ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА С НЕКЛАССИЧЕСКИМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

М. Ш. Шабозов, А. Д. Фарозова

В работе получена оценка величины наилучшего среднеквадратического приближения $E_{n-1}(f)$ произвольной комплекснозначной 2π-периодической функции $f \in L_2$ подпространством $\Im_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ через ее неклассический модуль непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)$ в L_2, порожденный конечно-разностным оператором порядка $2m-1$ с постоянными знакочередующимися коэффициентами, равными по модулю единице. А именно, доказано, что для любых натуральных $n \geq 1$ и $m \geq 2$ справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Big(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\Big\{\omega^*_{2m-1}(f,t)\Big\}^2 \sin nt\,dt\Big)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(m-\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)^{-1/2}.$$

Ключевые слова: наилучшие приближения, неклассический модуль непрерывности, неравенства Джексона — Стечкина, выпуклая функция.

M. Sh. Shabozov, A. D. Farozova. The Jackson–Stechkin inequality with nonclassical modulus of continuity.

We obtain an estimate for the best mean-square approximation $E_{n-1}(f)$ of an arbitrary complex-valued 2π-periodic function $f \in L_2$ by the subspace $\Im_{2n-1}$ of trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ in terms of the nonclassical modulus of continuity $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)_2$ generated by a finite-difference operator of order $2m-1$ with alternating constant coefficients equal to 1 in absolute value. The following relation is proved for any natural $n \geq 1$ and $m \geq 2$:

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Big(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\Big\{\omega^*_{2m-1}(f,t)\Big\}^2 \sin ntdt\Big)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(m-\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)^{-1/2}.$$

Keywords: best approximation, nonclassical modulus of continuity, Jackson–Stechkin inequality, convex function.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-311-319

1. Введение

Результат Н. П. Корнейчука 1961 г. (см. [1, гл. 6, § 6.2, теорема 6.2.2]) о точной константе в неравенстве Джексона между величиной наилучшего равномерного приближения непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и равномерным модулем непрерывности приближаемой функции в точке π/n получил широкое развитие. В частности, в 1967 г. Н. И. Черных [2] установил аналогичный результат в пространстве L_2 на периоде, а именно нашел точную константу в соответствующем неравенстве Джексона (с первым L_2-модулем непрерывности). Он также получил [3] точное неравенство Джексона — Стечкина со старшим L_2-модулем непрерывности. Относительно недавно в пространстве L_2 стали изучаться неравенства Джексона — Стечкина с обобщенными модулями непрерывности, порожденными как конечно-разностными операторами с переменными коэффициентами (зависящими от шага) [4], так и бесконечно-разностными операторами с постоянными коэффициентами [5; 6]. Кроме того, в процитированных работах [5; 6] С. Н. Васильева и совместных работах А. И. Козко, А. В. Рождественского [7;8] исследовались точные константы в прямых теоремах теории приближения в пространстве L_2 с модулем непрерывности Бомана — Шапиро. В работе Н. А. Барабошкиной [9] была найдена точная константа в неравенстве Джексона — Стечкина между величиной наилучшего L_2-приближения 2π-периодической функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и ее неклассическим модулем непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)$ при $\delta = 2\pi/n$; указанный неклассический модуль непрерывности порожден конечно-разностным оператором порядка $2m-1$ с постоянными знакочередующимися коэффициентами, равными по модулю единице.

В данной работе получено точное неравенство между величиной наилучшего приближения функции f из L_2 тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и усредненным значением квадрата модуля непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,t)$ по отрезку $[0,\pi/n]$ с весом $\sin nt$.

Перейдем к более детальному изложению результата и соответствующей истории вопроса. Нам понадобятся следующие обозначения:

L_2 — пространство 2π-периодических комплекснозначных измеримых функций f, квадрат которых суммируем на периоде $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = [0,2\pi)$, с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2};$$

$L_2^{(0)} = L_2$, $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ — множество функций f, у которых производные $f^{(r-1)}$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывны на $\mathbb{T}$, а производные $f^{(r)}$ принадлежат L_2;

$$\Im_{2n-1} := \Big\{T_{n-1}\colon T_{n-1}(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} a_k e^{ikx},\ \ a_k \in \mathbb{C}\Big\}$$

— подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами;

$$E_{n-1}(f) := \inf\big\{\|f - T_{n-1}\|\colon T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\big\} \tag{1.1}$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L_2$ подпространством $\Im_{2n-1}$.

Хорошо известно, что точную нижнюю грань в правой части равенства (1.1) реализует частная сумма

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{|k|\le n-1} c_k(f)e^{ikx}$$

порядка $n-1$ ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt,$$

функции f. При этом

$$E_{n-1}(f) = \Big(\sum_{|k|\ge n} |c_k(f)|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2}, \tag{1.2}$$

где положено $\rho_0^2(f) = |c_0(f)|^2$, $\rho_k^2(f) = |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Модуль непрерывности порядка $m \in \mathbb{N}$ функции $f \in L_2$ определяется равенством

$$\omega_m(f,\delta) = \sup\big\{\,\|\Delta_t^m f\|\colon |t| \le \delta\,\big\}, \quad \delta \ge 0, \tag{1.3}$$

где $\Delta_t^m f(x) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu} C_m^\nu f(x+\nu t)$ — разность m-го порядка функции f с шагом t.

Напомним, что среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из важных является задача о точных неравенствах типа Джексона — Стечкина

$$E_{n-1}(f)\le \chi n^{-r}\omega_m(f^{(r)},\tau/n)\quad \bigl(r\in\mathbb{Z}_+,\, n,m\in\mathbb{N},\, \tau>0\bigr)$$

на классах $L_2^{(r)}$ ($L_2^{(0)}\equiv L_2$), где χ — величина, не зависящая от f. Эту задачу в разное время исследовали многие математики (см., например библиографию, в [10; 11]).

Как уже говорилось выше, в последнее время вместо модуля непрерывности вводят в рассмотрение различные обобщенные модули непрерывности, частным случаем которых является классический модуль непрерывности (1.3) порядка m, и для них исследуют неравенство типа Джексона – Стечкина. Следуя работам [4; 9], при любом $m\in\mathbb{N}$ введем разностный оператор

$$\Delta^*_{t,2m-1}f(x)=\sum_{\nu=0}^{2m-1}(-1)^{\nu+1}f(x+\nu t), \tag{1.4}$$

действующий из L_2 в L_2. Определим соответствующий модуль непрерывности функции $f\in L_2$:

$$\omega^*_{2m-1}(f,\delta):=\sup\bigl\{\,\|\Delta^*_{t,2m-1}f\|\colon |t|\le\delta\,\bigr\},\quad \delta\ge 0. \tag{1.5}$$

Заметим, что при $m=1$ модуль непрерывности (1.5) совпадает с классическим модулем непрерывности первого порядка $\omega(f;\delta)$ при всех $f\in L_2$ и $\delta\ge 0$.

Фиксируя $m,n\in\mathbb{N}$ и $\gamma>0$, рассмотрим задачу отыскания точной константы $\mathcal{K}^*=\mathcal{K}^*(m,n;\gamma)$ в неравенстве Джексона — Стечкина

$$E_{n-1}(f)\le \mathcal{K}^*\omega^*_{2m-1}\Bigl(f,\frac{\gamma}{n}\Bigr),\quad f\in L_2.$$

Иными словами, требуется определить значение следующей величины:

$$\mathcal{K}^*(m,n;\gamma):=\sup\Bigl\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega^*_{2m-1}\,(f,\gamma/n)}\colon f\in L_2,\ f\not\equiv\mathrm{const}\Bigr\}. \tag{1.6}$$

Задачу (1.6) при $m=1$ и $\gamma=\pi$ решил Н. И. Черных [2; 3]. Он доказал, что $\mathcal{K}^*(1,n;\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Для произвольных $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$ и $\gamma>0$ из [4, теорема 1] следует, что

$$\mathcal{K}^*(m,n;\gamma)\ge\frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{1.7}$$

Это неравенство вытекает также из результатов [7, теорема 1; 8, следствия 1.1, 1.3; 6, теорема 2].

В [9] доказано, что для любых $m,n\in\mathbb{N}, m\ge 2, n\ge 1$ и произвольной функции $f\in L_2$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)\le\frac{1}{\sqrt{2m}}\biggl[\frac{n}{4}\int_0^{2\pi/n}\bigl(\omega^*_{2m-1}(f,t)\bigr)^2\varphi_n(t)\,dt\biggr]^{1/2}, \tag{1.8}$$

где $\varphi_n(t)=\sin\dfrac{nt}{2}+\dfrac{1}{2}\sin nt$. Отсюда вытекают следующие неравенства, установленные в [9]:

$$E_{n-1}(f)\le\frac{1}{\sqrt{2m}}\omega^*_{2m-1}\Bigl(f,\frac{2\pi}{n}\Bigr),\quad f\in L_2,$$

$$\mathcal{K}^*(m,n;2\pi)\le\frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{1.9}$$

В результате сопоставления (1.7) и (1.9) в [9] доказано, что $\mathcal{K}^*(m,n;2\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{2m}}$ при $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$.

В данной статье продолжается указанная тематика для характеристик гладкости (1.4). Здесь получены точные неравенства вида (1.8), где вместо весовой функции $\varphi_n(t)$ выступает функция $\sin nt$ для $t\in(0,\pi/n]$.

2. Основной результат

Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых* $m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, $n\geq 1$ *и для произвольной функции* $f\in L_2$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f)\leq\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f,t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}, \tag{2.1}$$

где

$$\chi_m=\Big(m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)^{-1/2}. \tag{2.2}$$

В частности, $\chi_1=1$, $\chi_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\chi_3=\sqrt{\dfrac{15}{23}}$, $\chi_4=\sqrt{\dfrac{105}{176}}$, $\chi_5=\sqrt{\dfrac{315}{563}}$, $\cdots$. *Неравенство* (2.1) *точно в том смысле, что существует функция* $f_0\in L_2$, $f_0\not\equiv\mathrm{const}$, *для которой* (2.1) *обращается в равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся равенством, доказанным в работе [9]:

$$\|\Delta_{t,2m-1}^*f(\cdot)\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2P_k(t),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

где

$$P_k(t)=2m-2\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^{l+1}(2m-j)\cos jkt. \tag{2.4}$$

Сгруппируем косинусы с четными и нечетными l, как это сделано в работе [9], и, заметив, что сумма в правой части (2.4) не изменится, если суммирование производить по l от 1 до $2m$, представим равенство (2.4) в виде

$$P_k(t)=2m-2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)kt-2(m-l)\cos 2lkt\big]. \tag{2.5}$$

Учитывая равенство (2.5), из (2.3) получаем

$$\left(\omega_{2m-1}^*(f,t)\right)^2\geq\|\Delta_{t,2m-1}^*f(\cdot)\|_2^2\geq\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2P_k(t)$$

$$=2m\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2-2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)kt-2(m-l)\cos 2lkt\big]. \tag{2.6}$$

Для $\nu\in\mathbb{Z}_+$ определим величину $\widehat{\varphi}(\nu)=\displaystyle\int_0^{\pi/n}\sin nt\cos\nu tdt$. Легко проверить, что $\widehat{\varphi}(0)=2/n$, $\widehat{\varphi}(n)=0$ и кроме того при любом $l\in\mathbb{N}$ и $k\geq n$, $k,n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\widehat{\varphi}(2lk)=-\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\cos^2\frac{lk}{n}\pi\leq 0, \tag{2.7}$$

$$\widehat{\varphi}((2l-1)k)=-\frac{2n}{((2l-1)k)^2-n^2}\cos^2\frac{(2l-1)k}{2n}\pi\leq 0. \tag{2.8}$$

Заметим, что

$$\widehat{\varphi}(2ln) = -\frac{2}{n((2l)^2-1)}, \quad \widehat{\varphi}((2l-1)n) \equiv 0, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Умножив неравенства (2.6) на функцию $\sin nt$ и проинтегрировав обе части полученного таким образом соотношения по переменному t от 0 до π/n, затем поделив обе части полученного результата на число $(4m)/n$ с учетом (2.7) и (2.8), приходим к неравенству

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4m}\int\limits_0^{\pi/n} \big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2 \sin ntdt + \frac{n}{2m}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 \sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k) - 2(m-l)\widehat{\varphi}(2lk)\big].$$

Прибавляя и вычитая внутри суммы по l от 1 до m выражения

$$2(m-l)\widehat{\varphi}(2ln) = -\frac{4(m-l)}{n((2l)^2-1)} \tag{2.10}$$

и учитывая равенства (1.2) и (2.10), запишем неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4m}\int\limits_0^{\pi/n} \big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2 \sin ntdt$$

$$+\frac{n}{2m}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k) - 2(m-l)\big(\widehat{\varphi}(2lk) - \widehat{\varphi}(2ln)\big)\big] + \frac{2}{m}E_{n-1}^2(f)\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}.$$

Отсюда получаем

$$\Big(m - 2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2 \sin ntdt$$

$$+\frac{n}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big\{(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k) - 2(m-l)\big[\widehat{\varphi}(2lk) - \widehat{\varphi}(2ln)\big]\big\}. \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что для получения неравенства $E_{n-1}(f) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\Big[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2 \sin ntdt\Big]^{1/2}$ достаточно доказать, что при любых $m \ge 2$, $1 \le l \le m$, $k \ge n$ величины

$$\mu_{l,k} = (2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k) - 2(m-l)\big[\widehat{\varphi}(2lk) - \widehat{\varphi}(2ln)\big] \le 0, \tag{2.12}$$

$$m - 2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1} \ge 0. \tag{2.13}$$

Докажем по индукции неравенство (2.13). При $m=2$ условие выполняется. Пусть оно выполняется при $m=k$, докажем его выполнение при $m=k+1:$

$$k+1-2\sum_{l=1}^{k}\frac{l}{4(k+1-l)^2-1} \ge k+1-2\sum_{l=1}^{k}\frac{l}{4(k-l)^2-1}$$

$$= k-2\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{4(k-l)^2-1} + 1 - 2\frac{k}{4(k-k)^2-1} = k - 2\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{4(k-l)^2-1} + 1 + 2k \ge 0.$$

Для доказательства (2.12) рассмотрим сначала случай $l=1$ и $k=n$. В этом случае имеем $\mu_{1,n} = (2m-1)\widehat{\varphi}(n) = 0$. Далее при $k>n,\ 1 \le l \le m,\ (l,k) \ne (1,n)$ значение $\widehat{\varphi}((2l-1)k) \le 0$, а потому для выполнения (2.12) нужно доказать, что $\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)\ge 0$. Но это очевидно, поскольку

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)&=-\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\cos^2\frac{lk}{n}\pi+\frac{2n}{(2ln)^2-n^2}\\&=\frac{2n}{(2ln)^2-n^2}-\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}+\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\sin^2\frac{lk}{n}\pi\\&=\frac{2(2l)^2(k^2-n^2)}{n((2l)^2-1)((2lk)^2-n^2)}+\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\sin^2\frac{lk\pi}{n}>0.\end{aligned}$$

Этим неравенство (2.12) и вместе с ним неравенство (2.1) доказаны.

Докажем, что для функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2$ в неравенстве (2.1) имеет место знак равенства. В самом деле, из (2.3) с учетом (2.4) получаем

$$\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2=2m-2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)nt-2(m-l)\cos 2lnt\big]. \tag{2.14}$$

Интегрируя равенство (2.14) по отрезку $[0,\pi/n]$ с весом $\sin nt$, в силу равенств (2.9) имеем

$$\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2\sin nt dt=2m\frac{2}{n}-2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)n)-2(m-l)\widehat{\varphi}(2ln)\big]$$

$$=m\frac{4}{n}-\frac{8}{n}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{m-l}{(2l)^2-1}=\frac{4}{n}\Big(m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{m-l}{4l^2-1}\Big)=\frac{4}{n}\Big(m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)=\frac{4}{n}\,\chi_m^{-2},$$

откуда $\dfrac{\chi_m}{\sqrt{2}}\Big[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2\sin nt\,dt\Big]^{1/2}=1=E_{n-1}(f_0)$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *Для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$, $n\ge 1$ и произвольной функции $f\in L_2$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}=\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, с одной стороны, из неравенства (2.1) следует, что

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}\le\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}, \tag{2.16}$$

а с другой стороны, для рассмотренной в конце теоремы 1 функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2$ получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}\ge\frac{E_{n-1}(f_0)}{\Big[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}=\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.17}$$

Сопоставляя неравенствf (2.16) и (2.17), получаем требуемое равенство (2.15), откуда и следует утверждение следствия 1. □

Следствие 2. *Для произвольной функции $f\in L_2$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)\le\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\omega^*_{2m-1}\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, учитывая, что модуль непрерывности $\omega_{2m-1}^*(f,t)$ является неубывающей функцией по t, из (2.1) получаем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(f,t)\right\}^2 \sin ntdt\right]^{1/2}$$

$$\le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\omega_{2m-1}^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\sin ntdt\right]^{1/2} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\omega_{2m-1}^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда и следует (2.18). □

Поскольку все промежуточные производные функции $f \in L_2^{(r)}$ также принадлежат пространству L_2, как и сама функция f, то определенный интерес представляет вычисление экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений промежуточных производных $f^{(r-\nu)}$ элементами подпространства $\Im_{2n-1}$ в L_2.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $m,n \in \mathbb{N}$ и $\nu = 0,1,2,\ldots,r$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne const}} \frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right\}^2 \sin ntdt\right]^{1/2}} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}, \tag{2.19}$$

где число χ_m определяется формулой (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы при $\nu = r = 0$ совпадает с утверждением следствия 1. Поэтому далее будем рассматривать случай $r \ge 1$. Если $\nu = 0$, то, используя (2.15) и учитывая, что $f^{(r)} \in L_2$, согласно утверждению следствия 1 имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f^{(r)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right\}^2 \sin ntdt\right]^{1/2}} = \sup_{\substack{\mathrm{g}\in L_2\\ \mathrm{g}\ne \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(\mathrm{g})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(\mathrm{g},t)\right\}^2 \sin ntdt\right]^{1/2}} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.20}$$

Здесь мы учли, что функция $f_0(x) = \cos nx$ (на которой неравенство (2.16) обращается в равенство) принадлежит $L_2^{(r)}$.

Пусть натуральное число $\nu \in [1,r]$. В [12, с. 122–124] для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ доказано неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \le \left(E_{n-1}(f^{(r)})\right)^{1-\nu/r}\left(E_{n-1}(f)\right)^{\nu/r}. \tag{2.21}$$

Из первого равенства в (2.20) для $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2 \sin ntdt\right]^{1/2}. \tag{2.22}$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ хорошо известно неравенство [3]

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{n^r}E_{n-1}(f^{(r)}). \tag{2.23}$$

Учитывая (2.22), из (2.23) для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ выводим

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^r}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2 \sin ntdt\right]^{1/2}. \tag{2.24}$$

Подставляя в правую часть формулы (2.21) вместо $E_{n-1}(f^{(r)})_2$ и $E_{n-1}(f)$ соответствующие оценки сверху из формулы (2.22) и (2.24), будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^\nu}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}. \qquad (2.25)$$

Из (2.25) для любого натурального $\nu = 1, 2, \ldots, r$ следует оценка сверху экстремальной характеристики

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\text{const}}}\frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}} \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,. \qquad (2.26)$$

Для рассмотренной выше функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) = n^{r-\nu}, \quad \left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f_0^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2} = \sqrt{2}\,n^r\,\chi_m^{-1},$$

получаем оценку снизу величины, стоящей в левой части неравенства (2.26):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\text{const}}}\frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}} \ge \frac{n^\nu E_{n-1}(f_0^{(r-\nu)})}{\left[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f_0^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \qquad (2.27)$$

Требуемое неравенство (2.19) получаем из сопоставления оценки сверху (2.26) и оценки снизу (2.27), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 3. *В условиях теоремы* 2 *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^\nu}\omega_{2m-1}^*\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r-1 \quad r\in\mathbb{N}),$$

где константа χ_m *определена равенством* (2.2).

Авторы благодарят доктора физ.-мат. наук А. Г. Бабенко за полезное обсуждение результатов статьи и ценное замечание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
2. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
3. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
4. **Бабенко А.Г.** О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 30–46.
5. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона – Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 75–84.
6. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в L^2 для наилучших приближений тригонометрическими полиномами [e-resource] // Электрон. журн. “Исследовано в России”. 2002. Ст. 140. С. 1577–1586. URL: http://wwwinfo.jinr.ru/invest_in_Russia.html .
7. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 783–788.

8. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.
9. **Барабошкина Н.А.** Неравенство Джексона – Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 62–66.
10. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
11. **Shabozov M.Sh., Yusupov G.A.** Widths of certain classes of periodic functions in L_2 // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, iss. 1. P. 869–878.
12. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982, 252 с.

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик АН Республики Таджикистан
Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Поступила 02.05.2016

Фарозова Альфия Давлатбековна
аспирант кафедры математического анализа
Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева
e-mail: faroz85@rambler.ru

REFERENCES

1. Korneichuk N.P. *Exact constants in approximation theory.* Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1991, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 38, 452 p.
2. Chernykh N.I. Jackson's inequality in L_2. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 75–78.
3. Chernykh N.I. Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2. *Math. Notes Acad. Sci. USSR.*, 1967, vol. 2, no. 5, pp. 803–808.
4. Babenko A.G. On the Jackson – Stechkin inequality for the best L^2-approximations of functions by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, suppl. 1, pp. S30–S47.
5. Vasil'ev S.N. The Jackson-Stechkin inequality in $L_2[-\pi, \pi]$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, suppl. 1, pp. S243–S253.
6. Васильев С.Н. Vasil'ev S.N. Exact Jackson-Stechkin inequality in L^2 for the best approximations by trigonometric polynomials. *Electr. magazine "Issledovano v Rossii"*, 2002, St. 140, pp. 1577–1586, available at: http://wwwinfo.jinr.ru/invest_in_Russia.html (in Russian).
7. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 5, pp. 736–741.
8. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. On Jackson's inequality for a generalized modulus of continuity in L_2. *Math. Sb.*, 2004, vol. 195, no. 8, pp. 1073–1115.
9. Барабошкина Н.А. Baraboshkina N.A. The Jackson-Stechkin inequality with a nonclassic modulus of continuity. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, suppl. 1, pp. S65–S70.
10. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, no. 5, pp. 748–757.
11. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of certain classes of periodic functions in L_2. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, iss. 1, pp. 869–878.
12. Korneichuk N. P., Ligun A. A. and Doronin V. G. *Approksimaciya s ogranicheniyami* (Approximation with constraints). Kiev: Naukova Dumka, 1982, 250 p. (in Russian).

M. Sh. Shabozov, *M. Sh. Shabozov*, Academician of Republic of Tajikistan, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Republic of Tajikistan, Dushanbe, e-mail: shabozov@mail.ru .
A. D. Farozova, doctoral student, Khorog State University, Tajikistan, e-mail: faroz85@rambler.ru .