ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ[1]

Р. Р. Акопян

Изучены три взаимосвязанные экстремальные задачи в пространстве $\mathcal{H}$ аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых на части γ_1 единичной окружности Γ принадлежат пространству $L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)$ функций существенно ограниченных на γ_1 с весом ψ_1, а на множестве $\gamma_0 = \Gamma\setminus\gamma_1$ принадлежат пространству $L^{\infty}_{\psi_0}(\gamma_0)$ с весом ψ_0. А именно, на классе Q функций из $\mathcal{H}$ с нормой $L^{\infty}_{\psi_0}(\gamma_0)$ граничных значений на γ_0, не превосходящей единицы, решена задача оптимального восстановления аналитической функции на подмножестве единичного круга по заданным с погрешностью относительно нормы $L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)$ ее граничным значениям на γ_1. Изучена задача оптимального выбора множества γ_1 при фиксированном значении меры этого множества. Исследована задача наилучшего приближения оператора аналитического продолжения с части границы линейными ограниченными операторами.

Ключевые слова: оптимальное восстановление аналитических функций, наилучшее приближение неограниченных операторов, функция Сегё.

R. R. Akopyan. Optimal recovery of a function analytic in a disk from approximately given values on a part of the boundary.

We study three related extremal problems in the space $\mathcal{H}$ of functions analytic in the unit disk such that their boundary values on a part γ_1 of the unit circle Γ belong to the space $L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)$ of functions essentially bounded on γ_1 with weight ψ_1 and their boundary values on the set $\gamma_0 = \Gamma\setminus\gamma_1$ belong to the space $L^{\infty}_{\psi_0}(\gamma_0)$ with weight ψ_0. More exactly, on the class Q of functions from $\mathcal{H}$ such that the norm $L^{\infty}_{\psi_0}(\gamma_0)$ of their boundary values on γ_0 does not exceed one, we solve the problem of optimal recovery of an analytic function on a subset of the unit disk from its boundary values on γ_1 specified approximately with respect to the norm $L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)$. We also study the problem of the optimal choice of the set γ_1 under a given fixed value of its measure. The problem of the best approximation of the operator of analytic continuation from a part of the boundary by linear bounded operators is investigated.

Keywords: optimal recovery of analytic functions, best approximation of unbounded operators, Szegő function.

MSC: 30E10, 30E25, 30C85, 41A35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-29-42

1. Введение

1.1. Обозначения. В дальнейшем $D=\{z:|z|<1\}$ — открытый единичный круг, ограниченный единичной окружностью $\Gamma=\{z=e^{it}:t\in[0,2\pi]\}$. Пусть E_1 — измеримое подмножество отрезка $[0,2\pi]$ положительной меры и $\gamma_1=\{z=e^{it}\colon t\in E_1\}$ соответствующее подмножество окружности Γ. Естественно считать меру E_1 мерой множества γ_1; для этой меры будет использоваться обозначение $m(\gamma_1)$.

Рассмотрим пространство Харди $H^1(D)$ функций, аналитических в круге D. Известно (см., например, [15, гл. III, § 1, п.1.7]), что для функции f из пространства $H^1(D)$ почти всюду на Γ существуют некасательные предельные граничные значения, которые составляют функцию из $L^1(\Gamma)$; эту функцию обозначают тем же символом f.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Через ϕ обозначим неотрицательную суммируемую на $[0,2\pi]$ функцию, а через ϕ_1 и ϕ_0 — ее сужения соответственно на E_1 и $E_0=[0,2\pi]\backslash E_1$. На γ_1 и $\gamma_0=\Gamma\backslash\gamma_1$ определим функции ψ_k, $k=0,1$, равенствами

$$\psi_k(e^{it})=1/\phi_k(t),\quad t\in E_k,\quad k=0,1.$$

Введем подпространство $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\phi)$ пространства $H^1(D)$ функций, граничные значения которых на γ_k, $k=0,1$, имеют конечные L^∞-нормы с весом ψ_k, т. е.

$$\|f\|_{L^\infty_{\psi_k}(\gamma_k)}=\big\|f(e^{i\cdot})/\phi_k\big\|_{L^\infty(E_k)}<+\infty,\quad k=0,1;$$

функция $f\in H^1(D)$ принадлежит $\mathcal{H}$ в том и только том случае, если существует константа M, $0\le M<+\infty$, такая, что почти всюду на $[0,2\pi]$ справедливо неравенство $|f(e^{it})|\le M\phi(t)$.

В $\mathcal{H}(\phi)$ выделим класс Q функций, граничные значения которых на γ_0 удовлетворяют условию $\|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)}=\|f(e^{i\cdot})/\phi_0\|_{L^\infty(E_0)}\le 1$, или, другими словами, почти всюду на E_0 справедливо неравенство $|f(e^{it})|\le\phi_0(t)$.

Пусть K — подмножество единичного круга D и пусть $B=B(K)$ — некоторое банахово пространство функций, определенных на множестве K, с нормой $\|\cdot\|_B$, такое, что имеет место вложение $Q\subset B(K)$. Обозначим через Υ оператор, определенный на подпространстве $L^1(\gamma_1)$ функций, являющихся граничными значениями на γ_1 функций пространства $H^1(D)$, и ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции на γ_1 ее сужение на множество K.

Функцию вещественного переменного $\delta\in[0,\infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta)=\omega(\delta;\Upsilon,Q)=\sup\big\{\|f\|_B: f\in Q,\ \|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}\le\delta\big\},\tag{1.1}$$

называют *модулем непрерывности оператора* Υ *на классе* Q. Из определения (1.1) следует, что для функций пространства $\mathcal{H}(\phi)$ справедливо точное неравенство

$$\|f\|_B\le\|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)}\,\omega\Big(\frac{\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)}}\Big).$$

1.2. Постановка и обсуждение задач. В данной статье рассматривается три взаимосвязанные экстремальные задачи на классе функций Q.

Изначальной является задача оптимального восстановления аналитической в единичном круге функции по заданным с известной погрешностью δ по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ ее граничным значениям на γ_1 и дополнительной информации принадлежности функции классу Q. Более точно, пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q\in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ такая, что почти всюду на E_1 справедливо неравенство $|f(e^{it})-q(e^{it})|\le\delta\phi_1(t)$, или, что то же самое, $\|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}\le\delta$. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q функцию f на K. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать множество $\mathcal{O}$ всех возможных, $\mathcal{B}$-ограниченных, или $\mathcal{L}$-линейных операторов из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$. Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta\ge 0$ и метода восстановления $T\in\mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta)=\sup\Big\{\|f-Tq\|_B\colon f\in Q,\, q\in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\, \|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}\le\delta\Big\}\tag{1.2}$$

является погрешностью восстановления функций класса Q по их граничным значениям на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)=\inf\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T\in\mathcal{R}\}\tag{1.3}$$

есть величина оптимального восстановления на множестве K (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ) функций класса Q по их δ-приближенным граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (1.3) достигается нижняя грань.

Задача (1.3) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации; общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [3–5; 11; 13]. Результаты, связанные с оптимальным восстановлением на классах аналитических функций, можно найти в монографии [14] и в работе автора [2].

Так как множество γ_1 имеет положительную меру, то оно является множеством единственности (см., например, [9, гл. X, § 2]) для функций пространства $H^1(D)$. Метод восстановления функции $f \in H^1(D)$ по ее (точным) граничным значениям на γ_1 дает формула Карлемана — Голузина — Крылова [8] (см. также [1, гл. I, § 1])

$$f(z) = \lim_{\sigma\to-\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\Big(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\Big)^{\sigma} d\zeta, \quad z \in D,$$

где φ — произвольная аналитическая и ограниченная в D функция, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1; \qquad |\varphi(z)| > 1, \quad z \in D.$$

В случае, когда граничные значения функции на γ_1 заданы с погрешностью, задача восстановления значения аналитической функции в точке $z \in D$ (аналитического продолжения с части границы области) является некорректной. Эту задачу исследовал М. М. Лаврентьев [10, гл. II, § 1, п. 4–5] (см. также [1, гл. I, § 2]). Предложенные методы регуляризации имеют в качестве ядра введенные им функции Карлемана, являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. Примером такого регуляризующего метода является конструкция, основанная на формуле Карлемана — Голузина — Крылова. Регуляризирующий метод (метод восстановления) R_σ имеет вид

$$(R_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z}\Big(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\Big)^{\sigma} d\zeta.$$

Нашей же целью при исследовании задачи (1.3) является построение наилучшего (оптимального) метода восстановления.

В данной работе наряду с задачей (1.3) рассмотрена задача об оптимальном выборе информационного множества γ_1 в (1.3) в классе множеств с заданной мерой. Более точно, для параметров δ, μ, удовлетворяющих условиям $\delta > 0,\ 0 < \mu < 2\pi$, положим

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta, \mu) = \inf\left\{\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) \colon m(\gamma_1) \le \mu\right\}. \tag{1.4}$$

Задача состоит в том, чтобы найти величину (1.4) и множество γ_1, на котором она достигается. Общую постановку задачи выбора оптимальной информации можно найти в работе [12].

С задачей восстановления (1.3) тесно связана задача наилучшего приближения оператора Υ линейными ограниченными операторами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{L}(N)$ есть множество линейных ограниченных операторов из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$, норма которых не превосходит число $N \ge 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|f - Tf\|_B \colon f \in Q\right\} \tag{1.5}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора Υ на классе функций Q. Соответственно величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T) \colon T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1.6}$$

есть наилучшее приближение оператора Υ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный оператор, на котором в (1.6) достигается нижняя грань.

Задача (1.6) является частным случаем задачи Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства; этой задаче к настоящему времени посвящено большое число исследований (см. работы [4; 5] и приведенную в них библ.). В частности, известна взаимосвязь задачи Стечкина с задачами оптимального восстановления и модулем непрерывности оператора. Для задач (1.3), (1.6) и модуля непрерывности (1.1) эта взаимосвязь будет существенно использоваться в данной работе и выражается следующим образом. Введем обозначения

$$\Delta(N) = \sup\{\omega(\delta) - N\delta\colon \delta \geq 0\}, \quad N > 0; \tag{1.7}$$

$$l(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta\colon N > 0\}, \quad \delta \geq 0.$$

Как частный случай результата С. Б. Стечкина [16] (см. также [5, теорема 1.1]), для величин (1.6) и (1.1) справедливы неравенства

$$E(N) \geq \Delta(N), \quad N > 0; \tag{1.8}$$

$$\omega(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.9}$$

Следующее уточнение неравенства (1.9) является частным случаем общего утверждения, связывающего задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [5, теорема 2.1])

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.10}$$

В настоящей работе в подразд. 2.1 с помощью теоремы Сегё будет выписан модуль непрерывности (1.1) оператора Υ. В подразд. 2.2 получено решение задач (1.3) и (1.6) в случае, когда множество K есть точка $z_0 \in D$, т. е. задач оптимального восстановления и наилучшего приближения функционала. В подразд. 2.3 будет получено решение задачи (1.3) оптимального восстановления оператора Υ для произвольного множества K и задачи (1.6) наилучшего приближения оператора Υ в случае, когда K — подмножество линии уровня гармонической меры множества γ_1 относительно круга D. Наконец, в подразд. 2.4 изучена задача (1.4), если K есть подмножество радиуса круга D.

2. Оптимальное восстановление и наилучшее приближение оператора аналитического продолжения с части границы

2.1. Теорема Сегё и модуль непрерывности оператора Υ. Для $\eta > 0$ определим функцию Φ_η равенством

$$\Phi_\eta(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in E_0, \\ \eta\phi_1(t), & t \in E_1; \end{cases} \tag{2.1}$$

в случае $\eta = 1$ имеет место равенство $\Phi_1 = \phi$. В дальнейшем предполагается, что функции $\ln\phi_k$, $k = 0, 1$, суммируемы соответственно на E_k. Ясно, что в этом случае при всех $\eta > 0$ функции Φ_η и $\ln\Phi_\eta$ суммируемы на $(0, 2\pi)$.

Предположим, что на множестве K задана конечная мера $\widetilde{m}$ и, что $B = B(K)$ есть функциональная банахова структура (функциональная банахова решетка) — банахово пространство функций, измеримых по мере $\widetilde{m}$ на множестве K, с монотонной нормой, а точнее, обладающих свойством

(B) если $f_2 \in B(K)$ и почти всюду на K $|f_1(z)| \leq |f_2(z)|$, то $f_1 \in B(K)$ и $\|f_1\|_B \leq \|f_2\|_B$.

Будем считать, что функция $\epsilon \equiv 1$ принадлежит пространству $B(K)$ и ее норма равна единице: $\|\epsilon\|_B = 1$. Отсюда следует, что все существенно ограниченные функции принадлежат $B(K)$.

В дальнейших рассуждениях будет использоваться приведенный ниже в тереме A хорошо известный результат Г. Сегё [17] (см. также [15, гл II, § 6, п. 6.1]). Для неотрицательной функции $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ такой, что $\ln\varphi \in L^1(0, 2\pi)$, функция

$$s(z, \varphi) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\ln\varphi(t)\,dt\right) \tag{2.2}$$

называется *функцией Сегё* (*максимальной функцией*). Для предельных граничных значений почти всюду на $(0, 2\pi)$ имеет место равенство $|s(e^{it}, \varphi)| = \varphi(t)$.

Теорема A (Г. Сегё, 1921). *Пусть φ — периодическая, неотрицательная, измеримая на $[0, 2\pi]$ функция, для которой выполняются условия $\varphi \in L^p(0, 2\pi)$, $p \geq 1$; $\ln\varphi \in L^1(0, 2\pi)$. Тогда функция $s(z, \varphi)$ принадлежит пространству Харди $H^p(D)$, и для любой функции $f \in H^p(D)$, удовлетворяющей почти всюду на $(0, 2\pi)$ неравенству*

$$|f(e^{it})| \leq \varphi(t),$$

в произвольной точке z круга D справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |s(z, \varphi)|.$$

При этом, если хотя бы в одной точке z^* круга D имеет место равенство $|f(z^*)| = |s(z^*, \varphi)|$, то существует $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, такое, что $f(z) = \varepsilon s(z, \varphi)$, $z \in D$.

Для функции Сегё с граничной функцией Φ_δ, т. е. функцией, определенной равенством (2.1) при $\eta = \delta$, введем специальные обозначения

$$s_\delta(z) = s(z, \Phi_\delta), \quad s(z) = s_1(z) = s(z, \phi).$$

Пусть $w = w(\cdot, \gamma_1, D)$ — гармоническая в круге D функция, имеющая почти всюду на γ_1 граничные значения, равные единице, и на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ равные нулю. Значение $w(z, \gamma_1, D)$ этой функции в точке $z \in D$ называется (см., например, [9, гл. VIII, § 4]) *гармонической мерой множества γ_1 относительно точки z и области D*. Для гармонической меры множества γ_1 относительно точки $z = re^{i\tau}$, $0 \leq r < 1$, и круга D справедливо представление

$$w(z, \gamma_1, D) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, t-\tau)\,\chi_{E_1}(t)\,dt,$$

в котором P — ядро Пуассона круга D, определяемое равенством

$$P(r, t) = \Re\frac{e^{it}+r}{e^{it}-r} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2},$$

и χ_{E_1} — характеристическая функция множества E_1. Некасательные предельные граничные значения функции $w(z, \gamma_1, D)$, как интеграла Пуассона — Лебега от функции χ_{E_1}, почти всюду на γ_1 равны единице и почти всюду на γ_0 равны нулю (см., например, [15, гл. I, § 5, п. 5.3]).

Для числа $\alpha \in (0, 1)$ через γ_α будем обозначать подмножество точек z круга D, в которых функция $w(z, \gamma_1, D)$ принимает значение α:

$$\gamma_\alpha = \{z \in D\colon w(z, \gamma_1, D) = \alpha\}.$$

Отметим, что во всех точках $z \in \gamma_\alpha$ функция $w(z, \gamma_0, D)$ — гармоническая мера γ_0 относительно точки z и круга D — также принимает постоянное значение, равное $\beta = 1 - \alpha$.

В случае, когда множество γ_1 есть дуга единичной окружности, множества γ_α, $\alpha \in (0,1)$, являются дугами окружностей, пересекающих единичную окружность Γ в двух концевых точках дуги γ_1. Выделим случай, когда $\gamma_1 = \{e^{it}\colon t \in [0,\pi]\}$ — верхняя половина единичной окружности и $\alpha = 1/2$, тогда линией уровня $\gamma_{1/2}$ является интервал $(-1,1)$. В этом случае в качестве пространства $B = B(\gamma_{1/2})$ можно рассматривать, например, классические пространства $L^p(-1,1), p \geq 1$.

Зададим функцию h формулой

$$h(z) = \exp\left(w(z) + iv(z)\right), \tag{2.3}$$

где $w(z) = w(z,\gamma_1,D)$ — гармоническая мера γ_1 относительно круга D и точки z, а v — гармонически сопряженная к w функция в круге D. Функция h является аналитической и ограниченной в круге D, и по формуле Шварца для нее справедливо представление

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\chi_{E_1}(t)\,dt\right). \tag{2.4}$$

Используя теорему Сегё, нетрудно выписать решение задачи (1.1). Оно и приведено в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $s \in B(K)$. Тогда имеет место вложение $Q \subset B(K)$ и для функции ω, определенной соотношением* (1.1), *справедливо равенство*

$$\omega(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{2.5}$$

В случае, когда $K \subset \gamma_\alpha$, равенство (2.5) *примет вид*

$$\omega(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha, \tag{2.6}$$

где коэффициент $\mathcal{C}$ определяется равенством $\mathcal{C} = \|s\|_B$. При этом верхняя грань в (1.1) *достигается на функциях εs_δ, $|\varepsilon| = 1$.*

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ из условий $\Phi_\delta, \ln\Phi_\delta \in L^1(0,2\pi)$, в силу теоремы A следует, что функция Сегё s_δ принадлежит пространству $H^1(D)$. При этом справедливы равенства $\|s_\delta\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)} = 1$ и $\|s_\delta\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} = \delta$. Следовательно, функция s_δ принадлежит классу Q.

В силу (2.1) имеем $\ln\Phi_\delta = \ln\phi + \chi_{E_1}\ln\delta$. Поэтому определение (2.2) влечет представление

$$s_\delta(z) = s(z,\Phi_\delta) = s(z)\exp\left(\frac{\ln\delta}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\chi_{E_1}(t)\,dt\right),$$

которое с помощью (2.4) можно записать в виде

$$s_\delta(z) = s(z)\,h^\sigma(z), \quad \sigma = \ln\delta, \quad z \in D, \tag{2.7}$$

Из определения (2.3) функции h следует, что $|h| = \exp w$. Поэтому

$$|h|^\sigma = \exp(\sigma w) = \delta^w. \tag{2.8}$$

Так как $0 \leq w(z) \leq 1,\ z \in D$, то в круге D справедлива оценка $|h(z)|^\sigma \leq M,\ \ M = \max\{1,\delta\}$. По предположению $s \in B(K)$. Таким образом, согласно (2.7), для любого $\delta > 0$ функция s_δ является произведением функции $s \in B(K)$ на ограниченную функцию h^σ. Согласно условию (B) функция s_δ также принадлежит $B(K)$.

Пусть $\delta > 0$ и f есть функция класса Q со свойством $\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le \delta$. Этот факт означает, что модуль граничных значений функции f почти всюду на окружности не превосходит функции Φ_δ. А это согласно теореме A влечет неравенство

$$|f(z)| \le |s_\delta(z)|, \quad z \in D.$$

Отсюда, учитывая условие (B), заключаем, что имеет место вложение $Q \subset B(K)$ и справедлива оценка сверху для модуля непрерывности $\omega(\delta) \le \|s_\delta\|_B$. С другой стороны, так как $s_\delta \in Q$, то для величины модуля непрерывности (1.1) имеет место оценка снизу $\omega(\delta) \ge \|s_\delta\|_B$. Таким образом

$$\omega(\delta) = \|s_\delta\|_B.$$

Соотношения (2.7) и (2.8) влекут теперь утверждение (2.5). Из доказательства видно, что функция εs_δ с $|\varepsilon| = 1$ является экстремальной.

Равенства (2.6) вытекают из того факта, что на множестве γ_α функция $|h|$ имеет постоянное значение, равное числу e^α. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если норма пространства $B(K)$ удовлетворяет условию

$$(B^*) \qquad \text{если } f_1, f_2 \in B \text{ и всюду на } K |f_1(z)| < |f_2(z)|, \text{ то } \|f_1\|_B < \|f_2\|_B,$$

то в теореме 1 других экстремальных функций нет.

Действительно, пусть норма функции f равна норме s_δ, т. е. $\|f\|_B = \|s_\delta\|_B$, тогда из условия (B^*) вытекает существование точки $z^* \in K \subset D$ такой, что $|f(z^*)| \ge |s_\delta(z^*)|$. С другой стороны, если f из класса Q и $\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}}(\gamma_1) \le \delta$, то по теореме A для точек $z \in K$ справедливо неравенство $|f(z)| \le |s_\delta(z)|$, и, следовательно, $|f(z^*)| = |s_\delta(z^*)|$. Тогда по теореме A существует $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, такое, что $f(z) = \varepsilon s_\delta(z)$, $z \in D$. $\square$

В частном случае, когда функция ϕ (и, соответственно, веса) тождественно равна единице, функция s в круге D также тождественно равна единице, откуда получаем следующее утверждение.

З а м е ч а н и е 2. В случае $\psi_1 = \psi_0 \equiv 1$ равенство (2.5) примет вид $\omega(\delta) = \|\delta^w\|_B$, а при дополнительном предположении $K \subset \gamma_\alpha$ — вид $\omega(\delta) = \delta^\alpha$.

2.2. Наилучшие восстановление и приближение функционала значения в точке. Будем теперь рассматривать случай, когда множество K есть точка z_0, а $\|f\|_B = |f(z_0)|$. В этом случае оператор Υ является функционалом, ставящим в соответствие граничным значениям аналитической функции на γ_1 ее значение в точке z_0. Известно, что неравенства (1.8) и (1.10) для задач восстановления и приближения функционала можно усилить. А именно (см. [5; 7; 11; 14] и приведенную там библ.), в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе с помощью множества $\mathcal{O}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный функционал, и сама величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала. Следовательно с учетом теоремы 1 справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta) = |s(z_0)|\delta^\alpha, \tag{2.9}$$

где $\alpha = w(z_0, \gamma_1, D)$ — гармоническая мера γ_1 относительно круга D и точки z_0. Кроме того, для задач (1.3) и (1.6) взаимосвязь выражается в следующих соотношениях:

$$E(N) = \Delta(N); \quad \omega(\delta) = l(\delta).$$

Поэтому

$$E(N) = |s(z_0)|^{1/\beta}\, \beta\alpha^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta}, \quad \beta = 1 - \alpha. \tag{2.10}$$

В результате для случая, когда множество K есть точка z_0, к настоящему моменту величины $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)$ и $E(N)$ известны. Для решения задач (1.3) и (1.6) остается найти экстремальные функционалы. В работе [2] эти задачи решены в случае весов, тождественно равных единице. Используя аналогичный подход, исследуем здесь общий случай задач для широкого класса весов.

Произвольной функции $q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ поставим в соответствие функцию F_σ, определенную на единичном круге следующей формулой

$$F_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\,q(e^{it})\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s(z)}{s(e^{it})}\Big(\frac{h(z)}{h(e^{it})}\Big)^\sigma q(e^{it})\,dt, \quad z = re^{i\tau}, \tag{2.11}$$

где $\sigma = \ln\delta \in \mathbb{R}$, P — ядро Пуассона, а функция h определена соотношением (2.3). Рассмотрим функционал T_σ на $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$, определяемый равенством

$$T_\sigma q = F_\sigma(z_0), \tag{2.12}$$

как значение функции F_σ в точке z_0. Вычислим для функционала T_σ, заданного равенством (2.12), его норму и уклонение (1.5).

Лемма 1. *Для функционала* (2.12) *при* $\sigma = \ln\delta$ *имеют место равенства*

$$\|T_\sigma\| = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}, \quad U(T_\sigma) = \beta|s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что для граничных значений $s_\delta = sh^\sigma, \sigma = \ln\delta$, почти всюду на $[0,2\pi]$ имеет место равенство

$$|s_\delta(e^{it})| = |\Phi_\delta(t)| = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in E_0, \\ \delta\phi_1(t), & t \in E_1, \end{cases}$$

и в точке $z_0 \in D$ — равенство

$$|s_\delta(z_0)| = |s(z_0)|\delta^\alpha, \quad \alpha = w(z_0,\gamma_1,D).$$

В силу неотрицательности ядра Пуассона для нормы T_σ имеем оценку сверху

$$\|T_\sigma\| = \sup\Big\{\Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(e^{it})}\,q(e^{it})\,dt\Big| : q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\ \|q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le 1\Big\}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\,dt\ |s_\delta(z_0)|\,\delta^{-1} = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{\alpha-1} = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}.$$

С другой стороны, рассматривая в качестве q граничные значения на γ функции $\delta^{-1}s_\delta$, получаем оценку снизу

$$\|T_\sigma\| \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\,dt\ |s_\delta(z_0)|\,\delta^{-1} = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}.$$

Таким образом, действительно, $\|T_\sigma\| = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}$.

Теперь вычислим уклонение (1.5) для функционала T_σ. Применение формулы Пуассона к аналитической и ограниченной в круге D функции $f/s_\delta, f \in Q$, дает равенство

$$\frac{f(z)}{s_\delta(z)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\rho,t-\theta)\,\frac{f(e^{it})}{s_\delta(e^{it})}\,dt, \quad z = \rho e^{i\theta}.$$

Отсюда вытекает представление

$$f(z) - F_\sigma(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(\rho, t-\theta)\,\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\,f(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\,f(e^{it})\,dt.$$

Это представление с учетом неравенства $\left|f(e^{it})/s_\delta(e^{it})\right| \le 1$ почти всюду на E_0 для произвольной функции $f \in Q$ влечет оценку уклонения (1.5) для функционала T_σ

$$U(T_\sigma) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,dt\ |s_\delta(z_0)| = \beta |s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Для оценки снизу уклонения рассмотрим в качестве f функцию s_δ, принадлежащую классу Q. Тогда

$$U(T_\sigma) \ge \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(e^{it})}\,s_\delta(e^{it})\,dt\right| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,dt\ |s_\delta(z_0)| = \beta |s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Тем самым доказано, что $U(T_\sigma) = \beta |s(z_0)|\,\delta^\alpha$. Лемма 1 доказана.

Положив $N = |s(z_0)|\,\alpha\delta^{-\beta}$, получим для уклонения $U(T_\sigma)$ выражение

$$U(T_\sigma) = |s(z_0)|^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.13}$$

Объединение равенств (2.10) и (2.13) влечет следующее утверждение о задаче наилучшего приближения функционала (1.6).

Теорема 2. *В случае $K = z_0$ для произвольного $N > 0$ справедливо равенство*

$$E(N) = |s(z_0)|^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом функционалом наилучшего приближения является определяемый соотношением (2.12) *функционал T_σ с параметром*

$$\sigma = \frac{1}{\beta}\left(\ln\frac{\alpha}{N} + \ln|s(z_0)|\right).$$

Полученные только что результаты позволяют выписать в случае $K = z_0$ и решение задачи (1.3). Вычислим вначале величину погрешности (1.2) для метода T_σ.

Лемма 2. *Для функционала, определяемого соотношением* (2.12), *при $\sigma = \ln\delta$ имеет место равенство*

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) = |s(z_0)|\,\delta^\alpha. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 1, оценим уклонение $\mathcal{U}(T_\sigma, \delta)$ сверху

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) = \sup\left\{|f(z_0) - T_\sigma q|\colon f \in Q,\ q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\ \|f - q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

$$\le \sup\left\{|f(z_0) - T_\sigma f|\colon f \in Q\right\} + \sup\left\{|T_\sigma(f - q)|\colon f \in Q,\ q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\ \|f - q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

$$\le U(T_\sigma) + \|T_\sigma\|\delta = |s(z_0)|\,\beta\,\delta^\alpha + |s(z_0)|\,\alpha\,\delta^{-\beta}\,\delta = |s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Выбор $q \equiv 0$ и $f = s_\delta$ дает оценку уклонения снизу

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) \ge |s_\delta(z_0)| = |s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Лемма доказана.

Равенства (2.9) и (2.14) позволяют сформулировать следующее утверждение о задаче оптимального восстановления (1.3).

Теорема 3. *В случае $K = z_0$ для произвольного $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta) = |s(z_0)|\, \delta^{\alpha}.$$

При этом оптимальным методом восстановления является определяемый соотношением (2.12) *метод T_σ с параметром $\sigma = \ln \delta$.*

В заключение этой части статьи отметим, что теоремы 2 и 3 могут быть получены как следствие из частного случая для весов, тождественно равных единице, — случая $\phi \equiv 1$, исследованного в работе [2]. Экстремальный функционал T_σ в общем случае выражается через экстремальный функционал $\widetilde{T}_\sigma$ при $\phi \equiv 1$ по формуле

$$T_\sigma g = s(z_0)\widetilde{T}_\sigma\Big(\frac{g}{s}\Big).$$

2.3. Оптимальное восстановление и наилучшее приближение оператора Υ. На пространстве $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ зададим оператор $\mathcal{T}_\sigma$, который ставит в соответствие функции q сужение на множество K функции F_σ, определяемой равенством (2.11). Таким образом, оператор $\mathcal{T}_\sigma$ с параметром $\sigma = \ln \delta$ определяется формулой

$$(\mathcal{T}_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, q(e^{it})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s(z)}{s(e^{it})}\Big(\frac{h(z)}{h(e^{it})}\Big)^{\sigma} q(e^{it})\, dt, \quad z = re^{i\tau} \in K. \tag{2.15}$$

При произвольных $z \in D$ и $q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ для функции F_σ справедлива оценка

$$|F_\sigma(z)| \le |s_\delta(z)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{|q(e^{it})|}{\delta\phi_1(t)}\, dt \le M(q,\delta)|s_\delta(z)|, \quad M(q,\delta) = \delta^{-1}\|q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}.$$

Поэтому из ранее доказанного факта $s_\delta \in B(K)$, согласно условию (B), следует, что $F_\sigma \in B(K)$. Таким образом, оператор $\mathcal{T}_\sigma$ является оператором из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$.

Связь между оператором $\mathcal{T}_\sigma$ и экстремальным в теоремах 2 и 3 функционалом T_σ выражается соотношением

$$(\mathcal{T}_\sigma q)\,(z_0) = T_\sigma q.$$

Следствием этой взаимосвязи, лемм 1 и 2 является утверждение о норме $\mathcal{T}_\sigma$ и его уклонении от оператора Υ.

Лемма 3. *Для оператора $\mathcal{T}_\sigma$, определяемого соотношением* (2.15), *при $\sigma = \ln \delta$ для величины погрешности восстановления* (1.2) *имеет место равенство*

$$\mathcal{U}(\mathcal{T}_\sigma, \delta) = \|s\delta^w\|_B; \tag{2.16}$$

для нормы и уклонения (1.5) *— равенства*

$$\|\mathcal{T}_\sigma\| = \|ws\delta^{w-1}\|_B, \quad U(\mathcal{T}_\sigma) = \|(1-w)s\delta^w\|_B. \tag{2.17}$$

В случае $K \subset \gamma_\alpha$ равенство (2.16) *примет вид*

$$\mathcal{U}(\mathcal{T}_\sigma, \delta) = \|s\|_B\, \delta^{\alpha};$$

равенства (2.17) *— вид*

$$\|\mathcal{T}_\sigma\| = \alpha\|s\|_B\, \delta^{-\beta}, \quad U(\mathcal{T}_\sigma) = \beta\|s\|_B\, \delta^{\alpha}, \quad \beta = 1-\alpha. \tag{2.18}$$

В следующих двух теоремах приведено решение задач оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора Υ.

Теорема 4. *Для произвольного $K \subset D$ и $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{2.19}$$

При этом оптимальным методом восстановления является определяемый соотношением (2.15) *метод $\mathcal{T}_\sigma$ с параметром $\sigma = \ln\delta$.*

В случае, когда $K \subset \gamma_\alpha$, равенства (2.19) *примут вид*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha,$$

где коэффициент определяется равенством $\mathcal{C} = \|s\|_B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объединяя вместе (2.5), (1.10) и (2.16), получим

$$\|s\delta^w\|_B = \omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le \mathcal{U}(\mathcal{T}_\sigma, \delta) = \|s\delta^w\|_B.$$

Откуда следуют равенства (2.19) и экстремальность оператора $\mathcal{T}_\sigma$. Теорема доказана.

Теорема 5. *В случае $K \subset \gamma_\alpha$ для произвольного $N > 0$ справедливо равенство*

$$E(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta},$$

где коэффициент определяется равенством $\mathcal{C} = \|s\|_B$. При этом оператором наилучшего приближения является оператор $\mathcal{T}_\sigma$, определяемый соотношением (2.15) *с параметром*

$$\sigma = \frac{1}{\beta}\left(\ln\frac{\alpha}{N} + \ln\mathcal{C}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $N = \alpha\|s\|_B\,\delta^{-\beta}$ и выразим $U(\mathcal{T}_\sigma)$ из равенства (2.18) через N

$$U(\mathcal{T}_\sigma) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.20}$$

С другой стороны, вычислив величину $\Delta(N)$, определенную равенством (1.7), получим

$$\Delta(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.21}$$

Объединяя вместе равенства (2.20), (2.21) и неравенство (1.8), получаем

$$\mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta} = \Delta(N) \le E(N) \le U(\mathcal{T}_\sigma) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда вытекает утверждение теоремы 5.

2.4. Выбор оптимальной информации при восстановлении оператора Υ. В этой части работы рассмотрим задачу (1.4) оптимального восстановления оператора Υ с наилучшим выбором множества γ_1, на котором заданы граничные значения функции с погрешностью по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ на классе Q. В постановке задачи (1.4) предполагается, что весовые функции ψ_k являются сужением на γ_k одной функции $\psi(e^{it}) = 1/\phi(t), t \in [0, 2\pi]$.

Сначала рассмотрим случай, когда множество K состоит из точки z_0 и, соответственно, Υ является функционалом — значением функции в точке $z_0 \in D : \Upsilon f = f(z_0)$. Подставив в определение (1.4) величину оптимального восстановления функционала (2.9), получим

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu) = \inf\left\{|s(z_0)|\delta^{w(z_0,\gamma_1,D)} \colon m(\gamma_1) \le \mu\right\} = |s(z_0)|\exp\left\{\ln\delta\sup\left\{w(z_0,\gamma_1,D) \,:\, m(\gamma_1) \le \mu\right\}\right\}.$$

Выражая гармоническую меру через ядро Пуассона, нетрудно вычислить ее верхнюю грань

$$\sup\left\{w(re^{i\tau},\gamma_1,D)\,:\,m(\gamma_1)\le\mu\right\}\sup\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\,dt\colon m(E_1)\le\mu\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\mu/2}^{\mu/2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\,\operatorname{arctg}\Big(\frac{1+r}{1-r}\,\operatorname{tg}\frac{\mu}{4}\Big).$$

В результате получаем решение задачи (1.4) выбора оптимальной информации при восстановлении функционала. Обозначим через u_μ функцию, определяемую в круге D равенством

$$u_\mu(z)=\frac{2}{\pi}\,\operatorname{arctg}\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\,\operatorname{tg}\frac{\mu}{4}\Big).$$

Ясно, что функция u_μ является радиальной, т. е. $u_\mu(z)=u(|z|)$, $z\in D$.

Вышеизложенное доказывает справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *В случае, когда множество K есть точка $z_0=re^{i\tau}$, $0<r<1$, при $0<\delta\le1$ и $0<\mu<2\pi$ для величины* (1.4) *справедливо равенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu)=|s(re^{i\tau})|\delta^{u_\mu(r)}.$$

При этом нижняя грань в (1.4) *достигается на дуге окружности*

$$\gamma_1=\big\{e^{it}\colon|t-\tau|<\frac{\mu}{2}\big\}.$$

Из теоремы 6 и монотонности нормы $B(K)$ при произвольном $K\subset D$ для задачи выбора оптимальной информации при восстановлении оператора Υ вытекает оценка снизу.

Следствие. *При $0<\delta\le1$ и $0<\mu<2\pi$ для величины* (1.4) *справедливо неравенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu)\ge\|s\delta^{u_\mu}\|_B. \tag{2.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из теоремы 6 следует, что для произвольной точки $z_0\in D$ и произвольного множества γ_1, $m(\gamma_1)\le\mu$, имеет место неравенство

$$|s(z_0)|\delta^{u_\mu(z_0)}\le|s(z_0)|\delta^{w(z_0,\gamma_1,D)}.$$

Тогда в силу монотонности нормы $B(K)$ справедливо неравенство

$$\|s\delta^{u_\mu}\|_B\le\|s\delta^{w}\|_B.$$

Рассмотрев в последнем неравенстве нижнюю грань по γ_1 и используя равенство (2.19), получим утверждение следствия.

В случае, когда все точки множества K имеют один аргумент, т. е. множество K принадлежит некоторому радиусу $K^\tau=\{z\in D\colon\arg z=\tau\}$ круга D, для каждой точки множества K нижняя грань в задаче выбора оптимальной информации при восстановлении функционала — значения аналитической функции в этой точке — достигается на одной и той же дуге и, следовательно, в неравенстве (2.22) имеет место равенство. Поэтому, в силу теоремы 6 справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *В случае $K\subset K^\tau$ при $0<\delta\le1$ и $0<\mu<2\pi$ для величины* (1.4) *справедливо равенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu)=\|s\delta^{u_\mu}\|_B.$$

При этом нижняя грань в (1.4) *достигается на дуге окружности*

$$\gamma_1=\big\{e^{it}\colon|t-\tau|<\frac{\mu}{2}\big\}.$$

В полученных в этой части результатах экстремальные множества не зависят от весов. Эти результаты являются следствием экстремального свойства гармонической меры относительно фиксированной точки и круга D: максимум гармонической меры (а впрочем, и минимум) достигается на связной дуге окружности. Связная дуга окружности является экстремальным множеством и в других задачах, например, в задаче о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на компактном подмножестве единичной окружности (см. работу [6]).

Автор выражает благодарность В. В. Арестову за плодотворные обсуждения результатов; Е. Е. Бердышевой, прочитавшей рукопись статьи и сделавшей полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзенберг Л.А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 248 с.
2. **Акопян Р.Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 163–170.
3. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
4. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
5. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
6. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852-1878.
7. **Габушин В.Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т. 8, no. 5. С. 551–562.
8. **Голузин Г.М., Крылов В.И.** Обобщенная формула Carleman'a и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
9. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
10. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
11. **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 85–93.
12. **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М., Осипенко К.Ю.** Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39, вып 1. С. 118–133.
13. **Micchelli Ch.A., Rivlin Th.J.** A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory (Proc. Internat. Sympos., Freudenstadt, 1976). N.Y. etc.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
14. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ.Inc., 2000. 229 p.
15. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
16. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.
17. **Szegö G.** Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Ann. 1921. Vol. 84, no. 3. P. 232–244.

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

Поступила 28.03.2016

REFERENCES

1. Aizenberg L.A. *Formuly Karlemana v kompleksnom analize. Pervye prilozheniya* (Carleman's formulas in complex analysis). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1993, Revised translation of the 1990 Russian original, Ser. Mathematics and Its Applications, vol. 244, 299 p.
2. Akopyan R.R. Optimal recovery of analytic functions from boundary conditions specified with error. *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 2, pp. 177–182.
3. Arestov V.V. Uniform regularization of the problem of calculating the values of an operator *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 618–626.
4. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded operators. *Russian Math.* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1995, vol. 39, no. 11, p. 38–63.
5. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, p. 1093–1126.
6. Arestov V.V., Mendelev A.S. Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems. *J. Approx. Theory*, 2010, vol. 162, no. 10, pp. 1852–1878.
7. Gabushin V.N. Best approximations of functionals on certain sets. *Math. Notes*, 1970, vol. 8, no. 5, pp. 780–785.
8. Golusin G.M., Krylow V.I. Generalized Carleman's formula and its application to the analytic continuation of functions. *Mat. Sb.*, 1933, vol. 40, no. 2, p. 144–149 (in Russian).
9. Golusin G.M. Geometric theory of functions of a complex variable. Providence: American Math. Soc., 1969, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 26, 676 p.
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza* (III-posed problems of mathematical physics and analysis). Providence: American Math. Soc., 1986, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 64, 290 p.
11. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of functionals based on inaccurate data. Mat. Zametki., vol. 50, no. 6, 1991, pp. 85–93 (in Russian).
12. Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M., Osipenko K.Yu. Indefinite knowledge about an object and accuracy of its recovery methods. *Probl. Inf. Transm.*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 104–118.
13. Micchelli Ch.A., Rivlin Th.J. A survey of optimal recovery. *Optimal Estimation in Approximation Theory. Proc. Internat. Sympos., Freudenstadt, 1976*, New York etc.: Plenum Press, 1977, pp. 1–54.
14. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ. Inc., 2000, 229 p.
15. Privalov I.I. *Granichnye svojstva analiticheskih funkcij* (Boundary properties of analytic gunctions). Moscow, Leningrad: GITTL Publ., 1950, 336 p. (in Russian).
16. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99.
17. Szegö G. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Math. Ann.*, 1921, vol. 84, no. 3, pp. 232–244.

R.R. Akopyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .