т.е. при $\alpha_1=1,\alpha_2=2,\dots,\alpha_r=r$.

Носителем тригонометрического B-сплайна $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$ является отрезок $[0;(2r+1)h]$ и $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}\in C^{2r-1}(\mathbb{R})$. С учетом (1.1) данная функция может быть записана в виде

$$\begin{aligned}B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}(x)&=\mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)\varphi_{2r+1}(x_+)-\mu_{2r}^{(2r+1)}(h)\varphi_{2r+1}((x-h)_+)+\cdots\\&\cdots-\mu_0^{(2r+1)}(h)\varphi_{2r+1}((x-(2r+1)h)_+).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Наряду с функцией $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$ рассмотрим функцию $B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}$ вида

$$\begin{aligned}B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}(x)&=\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}}\varphi_{2r+1}((x-2(2r+1)h)_+)\\&=\mu_{2r+1}^{(2r+1)}(2h)\varphi_{2r+1}(x_+)-\mu_{2r}^{(2r+1)}(2h)\varphi_{2r+1}((x-2h)_+)+\cdots\\&\cdots-\mu_0^{(2r+1)}(2h)\varphi_{2r+1}((x-2(2r+1)h)_+),\end{aligned} \tag{1.5}$$

которая получена из функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$ формальной заменой параметра h на $2h$. Ясно, что график функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}$ не является растяжением по горизонтальной оси графика функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$. Носителем функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}$ является отрезок $[0;2(2r+1)h]$, узлами — точки $0,2h,4h,\dots,2(2r+1)h$, и эта функция (как и функция $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$) принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}_{2r+1}$ на любом интервале между двумя соседними узлами. Характеристический многочлен, соответствующий оператору $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}}$, имеет вид

$$P_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}(x)=(x^2-1)\prod_{j=1}^{r}(x^4-2x^2\cos 2\alpha_j h+1)=\sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2s+1-r}\mu_s^{(2r+1)}(2h)x^{2s}, \tag{1.6}$$

поскольку

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x) = (T^2 - E) \prod_{j=1}^{r} (T^4 - 2T^2 \cos 2\alpha_j h + 1) f(x) = \sum_{s=0}^{2r+1} (-1)^{2r+1-s} \mu_s^{(2r+1)}(2h) f(x + 2sh). \tag{1.7}$$

Напомним, что в этой формуле $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор.

Нас интересует возможность представления функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}$ в виде

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \gamma_s B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - (2r+1-s)h) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.8}$$

и явный вид коэффициентов $\gamma_s = \gamma_s(h)$, если последняя формула имеет место. Формула (1.8) является аналогом двухмасштабного соотношения (0.1). Для ее доказательства (в отличие от классического кратномасштабного анализа) мы не будем привлекать аппарат преобразования Фурье. Поскольку $\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}} = [0; 2(2r+1)h]$, сумма (1.8) состоит из конечного числа слагаемых и представима в виде

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \gamma_{2r+1} B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) + \gamma_{2r} B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-h) + \cdots + \gamma_0 B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - (2r+1)h). \tag{1.9}$$

Теорема 1. *При любом $h > 0$ имеет место равенство*

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h) B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) + \mu_{2r}^{(2r+1)}(h) B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-h) + \cdots$$
$$\cdots + \mu_0^{(2r+1)}(h) B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - (2r+1)h), \tag{1.10}$$

в котором коэффициенты $\mu_s^{(2r+1)}(h)$ $(s = \overline{0, 2r+1})$ определены формулой (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 будет проведем по схеме [8, теорема 1, способ 1], используя связь между характеристическими многочленами $P_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}$ и $P_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}$ разностных операторов $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ и $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ (т. е. иным способом, чем в монографии К. Чуи [1] при выводе соотношения (0.1) для полиномиального B-сплайна $\varphi(x) = B_{r,h}(x)$). Из равенств (1.1)–(1.7) следует, что коэффициенты $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s = \overline{0, 2r+1})$ в формулах (1.8) и (1.9) могут быть найдены из равенства

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x) = \gamma_{2r+1} \Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x + (2r+1)h) + \gamma_{2r} \Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x + 2rh) + \cdots + \gamma_0 \Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x).$$

При этом

$$\frac{P_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x)}{P_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x)} = \frac{(x^2-1)\prod_{j=1}^{r}(x^4 - 2x^2\cos 2\alpha_j h + 1)}{(x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1)} = \frac{x^2-1}{x-1} \prod_{j=1}^{r} \frac{(x^2 - e^{2i\alpha_j h})(x^2 - e^{-2i\alpha_j h})}{(x - e^{i\alpha_j h})(x - e^{-i\alpha_j h})}$$

$$= (x+1) \prod_{j=1}^{r} (x^2 + 2x\cos\alpha_j h + 1) = \sum_{s=0}^{2r+1} \mu_s^{(2r+1)}(h) x^s = \gamma_{2r+1} x^{2r+1} + \gamma_{2r} x^{2r} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0.$$

Поэтому

$$\gamma_s = \mu_s^{(2r+1)}(h) \quad (s = \overline{0, 2r+1}),$$

т. е. $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2r} = 2\sum_{j=1}^{r} \cos\alpha_j h, \ldots, \gamma_0 = 1$ — коэффициенты при степенях x в многочлене $(x+1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 + 2x\cos\alpha_j h + 1)$. Теорема 1 доказана. □

З а м е ч а н и е 1. В теореме 1 установлен аналог двухмасштабного соотношения для тригонометрических B-сплайнов с равномерными узлами, определяемых оператором вида (1.1). При этом расстояния между соседними узлами сплайна при переходе от функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}$ к функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}$ увеличивается в два раза. Из способа доказательства теоремы 1 становится ясно, как найти коэффициенты $\gamma_{s,k} = \gamma_{s,k}(h)$ $(k = 3, 4, \dots)$ и в аналогичном k-масштабном соотношении, т. е. в формуле

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,kh}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \gamma_{s,k} B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - (2r + 1 - s)h).$$

Для их нахождения нужно разделить соответствующий многочлен

$$P_{\mathcal{L}_{2r+1,kh}}(x) = (x^k - 1)\prod_{j=1}^{r}(x^{2k} - 2x^k \cos k\alpha_j h + 1) = (x^k - 1)\prod_{j=1}^{r}(x^k - e^{ik\alpha_j h})(x^k - e^{-ik\alpha_j h})$$

на многочлен

$$P_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) = (x - 1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1) = (x - 1)\prod_{j=1}^{r}(x - e^{i\alpha_j h})(x - e^{-i\alpha_j h})$$

и вычислить коэффициенты $\gamma_{s,k}$ алгебраического многочлена, полученного в результате указанного деления.

2. Свойства "вложенных" подпространств триномeтрических сплайнов

По аналогии с [8, теорема 2] назовем *ψ-всплеском* функцию вида

$$\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \mu_0^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) - \mu_1^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - h) + \cdots$$
$$\cdots - \mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - (2r + 1)h),$$

где функция $B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}$ и числа $\mu_s^{(2r+1)}(h)$ $(s = \overline{0, 2r + 1})$ определены равенствами (1.3) и (1.2). Поскольку оператор $\mathcal{L}_{2r+1}$ и число $h > 0$ у нас фиксированы, то в дальнейшем для краткости будем записывать

$$\mu_s = \mu_s^{(2r+1)}(h) \quad (s = \overline{0, 2r + 1}).$$

Системы функций $\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. Положим $V_{1,h} = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $V_{2,2h} = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $W_{2,2h} = \operatorname{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x - kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. При этом $V_{2,h} \subset V_{1,h}$. Следующая теорема указывает связь определенных выше подпространств.

Теорема 2. *При $0 < h < h_0 = \pi/(2\max_{1\le j\le r}\alpha_j)$ имеет место равенство*

$$V_{1,h} = V_{2,h} + W_{2,2h}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 2 требуется установить, что существуют такие действительные числа $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$, что при $0 \le x \le (2r + 1)h$ имеет место тождество

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) \equiv \sum_j a_j B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x - jh) + \sum_j b_j \psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x - jh).$$

Дальнейшее доказательство теоремы 2 практически полностью повторяет доказательство [8, теорема 2]. Оно сводится к проверке того, что корни алгебраических многочленов степени $2r+1$

$$T_1(x) = \mu_0 x^{2r+1} + \mu_1 x^{2r} + \cdots + \mu_{2r}x + \mu_{2r+1} \quad \text{и} \quad T_2(x) = -\mu_{2r+1}x^{2r+1} + \mu_{2r}x^{2r} - \cdots - \mu_1 x + \mu_0$$

являются попарно различными. В силу (1.2) имеем

$$T_1(x) = -x^{2r+1}P_{2r+1}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = \mu_0(x + 1)\prod_{j=1}^{r}(1 + 2x\cos\alpha_j h + x^2),$$

$$T_2(x) = -P_{2r+1}(x) = -(x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1).$$

Нулями многочлена $T_1(x)$ являются числа

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -e^{i\alpha_1 h}, \quad x_3 = -e^{-i\alpha_1 h}, \quad x_4 = -e^{i\alpha_2 h}, \dots, x_{2r+1} = -e^{-i\alpha_r h},$$

а многочлена $T_2(x)$ — числа

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{i\alpha_1 h}, \quad y_3 = e^{-i\alpha_1 h}, \quad y_4 = e^{i\alpha_2 h}, \dots, y_{2r+1} = e^{-i\alpha_r h}.$$

Заметим, что условие $0 < h < h_0 = \pi/(2\max_{1\le j\le r}\alpha_j)$ теоремы 2 гарантирует неравенства $x_i \ne y_j$ $(i, j = \overline{1, 2r+1})$. Поэтому, учитывая, что $\mu_{2r+1} = \mu_0 = 1$, теорема 2 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Равенство (2.1) является ключевым для дальнейшего построения системы вложенных подпространств предложенного выше варианта кратномасштабного анализа. А именно, положим

$$V_{1,2^{n-1}h} = \operatorname{span}\left\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2^{n-1}h}}(x - 2^{n-1}kh)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad V_{2,2^n h} = \operatorname{span}\left\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

$$V_{2,2^n h} = \operatorname{span}\left\{\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Тогда $V_{2,2^n h} \subset V_{1,2^{n-1}h}$ и при достаточно малом $h > 0$ (см. ограничения в условии теоремы 2) имеет место равенство

$$V_{1,2^{n-1}h} = V_{2,2^n h} + W_{2,2^n h} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

З а м е ч а н и е 3. Анализ доказательств теорем 1 и 2 (для тригонометрических B-сплайнов) и работы [8] (экспоненциальные B-сплайны) показывает, что аналогичные результаты справедливы и в более общем случае, а именно, для любого линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ произвольного порядка n с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1), который может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D) = \prod_{s=1}^{k}(D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2)\prod_{j=1}^{n-2k}(D - \beta_j),$$

где $\beta_j, \gamma_s, \alpha_s \in \mathbb{R}$, причем можно считать, что $\alpha_s > 0$ (если $k \ge 1$). Соответствующий разностный оператор для $\mathcal{L}_n$ имеет вид (см., например, [9])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(x) = \prod_{s=1}^{k}(T^2 - 2Te^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}E)\prod_{j=1}^{n-2k}(T - e^{\beta_j h}E)f(x) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\mu_s^{(n)}(h)f(x+sh),$$

а его характеристический многочлен —

$$P_{\mathcal{L}_{n,h}}(x) = \prod_{s=1}^{k}(x^2 - 2xe^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x - e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\mu_s^{(n)}(h)x^s.$$

Масштабирующее соотношение для B-$\mathcal{L}$-сплайнов вида (1.10) в общем случае также имеет место, поскольку

$$\frac{P_{\mathcal{L}_{n,2h}}(x)}{P_{\mathcal{L}_{n,h}}(x)} = \frac{\prod_{s=1}^{k}(x^4 - 2e^{2\gamma_s h}x^2\cos 2\alpha_s h + e^{4\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x^2 - e^{2\beta_j h})}{\prod_{s=1}^{k}(x^2 - 2e^{\gamma_s h}x\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x - e^{\beta_j h})}$$

$$= \prod_{s=1}^{k}(x^2 + 2e^{\gamma_s h}x\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x + e^{\beta_j h}) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1}x^{n-1} + \dots + \gamma_1 x + \gamma_0.$$

Доказательство теоремы 2 для произвольного оператора $\mathcal{L}_n$ будет отличаться только более общей формой многочленов $T_1(x)$ и $T_2(x)$, а именно,

$$T_1(x) = -P_{\mathcal{L}_{n,h}}(x) = -\prod_{s=1}^{k}(x^2 - 2xe^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2x}(x - e^{\beta_j h}),$$

$$T_2(x) = (-x^n)P_{\mathcal{L}_{n,h}}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = \mu_0^{(n)}\prod_{s=1}^{k}(1 + 2xe^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}x^2)\prod_{j=1}^{n-2x}(1 + xe^{\beta_j h}).$$

Если шаг $h > 0$ брать достаточно малым (например, $0 < h < h_0 = \pi/(2\max_{1\le j\le k}\alpha_j)$), то нули этих многочленов попарно не совпадают. Поэтому имеет место теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты. Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.Л.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
3. **Малла С.** Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
4. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 461 с.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
6. **Morsche H.G. ter** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: Dissertation. Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
8. **Пыткеев Е.Г., Шевалдин В.Т.** Двухмасштабные соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 234–243.
9. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
10. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
11. **Schoenberg I.J.** On trigonometric spline interpolation // J. Math. Mech. 1964. Vol. 13. P. 795–825.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 21.03.2016

REFERENCES

1. Чуи Ч. Chui C.K. An introduction to wavelets. Boston: Acad. Press, 1992, Ser. Wavelet Anal. Its Appl, vol. 1, 264 p.
2. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.Л. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

   Novikov, I.Y., Skopina, M.A., and Protasov, V.Y. *Teoriya vspleskov* (Wavelet theory). Providence: AMS, 2011, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 239, 506 p.
3. Malla S. *Vejvlety v obrabotke signalov* (Wavelets in signal processing). Moscow: Mir, 2005, 671 p. (in Russian).
4. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., vol. 61, 357 p.
5. Zavyalov Y.S., Kvasov, B.I., Miroshnichenko, V.L. (Metody splajn funkcij) Methods of spline functions. Moscow: Nauka, 1980, 352 p. (in Russian).
6. Morsche H.G. ter Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions, Dissertation. Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.

7. Shevaldin V.T. *Approksimaciya lokalnymi splajnami* (Local approximation by splines). Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2014, 198 p. (in Russian).
8. Pytkeev E.G., Shevaldin Two-scale relations for B-$\mathcal{L}$-splines with uniform knots. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no. 4, 2015, pp. 234–243 (in Russian).
9. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320.
10. Sharma A., Tsimbalario I. Certain linear differential operators and generalized differences. *Math. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97.
11. Schoenberg I.J. On trigonometric spline interpolation. *J. Math. Mech.*, 1964, vol. 13, pp. 795–825.

V.T. Shevaldin , Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .