ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.977

О ГАМИЛЬТОНИАНЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ[1]

Д. В. Хлопин

Исследуются необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель не обязательно экспоненциального вида. В качестве критерия оптимальности рассматривается равномерно обгоняющий критерий. В терминах предельных градиентов платежной функции описано поведение на бесконечности пары (сопряженная переменная, гамильтониан) в окрестности оптимальной траектории. Это позволяет гарантировать существование соответствующего оптимальному процессу предельного решения принципа максимума Понтрягина. Обсуждаются предположения, гарантирующие при этом необходимость как условия типа Мишеля (Michel condition) для максимизированного гамильтониана, так и предложенной для сопряженной переменной в работах Асеева и Кряжимского формулы типа формулы Коши; в частности, это дополняет принцип максимума до полной системы соотношений. Отдельно рассмотрен случай дисконтирующего множителя вида $(1+t)^{-s}$.

Ключевые слова: задача управления на бесконечном промежутке, необходимые условия, условия трансверсальности на бесконечности; принцип максимума Понтрягина, условие Мишеля, равномерно обгоняющее управление

D. V. Khlopin. On the Hamiltonian in infinite horizon control problems.

We study necessary optimality conditions for infinite horizon control problems with performance functional containing a discounting factor of not necessarily exponential form. A uniformly overtaking criterion is considered as an optimality criterion. The behavior of the pair “adjoint variable–Hamiltonian” at infinity in a neighborhood of an optimal trajectory is described in terms of limiting gradients of the payoff function. This guarantees the existence of the limiting solution of the Pontryagin maximum principle corresponding to the optimal process. We discuss the assumptions that provide the necessity of both a condition of the Michel type for the maximized Hamiltonian and a formula of the Cauchy type for the adjoint variable proposed in papers by Kryazhimskii and Aseev. In particular, this extends the maximum principle to a complete system of relations. The case of a discounting factor of the form $(1+t)^{-s}$ is considered separately.

Keywords: infinite horizon control problem, necessary conditions, transversality condition at infinity, Pontryagin maximum principle, Michel condition, uniformly overtaking optimal control.

MSC: 49K15, 91B62, 49J52

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-295-310

Введение

Впервые необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке (с фиксированным правым концом) были показаны Л. С. Понтрягиным и его учениками на рубеже 1950-60-х гг. Существенно позднее Халкиным в максимально общей для таких задач постановке необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина были показаны, но эти соотношения не содержали какого-либо краевого условия на бесконечности, следовательно, не являлись полной системой соотношений.

Предложено достаточно много краевых условий на бесконечности, самыми простыми из них являются построенные по аналогии с задачами на конечном промежутке условия

$$\lim_{T\to\infty}\psi(T)=0,\quad \lim_{T\to\infty}H^*[T]=0;$$

в общем случае они не являются необходимыми условиями.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00505).

Принципиальной сложностью для получения в подобного рода задачах дополнительных условий на бесконечности, условий трансверсальности, является необходимость нахождения для сопряженного уравнения (т. е. для линейной системы) такой асимптотики, что была бы выполнена хотя бы для одного, но и не для континуального числа решений. Впервые это было сделано в [1] для линейного случая и при достаточно сильных предположениях переходом к подходящему функциональному пространству, содержащему в точности одну сопряженную переменную. Там же для этой сопряженной переменной была найдена формула, дополняющая принцип максимума до полной системы соотношений. Указать для нелинейного случая соответствующую формулу (типа формулы Коши) в виде несобственного интеграла удалось в ряде работ С. М. Асеева и А. В. Кряжимского (затем и В. М. Вельева, А. О. Белякова) [2–5]. В частности, эта формула дополняет систему принципа максимума до полной системы соотношений при дополнительных предположениях, гарантирующих абсолютную сходимость соответствующего несобственного интеграла (например, условие доминирования дисконтирующего множителя [2, § 12; 3, § 4] или условие [4, (A2),(3.10)]).

Другой метод модификации условия $\psi(T) \to 0$ $(T \to \infty)$ был предложен Сейерстадом в [6, Theorem 8.1]: нужно искать сопряженную переменную как предел решений сопряженного уравнения, зануляющихся во все более поздние моменты времени. Как было показано в [7, Corollary 2], принцип максимума с таким дополнительным требованием на сопряженную переменную, как необходимое условие оптимальности (для слабо равномерного критерия оптимальности), не требует каких-либо дополнительных предположений, в том числе на асимптотическое поведение целевой функции, траекторий или решений сопряженного уравнения. Более того, начальное значение $\psi(0)$ сопряженной переменной такого решения (предельного решения [8] принципа максимума) также может быть выражено с помощью несобственного интеграла, включая в себя формулу типа Коши как частный случай, см. [7, § 5]. Еще одно, эквивалентное данному, представление для $\psi(0)$ было получено в терминах предельных градиентов платежной функции (по начальной позиции), см. [8, Theorem 3.1].

Необходимость условия $H^*[T] \to 0(T \to \infty)$ был показана Мишелем [9, Theorem] для задач управления с автономной динамикой и дисконтирующим множителем экспоненциального типа при достаточно мягких предположениях. Более того, там же была показана явная формула [9, (9)] для начального значения максимизированного гамильтониана (а значит, и для зависимости $t \mapsto H^*[t]$). Позже метод был распространен на задачи более общего вида (см. ссылки в [2; 10]). В [10] было замечено, что для дисконтирующего множителя в виде экспоненты формула [9, (9)] для максимизированного гамильтониана также может быть выражена в виде предельного градиента (уже по времени) от платежной функции и этот максимизированный гамильтониан можно выделить среди решений соответствующего дифференциального уравнения (см. (3.1a)) как предел решений того же уравнения, зануляющихся во все более поздние моменты времени.

В данной работе показывается, уже для задач управления с дисконтирующим множителем общего вида, что пара (сопряженная переменная, гамильтониан) может быть описана в том же виде: и как предельный градиент платежной функции, и как предел решений системы, построенной на основе системы принципа максимума, решений, у которых компоненты зануляются вдоль одной и той же неограниченно возрастающей последовательности моментов времени. Показано, что существование такой пары (сопряженная переменная, гамильтониан) является необходимым условием для оптимальности, в частности, если целевой функционал сходится (в смысле Римана) вдоль оптимальной траектории. Отмечен также ряд условий на асимптотики, выполнение которых позволяет гарантировать необходимость формулы типа Коши для сопряженной переменной и соответствующего аналога формулы [9, (9)] для гамильтониана, дополняя тем самым систему принципа максимума до полной системы соотношений. В случае дисконтирующего множителя вида $(1+t)^{-s}$ для этого требуется лишь равномерная ограниченность платежной функции и ее производной по начальному положению. Сходный результат, также в предположении равномерной ограниченности, но для случая линейной динамики с выпуклой функции мгновенной полезности и дисконтирующим множителем общего вида, был недавно получен принципиально иным способом в [5, Remark 1].

1. Основные определения и постановки

1.1. Управляемая система

Введем временной интервал $\mathbb{T} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}_{\geq 0}$ и фазовое пространство исходной управляемой системы, некоторое конечномерное евклидово пространство $\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^m$. Рассмотрим задачу минимизации на бесконечном промежутке

$$l(b) + \int_0^\infty r(t) f_0(x,u)\, dt \to \min, \tag{1.1a}$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \tag{1.1b}$$

$$x(0) \in \mathcal{C}. \tag{1.1c}$$

Здесь функции r, f_0 скалярны; x — фазовая переменная, принимающая значения в $\mathbb{X}$; u — управляющий параметр из некоторого замкнутого подмножества U конечномерного евклидового пространства. В качестве класса допустимых управлений возьмем множество $\mathcal{U} \stackrel{\triangle}{=} L^\infty(\mathbb{T}, U)$.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия.

1. Непустое множество $\mathcal{C}$ замкнуто в $\mathbb{X}$.

2. Функция $l : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ локально липшицева.

3. Функция $f : \mathbb{X} \times U \to \mathbb{X}$ измерима по Борелю по u и непрерывно дифференцируема по x.

4. Для всякого допустимого управления $u \in \mathcal{U}$ отображение $(t,x) \mapsto f(x,u(t))$ удовлетворяет условию подлинейного роста.

5. Функция $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, а ее производная — локально липшицева.

6. Функция $f_0 : \mathbb{X} \times U \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю по u, непрерывно дифференцируема по x и полунепрерывна снизу по u.

7. Функции $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f_0}{\partial x}$ измеримы по Борелю по u и локально липшицевы по x.

Теперь для каждого допустимого управления $u.$ и начальной позиции $b \in \mathbb{X}$ найдется решение системы (1.1b) с условием $x(0) = b$. Это решение единственным образом может быть продолжено на все $\mathbb{T}$, обозначим его через $x(b,u;\cdot)$.

Пару (x,u) назовем допустимым управляемым процессом, если $u \in \mathfrak{U}$, $x(0) \in \mathcal{C}$, $x(\cdot) = x(x(0),u;\cdot)$.

1.2. О критериях оптимальности

Будем предполагать, что для некоторого допустимого управляемого процесса (x^*,u^*) найдутся такие сходящаяся к нулю последовательность чисел δ_n и неограниченно возрастающая последовательность чисел τ_n, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для всех положительных $T \in [\tau_n - 1/2, \tau_n + 1/2]$ выполнено

$$l(x^*(0)) + \int_0^T r(t) f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big) dt - \delta_n^2 \leq \inf_{(b,u)\in\mathcal{C}\times\mathcal{U}} \left(l(b) + \int_0^T r(t) f_0\big(x(b,u;t), u(t)\big) dt \right). \tag{1.2}$$

Зафиксируем такие процесс (x^*,u^*) и последовательность чисел τ_n.

Введем теперь вектор $b_* \overset{\triangle}{=} x^*(0)$ и скалярную функцию J:

$$J(b,\Delta;T) \;\overset{\triangle}{=}\; \int\limits_0^T r(t+\Delta) f_0\big(x(b,u^*;t),u^*(t)\big)\,dt \quad \forall\, b\in\mathbb{X},\quad T>0,\quad \Delta\in\mathbb{R}.$$

Приведем для сравнения с условием (1.2) следующие критерии оптимальности [11].

Если допустимый процесс (x^*,u^*) при некоторой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени t_n, при некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел β_n удовлетворяет условию

$$l(x^*(0)) + \int\limits_0^{t_n} f_0\big(t,x^*(t),u^*(t)\big)\,dt - \beta_n^2 \le \inf_{(b,u)\in\mathcal{C}\times\mathcal{U}} \left(l(b) \;+\; \int\limits_0^{t_n} f_0\big(t,x(b,u;t),u(t)\big)\,dt \right), \tag{1.3}$$

то назовем этот процесс *слабо равномерно оптимальным* (weakly uniformly overtaking optimal) в задаче (1.1a)–(1.1c) или, точнее, t-*оптимальным.* Если допустимый процесс (x^*,u^*) является t-оптимальным для любой неограниченно возрастающей последовательности чисел t_n, то назовем его *равномерно оптимальным* в задаче (1.1a)–(1.1c).

Отметим, что

1. Условие (1.2) выполнено, если (x^*,u^*) равномерно оптимален, а предел

$$J_{**} \overset{\triangle}{=} \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T r(t) f_0(x^*(t),u^*(t))\,dt \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

конечен. Такой критерий применялся, в частности, в [10]. Более сильные, чем (1.4), предположения использовались, например, в [13]. В некоторых случаях исходную задачу с равномерно оптимальным управлением можно свести к задаче с выполненным условием (1.2) (см., например, [10, Corollary 3]). Отметим, что в случае равномерно оптимального управления в качестве τ можно взять произвольную неограниченно возрастающую последовательность моментов времени.

2. Условие (1.2) выполнено, если u^* слабо равномерно оптимально, и $r(t)f_0(x(t),u(t))$ равномерно по всем допустимым процессам стремится к 0 при $t\to+\infty$. Сходные условия, см., например, в [2, (A3); 12].

1.3. О предельных градиентах

Пусть даны некоторое конечномерное евклидово пространство E и полунепрерывная снизу функция $g: E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (см. [14, § 1.4]). Вектор $\zeta\in E$ назовем *проксимальным градиентом функции g в $y\in E$*, если для некоторых окрестности Ω точки y и положительного числа σ выполнено $g(\xi)\ge g(y)+\zeta(\xi-y)-\sigma\|\xi-y\|^2$ для всех $\xi\in\Omega$. Множество всех проксимальных градиентов в y обозначим через $\partial^P g(y)$ и назовем *проксимальным субдифференциалом.* Это множество непусто для всех y из некоторого плотного в $\{\xi\,|\,g(\xi)<+\infty\}$ множества. Введем предельный субдифференциал $\partial^1 g(y)$ функции g в точке y как множество всех $\zeta\in E$, для которых

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, y_n\in\mathbb{X},\quad \zeta_n\in\partial^P g(y_n),\quad y_n\to y, \zeta_n\to\zeta,\quad g(y_n)\to g(y).$$

Если g липшицева в окрестности точки y, то $\partial^1 g(y)$ непусто, более того, $co\,\partial^1 g(y) = \partial^{Clarke} g(y)$. Через $N^{\mathcal{C}}(y)$ будем обозначать предельный нормальный конус множества $\mathcal{C}$ в точке y.

Следуя [8], подобным образом введем субградиент на бесконечности или, более точно, вдоль неограниченно возрастающей последовательности моментов времени τ_n. Зададим $\mathcal{T} \overset{\triangle}{=} \{\tau_n\,|\,n\in$

$\mathbb{N}\}$. Для дифференцируемой функции $g : E \times \mathbb{T} \to \mathbb{X}$ введем предельный и предельный сингулярный субдифференциалы ($\partial^1 g$ и $\partial^0 g$ соответственно) в бесконечно удаленной точке (y, ∞_τ) правилом

$$\partial^\lambda g(y, \infty_\tau) = \big\{\zeta \,|\, \forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in E, t_n \in \mathcal{T}, \lambda_n \in \mathbb{T}, \zeta_n \in \partial^1 g(y_n, t_n),$$
$$y_n \to y, t_n \to \infty, \lambda_n \to \lambda, \lambda_n\zeta_n \to \zeta, g(y_n, t_n) - g(y, t_n) \to 0\big\}.$$

Далее нам также потребуется рассматривать такие градиенты для отображений $\mathbb{X} \ni x \to J(x, s; T)$, $\mathbb{T} \ni t \to J(b, t; T)$ при фиксированных $b \in \mathbb{X}, s \in \mathbb{T}$. Будем обозначать их через $\partial^\lambda_x J(b, s; \infty_\tau)$, $\partial^\lambda_t J(b, s; \infty_\tau)$ соответственно.

2. Принцип максимума Понтрягина

Введем гамильтониан H правилом: для всех $(x, u, \psi, \lambda, t) \in \mathbb{X} \times U \times \mathbb{X} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}$

$$H(x, u, \psi, \lambda, t) \ \stackrel{\triangle}{=}\ \psi f\big(x, u\big) - \lambda r(t) f_0\big(x, u\big).$$

Нас будут интересовать следующие соотношения:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \tag{2.1a}$$
$$-\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t), \psi(t), \lambda, t\big), \tag{2.1b}$$
$$H\big(x(t), u(t), \psi(t), \lambda, t\big) = \sup_{u' \in U(t)} H\big(x(t), u', \psi(t), \lambda, t\big). \tag{2.1c}$$

Мы будем также использовать нормировочные условия

$$||\psi(0)|| + \lambda = 1, \tag{2.1d}$$
$$\lambda \in \{0, 1\}. \tag{2.1e}$$

Легко видеть, что каждое $u \in \mathcal{U}$ при каждом начальном условии задает единственное локальное решение системы (2.1a), (2.1b) и это решение можно продолжить на все $\mathbb{T}$.

Введем ключевое определение.

Нетривиальное решение (λ^*, ψ^*) системы (2.1a), (2.1b) для пары (x^*, u^*) назовем *τ-предельным* (или просто предельным), если для некоторой подпоследовательности $\tau' \subset \tau$ тройка (x^*, ψ^*, λ^*) является пределом (равномерным на всяком отрезке времени) заданных на $[0, \tau'_n]$ решений (x_n, ψ_n, λ_n) следующих краевых задач:

$$\dot{x}_n(t) = f\big(x_n(t), u^*(t)\big), \tag{2.2a}$$
$$-\dot{\psi}_n(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x_n(t), u^*(t), \psi_n(t), \lambda_n, t\big), \tag{2.2b}$$
$$\dot{\lambda}_n(t) = 0, \tag{2.2c}$$
$$\psi_n(\tau'_n) = 0. \tag{2.2d}$$

Назовем данное решение *точным τ-предельным*, если к тому же при $n \to \infty$ имеет место $J(x_n(0), 0; \tau'_n) - J(x^*(0), 0; \tau'_n) \to 0$.

Как показано в [8, Proposition 2.1], всякому τ-оптимальному для задачи (1.1a)–(1.1c) процессу (x^*, u^*) соответствует точное τ-предельное решение (ψ^*, λ^*) принципа максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c), удовлетворяющее (2.1d). При этом можно также считать выполненным $\lambda_n + ||\psi_n(0)|| = \lambda^* + ||\psi^*(0)||$ (или при $\lambda^* > 0$ полагать $\lambda_n = \lambda^*$).

Определение τ-предельного решения (ψ^*, λ^*) системы (2.1a)–(2.1d) имеет несколько эквивалентных формулировок. Прежде всего заметим, что система (2.2b), (2.2c) линейна. Для каждого вектора $\xi \in \mathbb{X}$ существует решение $A(\xi; t)$ матричной задачи Коши:

$$\frac{dA(\xi; t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(\xi, u^*; t), u^*(t)\big) A(\xi; t), \quad A(\xi; 0) = 1_{\mathbb{L}}.$$

Определим вектор-функцию I правилом: для всех $T \in \mathbb{T}$, $\Delta \in \mathbb{R}$

$$I(\xi, \Delta; T) \triangleq \int_0^T r(t+\Delta) \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(x(\xi, u^*; t), u^*(t)\big)\, A(\xi; t)\, dt.$$

Теперь для решения ψ уравнения (2.2b) выполнена формула Коши

$$\psi(t) = \big(\psi(0) + \lambda I(x(0), 0; t)\big) A^{-1}(x(0); t) \quad \forall\, t \in \mathbb{T}, \tag{2.3}$$

в частности $\psi_n(0) = -\lambda_n I(x_n(0), 0; \tau_n)$.

Переходя к пределу, используя указанное выше соотношение для I, мы можем выразить $\psi^*(0)$. Как показано, например, в [7, Corollary 8], если $I(b, 0; t)$ имеет конечный предел при $b \to b_*, t \to \infty$, то предельное решение единственно с точностью до положительного множителя и может быть выражено в виде несобственного интеграла

$$-\psi^*(0) = \int_0^\infty r(t) \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(x^*(t), u^*(t)\big)\, A(b_*; t)\, dt, \quad \lambda^* = 1. \tag{2.4}$$

Другие предположения, при которых это выражение описывает сопряженную переменную, удовлетворяющую принципу максимума Понтрягина, а следовательно, дополняет принцип максимума Понятрягина до полной системы соотношений, можно найти, например, в [2, § 11, 12; 3, § 4, 5; 7, § 5]. В общем случае эта формула может не указывать на решение принципа максимума, даже если интеграл внутри нее сходится в смысле Лебега (см. [8, § 3.2]). О более общих выражениях для $\psi^*(0)$ см. [7, § 4].

Для более компактного выражения предельной сопряженной переменной можно использовать предельный супердифференциал функции J на бесконечности, как, например, следует из [8, Theorem 3.1], решение (ψ^*, λ^*) системы (2.1a), (2.1b) является точным предельным в точности, если выполнено $\psi^*(0) \in \partial_x^{\lambda^*}(-J)(x^*(0), 0; \infty_\tau)$.

Далее мы покажем, что более сильный критерий оптимальности (1.2) влечет подобные формулы и выражения уже для пары (сопряженная переменная, гамильтониан). Для этого введем функцию R правилом: для всех $T \in \mathbb{T}$, $\Delta \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{X}$

$$R(\xi, \Delta; T) \triangleq \frac{\partial J}{\partial \Delta}(\xi, \Delta; T) = \int_0^T \frac{dr}{dt}(t+\Delta) f_0\big(x(\xi, u^*; t), u^*(t)\big)\, dt.$$

Отметим, что выражения для гамильтониана с $R(\xi, \Delta; T)$ (в том числе при $\Delta \neq 0$) рассматривались, например, в [13].

3. Основной результат и его следствия

Теорема. *Пусть процесс (x^*, u^*) удовлетворяет условию (1.2) для задачи (1.1a)–(1.1c) с некоторой неограниченно возрастающей последовательностью моментов времени τ_n.*

Тогда для (x^*, u^*) найдется нетривиальное решение (ψ^*, λ^*) принципа максимума Понтрягина (2.1b), (2.1c) при $\lambda^* \in \{0, 1\}$ такое, что отображение

$$\mathbb{T} \ni t \mapsto H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda^*, t) = \psi^*(t) f(x^*(t), u^*(t)) - \lambda^* r(t) f_0(x^*(t), u^*(t))$$

для почти всех $t \geq 0$ совпадает с некоторой непрерывной функцией $\mathcal{H}^* \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и для всех $T \in \mathbb{T}$ эта функция $\mathcal{H}^*$ вместе с ψ^* удовлетворяет соотношениям

$$-\dot{\mathcal{H}}^*[T] = \lambda^* \frac{dr(t)}{dt} f_0\big(x^*(T), u^*(T)\big), \tag{3.1a}$$

$$\psi^*(0) \in \lambda^* \partial^1 l(x^*(0)) + N_L^{\mathcal{C}}(x^*(0)), \tag{3.1b}$$

$$\big(\psi^*(0), \mathcal{H}^*[0]\big) \in \partial^{\lambda^*}(-J)(x^*(0), 0; \infty_\tau). \tag{3.1c}$$

Более того, для некоторых последовательностей точек $b_n \in \mathbb{X}$, *чисел* $\Delta_n \in \mathbb{R}$ *и* $\lambda_n \in (0,1]$, *сходящихся к* $b_*, 0, \lambda^*$ *соответственно, и неограниченно возрастающей последовательности чисел* $t_n \in \mathcal{T}$ *выполнено*

$$-\psi^*(0) = \lim\nolimits_{n\to\infty} \lambda_n I(b_n, \Delta_n, t_n), \tag{3.1d}$$

$$-\mathcal{H}^*[0] = \lim\nolimits_{n\to\infty} \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n) = \lim\nolimits_{n\to\infty} \lambda_n \int\limits_0^{\tau_n} \frac{dr}{dt}(t+\Delta_n) f_0\big(x(b_n, u^*; t), u^*(t)\big)\, dt. \tag{3.1e}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы (см. разд. 4), сформулируем и покажем ряд следствий. Заметим, что в силу (3.1d) векторы $\lambda_n I(b_n, \Delta_n, t_n)$ ограничены, при этом векторы $\lambda^*, \psi^*(0)$ не могут одновременно равняться нулю. Теперь из (3.1a) и (3.1e) простой подстановкой получаем

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы, $\lambda_* = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда множество векторов $I(b_n, \Delta_n, t_n)$ неограничено. При этом $\lambda_* = 0$ также влечет

$$\mathcal{H}^*[T] = \psi^*(T) f(x^*(T), u^*(T)) = \mathrm{const} \quad \forall\,\text{п.в.}\, T \geq 0, \tag{3.1f}$$

и или $\mathcal{H}^* \equiv 0$, или множество чисел $R(b_n, \Delta_n, t_n)$ неограничено.

Формулы (3.1d), (3.1e) можно в ряде случаев упростить. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть для некоторой функции* $r_1 : [-1/2, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ *выполнены следующие предположения*:

1) *отображение* $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{1}{r_1(t)} \dfrac{dr(t)}{dt}$ *абсолютно непрерывно, имеет ограниченную вариацию и стремится к нулю при* $t \to \infty$, *а при* $\Delta \in \mathbb{R}$ *из некоторой окрестности нуля, отображения* $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r(t)}$ *равномерно ограничены*;

2) *для любого* b *из некоторой окрестности точки* $x_*(0)$, *для любого* $T > 0$ *числа*

$$\int\limits_0^T r_1(t) f_0(x(b; u^*)(t), u^*(t))\, dt$$

равномерно ограничены.

Тогда, в условиях теоремы, максимизированный гамильтониан $\mathcal{H}^*$ *также удовлетворяет*

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{H}^*[T] \;=\; 0, \tag{3.2a}$$

$$-\mathcal{H}^*[T] \;=\; \lambda_* \int\limits_T^{\infty} \frac{dr(t)}{dt} f_0(x^*(t), u^*(t))\, dt \quad \forall T \geq 0. \tag{3.2b}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из первого условия и липшицевости $\dfrac{dr}{dt}$ следует, что отображения $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{1}{r_1(t)} \dfrac{dr(t+\Delta)}{dt}$ абсолютно непрерывны, равномерно по Δ стремятся к нулю при $t \to \infty$, а их вариации на промежутках $[T, \infty)$ ограничены и также равномерно по Δ стремятся к нулю при $T \to \infty$. Теперь найдутся такие число M и достаточно малые окрестности нуля и $x^*(0)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T_\varepsilon > 0$, что при любых Δ, b из соответствующих окрестностей при всех $t > T_\varepsilon$ выполнено

$$\Big|\frac{1}{r_1(t)} \frac{dr(t+\Delta)}{dt}\Big| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \Big|\int\limits_0^T r_1(t) f_0(x(b; u^*)(t), u^*(t))\, dt\Big| < M,$$

а, кроме того, вариация функции $t \mapsto \dfrac{1}{r_1(t)}\dfrac{dr(t+\Delta)}{dt}$ на промежутке $[T,\infty)$ не превосходит $\varepsilon/2M$.

Зафиксируем некоторые Δ, b из соответствующих окрестностей. Введем для всех моментов t, $T>0$ числа

$$r_2(t)=\frac{1}{r_1(t)}\,\frac{dr(t+\Delta)}{dt},\quad K(T)=\int\limits_0^T r_1(t)f_0(x(b;u^*)(t),u^*(t))\,dt.$$

Отметим, что так определенные функции абсолютно непрерывны. Теперь, интегрируя по частям, для всех $\varepsilon>0$, $T>\theta>T_\varepsilon$ имеем

$$\big|R(b,\Delta;T)-R(b,\Delta;\theta)\big|=\Big|\int\limits_\theta^T r_2(t)\frac{K(t)}{dt}\,dt\Big|\le\big|K(T)r_2(T)\big|+\big|K(\theta)r_2(\theta)\big|+\Big|\int\limits_\theta^T\frac{dr_2(t)}{dt}K(t)\,dt\Big|$$

$$\le M\big|r_2(T)\big|+M\big|r_2(\theta)\big|+M\int\limits_\theta^T\Big|\frac{dr_2(t)}{dt}\Big|\,dt\le\varepsilon.$$

Отсюда для всякого $\varepsilon>0$ для достаточно больших N при $n>N$ выполнено $|R(b_n,\Delta_n,t_n)-R(b_n,\Delta_n,t_N)|<\varepsilon$. В силу (3.1e) число $-\mathcal{H}^*[0]$ совпадает с

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n R(b_n,\Delta_n,t_n)=\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_n R(b_n,\Delta_n,t_N)=\lim_{N\to\infty}\lambda_* R(x^*(0),0,t_N).$$

Раскрывая R, получаем (3.2b) для $T=0$, теперь из (3.1a) следует (3.2b) для $T>0$. Поскольку интеграл сходится в смысле Римана, имеем (3.2a). □

Можно упростить соответствующую формулу и для сопряженной переменной. Справедливы следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть функция r сохраняет знак, и для некоторой функции $r_1\colon[-1/2,\infty)\to\mathbb{R}_{>0}$ выполнено следующее:*

1) *при Δ, достаточно близких к нулю, функции $\mathbb{T}\ni t\mapsto\dfrac{r(t+\Delta)}{r_1(t)}$ монотонно идут к нулю при $t\to\infty$ и все они ограничены в совокупности;*

2) *для любого b из некоторой окрестности точки $x_*(0)$ векторы*

$$\int\limits_0^T r_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(b;u^*)(t),u^*(t))A(b;t)\,dt$$

имеют равномерный предел при $T\to\infty$.

Тогда, в условиях теоремы, найдено единственное τ-предельное решение принципа максимума Понтрягина с $\lambda^*=1$, при этом ψ^* однозначно восстанавливается формулой (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По признаку Абеля предел

$$\lim_{T\to\infty}I(b,\Delta;T)=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\frac{r(t+\Delta)}{r_1(t)}r_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(b;u^*)(t),u(t))A(b;t)\,dt$$

равномерен при Δ, b из соответствующих окрестностей, в частности, ограничен, следовательно по замечанию 1 показано $\lambda^*=1$. Теперь для всякого $\varepsilon>0$ для достаточно большого N при $n>N$ выполнено $|I(b_n,\Delta_n,t_n)-I(b_n,\Delta_n,t_N)|<\varepsilon$. В частности, $-\psi^*(0)$ в силу (3.1e) совпадает с $\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_n) = \lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_N) = \lim_{N\to\infty} I(x^*(0),0,t_N)$, т. е. выполнено (2.4). Как показано, например, в [7, Theorem 3], всякое решение соотношений принципа максимума Понтрягина, удовлетворяющее (2.4), является τ-предельным. Поскольку можно было взять произвольную сходящуюся к b_* последовательность из b_n, то множество $\partial_x^{\lambda^*}(-J)(x^*(0),0;\infty_\tau)$ — синглетон. Итак, других τ-предельных решений с $\lambda^*=1$ нет. □

Следствие 3. *Пусть для некоторой функции $r_1 : [-1/2,\infty)\to\mathbb{R}_{>0}$ выполнены следующие предположения:*

1) *отображение $\mathbb{T}\ni t\mapsto \dfrac{1}{r_1(t)}\dfrac{dr(t)}{dt}$ абсолютно непрерывно, имеет ограниченную вариацию и стремится к нулю при $t\to\infty$, а при $\Delta\in\mathbb{R}$ из некоторой окрестности нуля отображения $\mathbb{T}\ni t\mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r(t)}$ равномерно ограничены;*

2) *для любых $T>0$ и b из некоторой окрестности точки $x_*(0)$ векторы*

$$\int_0^T r_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(b;u^*)(t),u^*(t))A(b;t)\,dt$$

равномерно ограничены.

Тогда, в условиях теоремы, найдено τ-предельное решение принципа максимума Понтрягина с $\lambda^*=1$, при этом ψ^* однозначно восстанавливается формулой (2.4).

Доказательство. Повторяя начало доказательства следствия 1 с $K(t)$ равной каждой компоненте вектора

$$\int_0^T r_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(b;u^*)(t),u^*(t))A(b;t)\,dt,$$

получаем $\big|I(b,\Delta;T)-I(b,\Delta;\theta)\big|\le\varepsilon$ для всех $\varepsilon>0$, $\theta\ge 0, T>T_\varepsilon$ и b,Δ из соответствующих окрестностей.

Теперь для всякого $\varepsilon>0$ для достаточно больших N при $n>N$ выполнено $|I(b_n,\Delta_n,t_n)-I(b_n,\Delta_n,t_N)|<\varepsilon$. В частности, последовательность векторов $I(x^*(0),0,t_n)$ имеет конечный предел. Более того, $-\psi^*(0)$ в силу (3.1e) совпадает с

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_n) = \lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_N) = \lambda^*\lim_{N\to\infty} I(x^*(0),0,t_N).$$

Поскольку $\psi^*(0),\lambda^*$ не могут быть одновременно нулями, имеем $\lambda^*=1$ и (2.4). Как показано, например, в [7, Theorem 3], всякое решение соотношений принципа максимума, удовлетворяющее (2.4), является τ-предельным. □

Для задач экономического роста кроме дисконтирующего множителя r экспоненциального вида в работе [15] предложено использовать функции типа $(1+t)^{-s}$ при $s>0$; обсуждение разумных для дисконтирующего множителя r свойств смотрите в [16]. Специально для таких r упростим формулировку следствий 1 и 3.

Следствие 4. *Пусть для дисконтирующего множителя $r:\mathbb{T}\to\mathbb{R}_{>0}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *для некоторого $s>0$ $r(t)=(1+t)^{-s}$ при всех неотрицательных t;*

2) *при всяком Δ из некоторой окрестности нуля отображения $\mathbb{T}\ni t\mapsto \dfrac{1}{r(t)}\dfrac{dr(t+\Delta)}{dt}$ равномерно стремятся к нулю при $t\to\infty$, и все эти отображения ограничены в совокупности;*

3) *при* $\Delta \in \mathbb{R}$ *из некоторой окрестности нуля отображения* $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r(t)}$ *равномерно ограничены, отображение* $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{1}{r(t)} \dfrac{dr(t)}{dt}$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$ *и имеет ограниченную вариацию.*

Тогда

1) *если числа* $J(b, 0; u^*, T)$ *равномерно ограничены для всех* $T > 0$ *и* b *из некоторой окрестности точки* $b_* = x_*(0)$, *то, в условиях теоремы, соответствующий паре* (ψ^*, λ^*) *максимизированный гамильтониан* $\mathcal{H}^*$ *однозначно восстанавливается по формулам* (3.2b),(3.2a);

2) *если векторы* $I(b, 0; u^*, T)$ *равномерно ограничены для всех* $T > 0$ *и* b *из некоторой окрестности точки* $b_* = x_*(0)$, *то, в условиях теоремы, пара* (ψ^*, λ^*) *является* τ*-предельным решением принципа максимума Понтрягина,* $\lambda^* = 1$, *а* ψ^* *однозначно восстанавливается формулой* (2.4).

Доказательство. Заметим, что каждое из предположений 1), 2) влечет 3), которое, в свою очередь, обеспечивает выполнение предположений следствий 1 и 3 для $r_1 \equiv r$. $\square$

Заметим, что проверка условий всех показанных следствий упрощается в случае монотонности функций I, J. Подробнее этот случай рассмотрен в [2, § 10,11; 3, § 5; 7, § 5.3].

Отметим, что следствие 4 напрямую к дисконтирующим множителям экпоненциального вида не применимо. С другой стороны, в отличие от следствия 1, в [10, Theorem 3] для $r(t)$ вида e^{-st} ($\forall s \in \mathbb{R}$) необходимость для критерия (1.4) условий (3.2a), (3.2b) (наряду с условиями (3.1a)–(3.1e)) была показана без каких-либо дополнительных предположений; там же было показано, что $\psi^*(T) \in \partial_x^{\lambda^*}(-J)(x^*(0), 0; \infty_\tau)$ при выполнении второго условия следствия 2 автоматически обеспечивает $\lambda^* = 1$ и (2.4).

Перейдем, собственно, к доказательству основного результата.

4. Доказательство теоремы

4.1. Построение последовательности γ_n

По условию в задаче (1.1a)–(1.1c), для u^* выполнено (1.2) при некоторой неограниченно возрастающей последовательности τ_n. Следуя идее [10, Lemma 5], покажем, что к $l(b_*)$ сходятся оптимальные значения задач

$$l(x(0)) + \int_0^{\tau_n} v(t) r(z(t)) f_0(x(t), u(t))\, dt - J(b_*, 0; \tau_n) \to \min, \tag{4.1a}$$

$$\dot{x} = v(t)\, f\big(x(t), u(t)\big), \quad \dot{z} = v(t), \tag{4.1b}$$

$$t > 0, \quad u(t) \in U, \quad |v(t) - 1| \le e^{-t}, \tag{4.1c}$$

$$x(0) \in \mathcal{C}, \quad z(0) = 0. \tag{4.1d}$$

Действительно, управление $(u^*, 1)$ допустимо в каждой такой задаче; в силу определения $J(b_*, 0; \tau_n)$, для этой последовательности задач теперь можно гарантировать (при достаточно больших n) платеж, равный $l(b_*)$.

Пусть оптимальные значения задач (4.1a)–(4.1d) не сходятся к $l(b_*)$. Тогда для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ последовательности начальных значений $\breve{b}_n \in \mathcal{C}$ и последовательности управлений $(\breve{u}_n, \breve{v}_n)$, удовлетворяющих (4.1c), траектории $(\breve{x}_n, \breve{z}_n)$, порожденные этими управлениями из позиции $(\breve{b}_n, 0)$, удовлетворяют

$$l(\breve{b}_n) \quad + \quad \int_0^{\tau_n} \breve{v}_n(t) r(\breve{z}_n(t)) f_0(\breve{x}_n(t), \breve{u}_n(t))\, dt \le l(b_*) + J(b_*, 0; \tau_n) - \varepsilon.$$

Отметим, что поскольку $|\breve{v}_n(t)-1|\le e^{-t}$ для всех $t\ge 0$, то $|\breve{z}_n(\tau_n)-\tau_n|\le 1$.

Для каждого n повторим доказательство [9, лемма]: непосредственной проверкой убеждаемся, что для обратного к $\breve{z}_n$ отображения $\zeta_n:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ допустимое управление $\hat{u}_n(s)\overset{\triangle}{=}\breve{u}_n(\zeta_n(s))$ порождает траекторию $\hat{x}_n(\cdot)\overset{\triangle}{=}x(\breve{b}_n,\hat{u}_n;\cdot)$, при этом $\hat{x}_n(\breve{z}_n(t))=\breve{x}_n(t)$, $x(\breve{b}_n,\hat{u}_n;t)=\breve{x}_n(\zeta_n(t))$ для всех $t\ge 0$. Теперь из равенства

$$\int\limits_0^{\tau_n}\breve{v}_n(t)r(\breve{z}_n(t))f_0(\breve{x}_n(t),\breve{u}_n(t))\,dt=\int\limits_0^{\breve{z}(\tau_n)}r(t)f_0(\hat{x}_n(t),\hat{u}_n(t))\,dt$$

следует

$$l(\breve{b}_n)+\int\limits_0^{\breve{z}_n(\tau_n)}r(t)f_0(\hat{x}_n(t),\hat{u}_n(t))\,dt\le l(b_*)+J(b_*,0;\tau_n)-\varepsilon.$$

Но в силу $\varepsilon>0$ и $|\breve{z}_n(\tau_n)-\tau_n|\le 1$ это противоречит (1.2).

Итак, найдется такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел γ_n, что для всякого натурального n оптимальное значение задачи (4.1a)–(4.1d) ограничено снизу числом $l(b_*)-\gamma_n^2$.

4.2. Построение набора метрических пространств для вспомогательной системы

Примем $\Upsilon\overset{\triangle}{=}U\times[1/2,\infty)$, $\mathcal{A}=\mathcal{U}\times B(\mathbb{T},[1/2,\infty))$, $\alpha^*=(u^*,1)$. Установим также $E\overset{\triangle}{=}\mathbb{X}\times\mathbb{R}\times\mathbb{X}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $y_*\overset{\triangle}{=}(b_*,0,0,0,0)\in E$. Пусть $\mathcal{S}$ — шар в E с центром в y_* радиуса 3, Ω — шар в $\mathbb{X}$ с центром в b_* радиуса $1/2$.

Для удобства обозначим через s функцию $\dfrac{dr}{dt}$, по условию ее можно считать локально липшицевой. Зададим на фазовом пространстве E следующую систему:

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=vf(x,u), &&\text{(4.2a)}\\
\dot{z}&=v, &&\text{(4.2b)}\\
\dot{\psi}&=-v\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)+\lambda vr(z(t))\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,u), &&\text{(4.2c)}\\
\dot{\phi}&=\lambda vs(z(t))f_0(x,u), &&\text{(4.2d)}\\
\dot{\lambda}&=0. &&\text{(4.2e)}
\end{aligned}$$

Всю правую часть системы (4.2a)–(4.2e) будем далее понимать как отображение $a:\mathbb{T}\times E\times\Upsilon\to E$. Теперь для всякой пары $(y_*,\vartheta)\in E\times\mathbb{T}$ найдется единственное решение $y\in C(\mathbb{T},E)$ уравнения

$$\dot{y}=a(t,y(t),\alpha^*(t)),\quad y(\vartheta)=y_*. \tag{4.3}$$

Обозначим его начальную позицию $y(0)$ через $\varkappa(y_*,\vartheta)$.

Для такой функции a с управлением α^* и компактом $\mathcal{S}$ по конструкции из [8, Appendix A] строим такую неотрицательную функцию $w\colon\Upsilon\times\Upsilon\times\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, что (см. [8, Lemma A.1])

1) для почти всех $t\in\mathbb{T}$ отображение $\Upsilon\times\Upsilon\ni(\alpha',\alpha'')\mapsto w(\alpha',\alpha'',t)$ полунепрерывно снизу и задает метрику на Υ,

2) для всех $T>0$ отображение $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\ni(\alpha',\alpha'')\mapsto\rho(\alpha',\alpha'',T)\overset{\triangle}{=}\int_0^T w(\alpha'(t),\alpha''(t),t)dt$ корректно и задает на $\mathcal{A}_T\overset{\triangle}{=}\{\alpha\in\mathcal{A}\,|\,\alpha(t)=\alpha^*(t)\ \forall t>T\}$ полную метрику.

4.3. Построение оптимальных решений вспомогательных задач

Рассмотрим для всякого натурального n задачу

$$\frac{dr}{dt}\int\limits_0^{\tau_n} v(t)r(t)f_0(y(t),u(t))\,dt + l(x(0)) - J(b_*,0;\tau_n)$$
$$+\gamma_n\rho(\alpha^*,\alpha,\tau_n)+\gamma_n||x(0)-b_*||\to\min, \tag{4.4a}$$
$$\dot{x}=v(t)\,f\big(x(t),u(t)\big),\quad \dot{z}=v(t), \tag{4.4b}$$
$$t\geq 0,\quad \alpha(t)=(u(t),v(t)),\quad u(t)\in U,\ |v(t)-1|\leq e^{-t}, \tag{4.4c}$$
$$x(0)\in\mathcal{C}\cap\Omega,\quad z(0)=0. \tag{4.4d}$$

Заметим, что множество всех допустимых управлений в этой задаче содержит $\alpha^*=(u^*,1)$ и замкнуто в $\mathcal{A}_{\tau_n}$, т. е. также является полным метрическим пространством. Обозначим его через $\mathcal{A}'_{\tau_n}$.

Отметим, что указанная в (4.4a) платежная функция является полунепрерывным снизу отображением из полного метрического пространства $(\mathcal{C}\cap\Omega)\times\mathcal{A}'_{\tau_n}$ в $\mathbb{R}$. В силу неотрицательности w (а значит, и ρ) эта платежная функция, как и функция в задаче (4.1a)–(4.1d), ограничена снизу числом $l(b_*)-\gamma_n^2$. Согласно принципу Экланда [17, Theorem 5.3.1] для всякого натурального n у задачи (4.4a)–(4.4d) найдется оптимальная пара $(b_n,\alpha_n)\in(\mathcal{C}\cap\Omega)\times\mathcal{A}'_{\tau_n}$. Эта пара задает некоторое решение $(\widetilde{x}_n,\widetilde{z}_n)$ системы (4.4b), (4.4d), при этом управление α_n можно записать как $\alpha_n=(u_n,v_n)\in\mathcal{A}'_{\tau_n}\subset\mathcal{U}\times B(\mathbb{T},[1/2,\infty))$.

По тому же принципу Экланда выполнены (см. [17, Theorem 5.3.1,(i)]) следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{\tau_n} r(t)f_0(x^*(t),u^*(t))\,dt + l(b_*)$$
$$\geq\int\limits_0^{\tau_n} v_n(t)r(\widetilde{z}_n(t))f_0(\widetilde{x}_n(t),u_n(t))\,dt + l(\widetilde{x}_n(0))+\gamma_n\rho(\alpha_*,\alpha_n,\tau_n)+\gamma_n||\widetilde{x}_n(0)-b_*||, \tag{4.5a}$$
$$||\widetilde{x}_n(0)-b_*||+\rho(\alpha^*,\alpha_n,\tau_n)<\gamma_n\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty. \tag{4.5b}$$

Напомним, что по построению функция w неотрицательна, тогда функция ρ как интеграл этой функции не убывает; таким образом, для всякого положительного $T<\tau_n$ выполнено $\rho(\alpha^*,\alpha,T)\leq\rho(\alpha^*,\alpha,\tau_n)$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$. В силу (4.5b) мы показали, что $\rho(\alpha^*,\alpha_n,T)\to 0$ для всякого $T>0$. Отсюда, поскольку функции $\alpha_n=(u_n,v_n)$ сходятся к $\alpha^*=(u^*,1)$ в каждом метрическом пространстве $\mathcal{A}_T$, в силу [8, Lemma A.1] они сходятся и по мере на всей полуоси. Переходя при необходимости к подпоследовательности, мы можем считать, что (u_n,v_n) сходится к $(u^*,1)$ почти всюду на $\mathbb{T}$.

4.4. Принцип максимума для вспомогательных задач

Поскольку $\alpha_n=(u_n,v_n)$ обеспечивают минимум в задачах (4.4a)–(4.4d), мы можем применить для них принцип максимума Понтрягина [14, Theorem 5.1.1]. Без ограничения общности мы можем в силу (4.5b) считать, что $\widetilde{x}_n(0)\in\operatorname{int}\Omega$ для всех $n\in\mathbb{N}$; теперь $N_L^{\mathcal{C}}(\widetilde{x}_n(0))=N_L^{\Omega\cap\mathcal{C}}(\widetilde{x}_n(0))$.

Зададим $H_n:\mathbb{X}\times\mathbb{R}\times\Upsilon\times\mathbb{R}\times\mathbb{X}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ правилом

$$H_n(x,z,u,v,\psi,\phi,\lambda,t)\stackrel{\triangle}{=}\psi vf(x,u)+\phi v-\lambda vf_0(z,x,u)-\lambda\gamma_n w(\alpha^*(t),(u,v),t).$$

Теперь согласно принципу максимума Понтрягина [14, Theorem 5.1.1] найдутся $\lambda_n \in (0,1]$, $\widetilde{\psi}_n \in C(\mathbb{T},\mathbb{X})$, $\widetilde{\phi}_n \in C(\mathbb{T},\mathbb{R})$, удовлетворяющие

$$\lambda + |\widetilde{\phi}_n(0)| + ||\widetilde{\psi}_n(0)|| = 1, \tag{4.6a}$$

для которых при некотором $\zeta_n \in \mathbb{X}, ||\zeta_n|| \leq 1$ выполнены

$$\widetilde{\psi}_n(0) \in \lambda_n \partial^1 l(\widetilde{x}_n(0)) + \lambda_n\gamma_n\zeta + N_L^{\mathcal{C}}(\widetilde{x}_n(0)), \tag{4.6b}$$

$$\widetilde{\phi}_n(\tau_n) = 0, \quad \widetilde{\psi}_n(\tau_n) = 0, \tag{4.6c}$$

а, кроме того, для почти всех $t \in [0,\tau_n]$ имеет место

$$-\dot{\widetilde{\psi}}_n(t) = v_n(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\widetilde{x}_n(t),u_n(t)\big) - \lambda_n v_n(t) r(\widetilde{z}_n(t))\,\frac{\partial f_0}{\partial x}\big(\widetilde{x}_n(t),u_n(t)\big), \tag{4.6d}$$

$$-\dot{\widetilde{\phi}}_n(t) = -\lambda_n v_n(t) s(\widetilde{z}_n(t)) f_0(\widetilde{x}_n(t),u_n(t)\big), \tag{4.6e}$$

$$\begin{aligned}&\sup\nolimits_{u'\in U,|v'-1|\leq e^{-t}} H_n\big(\widetilde{x}_n(t),u',v',\widetilde{\psi}_n(t),\widetilde{\phi}_n(t),\lambda_n,t\big)\\ &\quad = H_n\big(\widetilde{x}_n(t),u_n(t),v_n(t),\widetilde{\psi}_n(t),\widetilde{\phi}_n(t),\lambda_n,t\big).\end{aligned} \tag{4.6f}$$

4.5. Принцип максимума для исходной задачи

Установим $\widetilde{y}_n \equiv (\widetilde{x}_n,\widetilde{z}_n,\widetilde{\psi}_n,\widetilde{\phi}_n,\lambda_n)$ для каждого $n\in\mathbb{N}$; заметим, что это решения системы (4.2a)–(4.2e). Напомним, что $y_* = (b_*,0,0,0,0)$. Благодаря (4.5b) при достаточно больших n мы имеем

$$||\widetilde{y}_n(0) - y_*|| \leq \lambda_n + ||\widetilde{\psi}_n(0)|| + |\widetilde{\phi}_n(0)| + ||\widetilde{x}_n(0) - b_*|| \overset{(4.6a)}{\leq} 1+\gamma_n < 3; \tag{4.7}$$

в частности, $\widetilde{y}_n(0)$ лежат в компакте $\mathcal{S}$. Переходя к подпоследовательностям, если необходимо, мы можем считать, что числа $\lambda_n \in (0,1]$ сходятся к некоторому $\lambda^* \in [0,1]$, векторы $\big(\widetilde{\psi}_n(0),\widetilde{\phi}_n(0)\big)$ сходятся к некоторой паре $(\psi_0^*,\phi_0^*) \in \mathbb{X}\times\mathbb{R}$. Теперь с учетом (4.7) $\widetilde{y}_n(0) \to \xi_* \overset{\triangle}{=} (b_*,0,\psi_0^*,\phi_0^*,\lambda^*) \in \operatorname{int}\mathcal{S}$.

Выше было показано, что $\rho(\alpha^*,\alpha_n,T) \to 0$ для любого $T \geq 0$. В силу $\xi^* \in \operatorname{int}\mathcal{S}$ по [8, Lemma A.3] решения $\widetilde{y}_n$ равномерно на каждом отрезке времени сходятся к порожденному управлением $\alpha^* = (u^*,1)$ решению y^* системы (4.2a)–(4.2e) с начальным условием $y^*(0) = \xi_*$; в частности, $(\widetilde{x}_n,\widetilde{\psi}_n,\lambda_n)$ сходятся к решению системы (2.2a)–(2.2c). Теперь y^* имеет вид $y^*(\cdot) = (x^*(\cdot),\cdot,\psi^*(\cdot),\phi^*(\cdot),\lambda^*)$, где функции ψ^*,ϕ^* суть решения уравнений (2.2b) и $\dot{\phi}^* = -\lambda^* s(t) f_0\big(x^*(t),u^*(t)\big)$ с начальными условиями $\psi^*(0) = \psi_0^*$ и $\phi^*(0) = \phi_0^*$.

Напомним, что (u_n,v_n) сходятся почти всюду к $(u^*,1)$. Теперь $w((u^*(t),1),(u_n(t),v_n(t)),t) \to w((u^*(t),1),(u^*(t),1),t) = 0$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Сейчас, взяв предел в (4.6f), мы для почти всех $t\in\mathbb{T}$ получаем

$$\begin{aligned}&\sup_{u\in U,|v-1|\leq e^{-t}} \Big[\psi^*(t) v f\big(x^*(t),u,t\big) + v\phi^*(t) - \lambda^* v r(t) f_0\big(x^*(t),u\big)\Big]\\ &\qquad = \psi^*(t) f\big(x^*(t),u^*(t),t\big) + \phi^*(t) - \lambda^* r(t) f_0\big(x^*(t),u^*(t)\big).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Приняв $v=1$, мы имеем (2.1c) для (x^*,ψ^*,λ^*) при почти всех $t>0$. Таким образом, (x^*,ψ^*,λ^*) удовлетворяет системе (2.1a)–(2.1d) при $u=u^*$, т. е. системе (2.2a)–(2.2c).

4.6. Обратный ход

Из позиции $\widetilde{y}_n(\tau_n)$ выпустим в обратном времени решение y_n системы (4.2a)–(4.2e), порожденное управлением $(u^*,1)$. Поскольку (4.5b) и (4.7) влекут $\rho(\alpha^*,\alpha_n,\tau_n) < \gamma_n < 1/2 < dist(\widetilde{y}_n(0), bd\,\mathcal{S})$ и $\widetilde{y}_n \to y^*$, $\gamma_n \to 0$ при $n\to\infty$, то по [8, Lemma A.2] мы получаем

$$y_n(0) \overset{(4.3)}{=} \varkappa(\widetilde{y}_n(\tau_n),\tau_n) \to y^*(0). \tag{4.9}$$

При этом $y_n = (x_n, z_n, \psi_n, \phi_n, \lambda_n)$ удовлетворяет соотношениям (2.2a)–(2.2c) и $\psi_n(\tau_n) = \widetilde{\psi}_n(\tau_n) = 0$, $\phi_n(\tau_n) = \widetilde{\phi}_n(\tau_n) = 0$. По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий из (4.9) следует, что решение $y^*(\cdot) = \big(x^*(\cdot), \cdot, \lambda^*, \psi^*(\cdot), \phi^*(\cdot)\big)$ является пределом решений y_n в компактно-открытой топологии.

Тогда для сходящихся к $b_*, 0, \lambda^*$ соответственно последовательностей точек $b_n = x_n(0) \in \mathbb{X}$ и чисел $\Delta_n = z_n(0)$, $\lambda_n \in (0,1]$, а также неограниченно возрастающей последовательности чисел $t_n \in \mathcal{T}$ (выбранной подпоследовательности из последовательности τ_n), из (4.2d) и (4.6c) мы имеем $z_n(t) = t + \Delta_n$,

$$-\psi_n(0) = \lambda_n I(b_n, \Delta_n, t_n) = \lambda_n \int_0^{t_n} r(t+\Delta_n) \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(x(b_n, u^*; t), u^*(t)\big)\, A(\xi; t) dt,$$

$$-\phi_n(0) = \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n) = \lambda_n \int_0^{t_n} s(t+\Delta_n) f_0\big(x(b_n, u^*; t), u^*(t)\big) dt.$$

Теперь, поскольку ψ^* и ϕ^* суть пределы для ψ_n и ψ_n, мы получаем (3.1d) и

$$-\phi^*(0) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n).$$

Отметим, что отображения $b \mapsto \partial^1 l(b)$, $b \mapsto N_L^{\mathcal{C}}(b)$ полунепрерывны сверху; взяв предел в (4.6b), из $\widetilde{\psi}_n(0) \to \psi^*(0)$ и $\widetilde{x}_n(0) \to b_*$ получаем (3.1b).

Поскольку в (4.8) линейная по v функция достигает максимума во внутренней точке $v = 1$, то для почти всех $t \in \mathbb{T}$ выполнено

$$\psi^*(t) f\big(x^*(t), u^*(t), t\big) + \phi^*(t) - \lambda^* r(t) f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big) = 0.$$

Таким образом, $\phi^*(t) = -H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda^*, t)$ для почти всех $t \in \mathbb{T}$. Определим $\mathcal{H}^*[t] = -\phi^*(t)$ для всех $t \geq 0$. Теперь как предел для ϕ_n оно удовлетворяет (3.1e), т. е. условию (3.1a):

$$\dot{\mathcal{H}}^*[t] = -\lambda^* s(t) f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big) = -\lambda^* \frac{dr(t)}{dt} f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big).$$

Отметим, что хотя сконструированные последовательности сходятся к $(\psi_0^*, \phi^*, \lambda^*)$ со свойством $||\psi_0^*|| + |\phi_0^*| + \lambda^* = 1$, также выполнено и $||\psi_0^*|| + \lambda^* > 0$. Действительно, предположим обратное, тогда из равенств $\psi^* \equiv 0$ и $\lambda^* \equiv 0$ следует $|\phi^*(0)| = 1$ и $H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda^*, t) \equiv 0$, т. е. $\mathcal{H}^* \equiv 0$, что противоречит $\mathcal{H}^* \equiv -\phi^*, |\phi^*(0)| = 1$. Итак, $||\psi_0^*|| + \lambda^* > 0$.

В случае $\lambda^* > 0, \lambda^* \neq 1$ заметим, что соотношения (2.1b),(2.1c),(3.1a)–(3.1e),(4.6b)–(4.6e) сохранятся при умножении векторов $(\psi^*, \phi^*, \lambda^*)$ и $(\psi_n, \phi_n, \lambda_n)$ на одно и то же положительное число. Теперь, воспользовавшись этим для числа $1 / \lambda^*$, мы обеспечиваем равенство $\lambda^* = 1$. Таким образом, мы можем считать, что $\lambda^* \in \{0, 1\}$.

Теперь из (3.1d), (3.1e) и определения ∂^λ получаем (3.1c). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aubin J., Clarke F.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17, no. 5. P. 567–586.
2. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V.** The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255.
3. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K.** Infinite-horizon optimal control problems in economics // Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67, no. 2. P. 195–253.
4. **Aseev S.M., Veliov V.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and optimal control problems on unbounded domains / eds. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: AMS, 2014. P. 1–17 (Contemp. Math.; vol. 619.)

5. **Belyakov A.O.** Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited [e-resource]. 2015. 15 p. URL: http://arxiv.org/pdf/1512.01206 .
6. **Seierstad A.** Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 1. P. 201–229.
7. **Khlopin D.V.** Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // J. Dyn. Con. Sys. 2013. Vol. 19, no. 4. P. 519–552.
8. **Khlopin D.V.** Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 11. P. 2417–2440.
9. **Michel P.** On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 975–984.
10. **Khlopin D.V.** On Hamiltonian as limiting gradient in infinite horizon problem // J. Dyn. Con. Sys. 2016. P. 1–18. DOI:10.1007/s10883-016-9311-1.
11. **Carlson D.A.** Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 1. P. 55–69.
12. **Baumeister J., Leitao A., Silva G.** On the value function for nonautonomous optimal control problems with infinite horizon // Syst. Control. Lett. 2007. Vol. 56, no. 3. P. 188–196.
13. **Seierstad A., Sydsæter K.** Conditions implying the vanishing of the Hamiltonian at infinity in optimal control problems // Optim. Lett. 2009. Vol. 3, no. 4. P. 507–512.
14. **Clarke F.** Necessary conditions in dynamic optimization. Providence: AMS, 2005. 113 p.
15. **Weitzman M.** Gamma discounting // Am. Econ. Rev. 2001. Vol. 91, no. 1. P. 260–71.
16. **Ekeland I., Pirvu T.** Investment and consumption without commitment // Math. Finan. Econ. 2008. Vol. 2, no. 1. P. 57–86.
17. **Aubin J., Ekeland I.** Applied nonlinear analysis. New York: John Wiley & Sons Inc., 1984. 518 p.

Хлопин Дмитрий Валерьевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила 22.06.2016

REFERENCES

1. Aubin J., Clarke F. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 1979, vol. 17, no. 5, pp. 567–586.
2. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255.
3. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, no. 2, pp. 195–253.
4. Aseev S.M., Veliov V. Needle variations in infinite-horizon optimal control. *Variational and optimal control problems on unbounded domains, eds. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski*, Providence: AMS, 2014, Ser. Contemp. Math., vol. 619, pp. 1–17.
5. Belyakov A.O. Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. *arXiv.org*, 2015, 15 p, available at: http://arxiv.org/pdf/1512.01206 .
6. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 1999, vol. 103, no. 1, pp. 201–229.
7. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems. *J. Dyn. Con. Sys.*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 519–552.
8. Khlopin D.V. Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem. *Optimization.*, 2015, vol. 64, no. 11, pp. 2417–2440.
9. Michel P. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems. *Econometrica*, 1982, vol. 50, no. 4, pp. 975–984.
10. Khlopin D.V. On Hamiltonian as limiting gradient in infinite horizon problem. *J. Dyn. Con. Sys.*, 2016, pp. 1–18, DOI: 10.1007/s10883-016-9311-1.

11. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable. *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, vol. 64, no. 1, pp. 55–69.
12. Baumeister J., Leitao A., Silva G. On the value function for nonautonomous optimal control problems with infinite horizon. *Syst. Control. Lett.*, 2007, vol. 56, no. 3, pp. 188–196.
13. Seierstad A., Sydsæter K. Conditions implying the vanishing of the Hamiltonian at infinity in optimal control problems. *Optim. Lett.*, 2009, vol. 3, no. 4, pp. 507–512.
14. Clarke F. *Necessary conditions in dynamic optimization.* Providence: AMS, 2005, 113 p.
15. Weitzman M. Gamma discounting. *Am. Econ. Rev.*, 2001, vol. 91, no. 1, pp. 260–71.
16. Ekeland I., Pirvu T. Investment and consumption without commitment. *Math. Finan. Econ.*, 2008, vol. 2, no. 1, pp. 57–86.
17. Aubin J., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis.* New York: John Wiley & Sons Inc., 1984, 518 p.

D. V. Khlopin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: khlopin@imm.uran.ru .