ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.57

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ ЛАПЛАСА

Д. С. Теляковский

Получено достаточное условие гармоничности суммируемых функций двух переменных, которые во всех точках области удовлетворяют менее ограничительному условию, чем уравнение Лапласа. Предполагается, что в любой близости от каждой точки ζ области найдется набор из четырех узлов, для которого разностное отношение шварцевского типа для уравнения Лапласа сколь угодно мало по модулю. При этом узлы набора являются концами двух взаимно перпендикулярных отрезков, пересекающихся в точке ζ, а на саму функцию необходимо наложить определенное условие непрерывности.

Ключевые слова: гармоничность, разностное уравнение Лапласа, производная шварцевского типа

D. S. Telyakovskii. A sufficient condition for the harmonicity of a function of two variables satisfying the Laplace difference equation.

We provide a sufficient condition for the harmonicity of a summable function of two variables that satisfies a less restrictive condition than the Laplace equation at all points of the domain. We assume that an arbitrarily small neighborhood of any point ζ contains a collection of four nodes for which the difference relation of Schwartz type for the Laplace equation is arbitrarily small in absolute value. The nodes are the ends of two mutually perpendicular straight line segments intersecting at the point ζ, and a certain continuity assumption should be imposed on the function.

Keywords: harmonicity, Laplace difference equation, derivative of Schwartz type.

MSC: 31A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-269-283

Введение

Гармонической называется аналитическая в области функция, которая в каждой точке области удовлетворяет уравнению Лапласа. Чтобы удовлетворяющая уравнению Лапласа функция являлась гармонической, аналитичность функции можно не предполагать; на функцию достаточно наложить существенно менее ограничительные условия. В то же время примеры показывают, что выполнения одного только уравнения Лапласа (или некоторого его обобщения) во всех точках области для гармоничности функции недостаточно, нужны дополнительные условия.

И.И. Привалов (1925, [1]) установил гармоничность непрерывных функций, удовлетворяющих в каждой точке области уравнению Лапласа. При этом число переменных произвольно, предполагается существование только тех производных, которые входят в уравнение Лапласа, а сами производные можно понимать в смысле Шварца. В случае функций двух переменных условие непрерывности удается существенно ослабить.

Пусть функция $u(z) = u(x,y)$, $z \in G \subset \mathbb{R}^2$, в каждой точке области G удовлетворяет уравнению Лапласа. Г.П. Толстов (1951, [2]) доказал, что для гармоничности $u(z)$ в G достаточно ограниченности $u(z)$, а затем автор (1986, [3]) показал, что достаточно предполагать суммируемость $u(z)$ (относительно плоской меры Лебега).

Функция

$$u(z) := \mathrm{Re}\Big(\frac{i}{z^2}\Big) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ z \neq 0, \quad u(0) := 0,$$

удовлетворяет уравнению Лапласа в каждой точке единичного круга D, гармонична всюду внутри D за исключением точки $z = 0$, и модуль $|u(z)|$ суммируем в D во всех положительных степенях, меньших 1. Из этого примера видно, что в достаточном условии гармоничности предположение о суммируемости $|u(z)|$ сколько-нибудь существенно ослабить уже нельзя. Поэтому при сохранении условия суммируемости $|u(z)|$ для дальнейшего ослабления достаточных условий гармоничности предположение о выполнении в каждой точке области уравнения Лапласа заменим предположением о выполнении в точках области менее ограничительного условия.

Автором (2009, [4]) были рассмотрены функции, удовлетворяющие в области G обобщению уравнения Лапласа, в которое вместо обычных вторых производных входят вторые производные в смысле Пеано. Выражение $\Delta^{\times}u$ в точке $\zeta \in G$ равно сумме вторых пеановских производных функции $u(z)$ в точке ζ, взятых вдоль некоторых двух взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке ζ. Значение $\Delta^{\times}u$ может, вообще говоря, зависеть от выбора пары прямых, вдоль которых берутся производные. В [4] было показано, что если функция $u(z)$ суммируема в области G и для каждой точки $\zeta \in G$ найдется пара пересекающихся в ζ перпендикулярных друг другу прямых, для которых $\Delta^{\times}u = 0$, то функция $u(z)$ гармонична в G. Условие взаимной перпендикулярности прямых в одной паре снять нельзя, направления прямых для разных точек области никак не связаны между собой.

В работе [4] сначала была установлена гармоничность непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению $\Delta^{\times}u = 0$, а затем доказана непрерывность суммируемых функций, удовлетворяющих этому уравнению. Условия на производные, входящие в уравнение $\Delta^{\times}u = 0$, использовались только при доказательстве гармоничности непрерывных функций. При доказательстве непрерывности суммируемых в G функций использовалось не существование у функции $u(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ производных по некоторым направлениям (тем более вторых), а только выполнение условия Липшица относительно точки ζ вдоль этих направлений. Выполнение такого условия Липшица (которое в данном случае используется как условие непрерывности) очевидно следует из существования у $u(z)$ в точке ζ производных по направлениям.

В настоящей работе условия непрерывности и дифференцируемости накладываются на функцию по отдельности. Дифференциальное условие накладывается не на сумму вторых производных функции вдоль некоторых двух взаимно перпендикулярных направлениий, а на сумму разностных отношений шварцевского типа для вторых производных функции $u(z)$, взятых вдоль таких направлений в неравно отстоящих, вообще говоря, узлах. Существование каких бы то ни было производных не предполагается. Накладывается также некоторое условие непрерывности функции по направлениям, это условие менее ограничительное, чем условие Липшица, но более жесткое, чем просто непрерывность.

Вторые частные шварцевские производные функции

$$u(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{при } \; x > y, \\ 0 & \text{при } \; x = y, \\ -1 & \text{при } \; x < y \end{cases}$$

равны нулю в каждой точке. Этот пример показывает, что если производные, входящие в уравнение Лапласа, понимать в смысле Шварца, то, не накладывая на функцию никаких условий непрерывности, невозможно получить достаточное условие гармоничности даже для ограниченных функций.

1. Определения и формулировка теоремы

Введем некоторые определения и обозначения.

Обозначим $D(\zeta, r)$ замкнутый круг с центром в точке ζ радиуса r, $C(\zeta, r)$ — окружность с центром ζ радиуса r. Если $A(\zeta)$ — некоторое множество, зависящее от точки ζ, то положим $A(\zeta, r) := A(\zeta) \cap D(\zeta, r)$.

Звездочкой $S_\zeta = S(\zeta, \sigma_\zeta)$ с k лучами ($k \geqslant 3$) и центром в точке ζ будем называть объединение несовпадающих промежутков $s^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, длины σ, исходящих из точки ζ, причем точка ζ звездочке принадлежит, а противоположный конец промежутков $s^{(j)}$ нет. Сами промежутки $s^{(j)}$ будем называть *лучами* звездочки, а точку ζ — ее *центром.* Для определенности будем считать, что лучи занумерованы против часовой стрелки и нумерация начата с луча звездочки, который первым всретится при повороте против часовой стрелки вокруг ζ исходящим из ζ лучом, сонаправленным с осью Ox. Под углом между осями ℓ_1 и ℓ_2 будет пониматься угол поворота против часовой стрелки от направления оси ℓ_1 до направления оси ℓ_2.

Будут рассматриваться только звездочки S_ζ, у которых внутри каждой полуплоскости, содержащей точку ζ на своей границе, лежит по крайней мере по одному лучу. Ясно, что это условие эквивалентно тому, что точка ζ лежит внутри многоугольника $P_\zeta = P(\zeta, \sigma)$ с вершинами в концах лучей звездочки S_ζ и что меньше трех лучей у такой звездочки быть не может. Для такой звездочки найдется круг $D(\zeta, r_\zeta)$ максимального радиуса, который лежит в многоугольнике P_ζ; этот радиус будем называть внутренним радиусом звездочки S_ζ. Отношение $\delta_\zeta := r_\zeta/\sigma$ будем называть коэффициентом распределения лучей звездочки S_ζ. Ясно, что коэффициент δ_ζ равен синусу наименьшего угла при основании тех равнобедренных треугольников, на которые лучи звездочки S_ζ разбивают многоугольник P_ζ.

Прямоугольным крестиком с центром в точке ζ будем называть объединение двух взаимно перпендикулярных интервалов $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$, которые пересекаются в своей середине — точке ζ. Прямоугольный крестик, состоящий из интервалов длины 2σ, полностью определяется углом φ, $0 \leqslant \varphi < \pi/2$, между положительным направлением оси Ox и интервалом крестика, ближайшим к Ox при повороте крестика вокруг точки ζ по часовой стрелке. Обозначим такой крестик $K(\zeta, \sigma, \varphi)$. Если величина угла φ не имеет значения, будем писать $K(\zeta, \sigma)$, если длины промежутков, составляющих крестик $K(\zeta, \sigma)$, также не имеют значения, будем писать K_ζ. Прямоугольные крестики будем обозначать также $T(\zeta, \sigma)$ или T_ζ и т. п. Концы промежутков, составляющих крестик, будем называть концами крестика; заметим, что концы крестика крестику не принадлежат. Ясно, что прямоугольный крестик можно рассматривать как звездочку с четырьмя лучами, у которой углы между соседними лучами прямые.

Пусть действительнозначная функция $u(z)$ определена в области G. Будем говорить, что *в точке $\zeta \in \partial G$ граничные значения $u(z)$ не превосходят числа C*, если $\varlimsup u(z) \leqslant C$ при $z \to \zeta$, $z \in G$. Если функция $u(z)$ определена не только в области G, то с целью подчеркнуть, что предельный переход $z \to \zeta$ производится при условии $z \in G$, будем говорить о *граничных значениях $u(z)$ в точке ζ относительно области G.*

Через $u^+(z)$ будем обозначать $\max\{u(z), 0\}$.

Получим выражение разностного отношения шварцевского типа для второй производной в неравно отстоящих узлах для функций одного переменного.

Разностное отношение для второй производной по Шварцу функции $u(x)$ в точке x для узлов $x{-}h$ и $x{+}h$ равно удвоенному коэффициенту при x^2 в уравнении параболы $y = ax^2{+}bx{+}c$, проходящей через точки $(x{-}h; u(x{-}h))$, $(x; u(x))$ и $(x{+}h; u(x{+}h))$. Аналогично этому разностным отношением $\delta^{(2)}u(x_0; x_1, x_2)$ для второй шварцевской производной функции $u(x)$ в точке x_0 для узлов x_1 и x_2 будем называть удвоенный коэффициент при x^2 в уравнении параболы, проходящей через точки $(x_1; u(x_1))$, $(x_0; u(x_0))$ и $(x_2; u(x_2))$. Запишем уравнение этой параболы, используя интерполяционный многочлен Лагранжа. Для упрощения записи положим $u_1{:=}u(x_1)$, $u_0{:=}u(x_0)$, $u_2{:=}u(x_2)$. Имеем

$$ax^2{+}bx{+}c = \frac{(x{-}x_0)(x{-}x_2)}{(x_1{-}x_0)(x_1{-}x_2)}u_1 + \frac{(x{-}x_1)(x{-}x_2)}{(x_0{-}x_1)(x_0{-}x_2)}u_0 + \frac{(x{-}x_0)(x{-}x_1)}{(x_2{-}x_0)(x_2{-}x_1)}u_2;$$

$$\delta^{(2)}u(x_0; x_1, x_2){:=}2a{=}2\left(\frac{u_1}{(x_1{-}x_0)(x_1{-}x_2)} + \frac{u_0}{(x_0{-}x_1)(x_0{-}x_2)} + \frac{u_2}{(x_2{-}x_0)(x_2{-}x_1)}\right)$$

$$= 2\frac{u_1(x_2{-}x_0) - u_0(x_2{-}x_1) + u_2(x_0{-}x_1)}{(x_0{-}x_1)(x_2{-}x_1)(x_2{-}x_0)}. \tag{1.1}$$

Если конкретный выбор узлов x_1 и x_2 неважен, то вместо $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ будем писать $\delta^{(2)}u(x_0)$.

Для равно отстоящих узлов $x_1 = x_0 - h$, x_0 и $x_2 = x_0 + h$ выражение $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ является разностным отношением обычной второй шварцевской производной функции $u(x)$ в точке x_0. Действительно,

$$\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2) = 2\frac{u_1(x_2-x_0)-u_0(x_2-x_1)+u_2(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)(x_2-x_0)} = 2\frac{hu_1-2hu_0+hu_2}{2h^3} = \frac{u_1-2u_0+u_2}{h^2}.$$

Уравнение параболы, проходящей через три произвольные точки, не зависит от порядка, в котором эти точки перечислены. Нумерацию узлов выберем так, чтобы было удобнее. Поскольку разностное отношение $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ рассматривается как разностное отношение для второй производной в точке x_0, то естественно считать, что точка x_0 лежит между точками x_1 и x_2. Если $x_1 < x_0 < x_2$, то все разности между координатами узлов, входящие в формулу (1.1), положительны и равны расстояниям между соответствующими узлами. Поэтому, если положить $r_1 := |x_1-x_0|$ и $r_2 := |x_2-x_0|$, то выражение для $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ запишется так:

$$\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2) = 2\frac{u_1r_2 - u_0(r_1+r_2) + u_2r_1}{r_1r_2(r_1+r_2)}. \tag{1.2}$$

Проверим, что разностное отношение $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ в пределе дает вторую пеановскую производную функции $u(x)$ в точке x_0, если эта производная существует.

Лемма 1. *Если функция $u(x)$ дважды дифференцируема по Пеано в точке x_0, то $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ стремится ко второй пеановской производной в x_0, когда узлы x_1 и x_2 стягиваются к x_0.*

Доказательство. Имеем

$$u(x) = u(x_0) + a(x-x_0) + \frac{1}{2}b(x-x_0)^2 + \alpha(x)(x-x_0)^2, \tag{1.3}$$

где a и b — первая и вторая пеановские производные функции $u(x)$ в точке x_0, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Подставим значения $u(x_1)$ и $u(x_2)$, полученные из (1.3), в выражение (1.1) для $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$. Преобразуя числитель полученного выражения, получаем

$$\begin{aligned}
&u(x_1)(x_2-x_0) - u(x_0)(x_2-x_1) + u(x_2)(x_0-x_1)\\
&= \Big(u(x_0) + a(x_1-x_0) + \frac{1}{2}\,b(x_1-x_0)^2 + \alpha(x_1)(x_1-x_0)^2\Big)(x_2-x_0) - u(x_0)(x_2-x_1)\\
&\quad + \Big(u(x_0) + a(x_2-x_0) + \frac{1}{2}\,b(x_2-x_0)^2 + \alpha(x_2)(x_2-x_0)^2\Big)(x_0-x_1)\\
&= u(x_0)\Big((x_2-x_0) - (x_2-x_1) + (x_0-x_1)\Big) + a\Big((x_1-x_0)(x_2-x_0) + (x_2-x_0)(x_0-x_1)\Big)\\
&\quad + \frac{1}{2}b\Big((x_1-x_0)^2(x_2-x_0) + (x_2-x_0)^2(x_0-x_1)\Big)\\
&\quad \alpha(x_1)(x_1-x_0)^2(x_2-x_0) + \alpha(x_2)(x_2-x_0)^2(x_0-x_1)\\
&= (x_2-x_0)(x_0-x_1)\left(\frac{1}{2}b\Big((x_2-x_0) - (x_1-x_0)\Big) + \alpha(x_1)(x_0-x_1) + \alpha(x_2)(x_2-x_0)\right)\\
&= \frac{1}{2}\,b\,(x_2-x_0)(x_0-x_1)(x_2-x_1) + (x_2-x_0)(x_0-x_1)\Big(\alpha(x_1)(x_0-x_1) + \alpha(x_2)(x_2-x_0)\Big).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$:

$$\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2) = b + 2\alpha(x_1)\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} + 2\alpha(x_2)\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}. \tag{1.4}$$

Поскольку точка x_0 лежит между точками x_1 и x_2, то отношения $\dfrac{x_0-x_1}{x_2-x_1}$ и $\dfrac{x_2-x_0}{x_2-x_1}$ положительны и меньше 1. Поэтому

$$\left|2\alpha(x_1)\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}+2\alpha(x_2)\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}\right|\leqslant 2|\alpha(x_1)|\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}+2|\alpha(x_2)|\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}$$
$$\leqslant 2|\alpha(x_1)|+2|\alpha(x_2)|. \tag{1.5}$$

Так как $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то отсюда следует заключение леммы 1.

Получим теперь выражение для разностного уравнения Лапласа, которое будет рассматриваться в настоящей работе. Пусть функция $u(z)$ определена в области $G\subset\mathbb{R}^2$, точка $z_0\in G$ и $A_{z_0}=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ — набор из четырех точек области G, для которого отрезки $[z_1;z_2]$ и $[z_3;z_4]$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в своей внутренней точке z_0. Обозначим $r_j:=|z_j-z_0|$, $u_j:=u(z_j)$, $j=1,\ldots,4$. Положим

$$\Delta^{(*)}u(z_0)=\Delta^{(*)}u(z_0;A_{z_0}):=\delta^{(2)}_{z_1z_2}u(z_0;z_1,z_2)+\delta^{(2)}_{z_3z_4}u(z_0;z_3,z_4),$$

где величины $\delta^{(2)}_{z_1z_2}u(z_0;z_1,z_2)$ и $\delta^{(2)}_{z_3z_4}u(z_0;z_3,z_4)$ определяются по формуле (1.2). Получаем выражение

$$\Delta^{(*)}u(z_0)=2\frac{u_1r_2-u_0(r_1+r_2)+u_2r_1}{r_1r_2(r_1+r_2)}+2\frac{u_3r_4-u_0(r_3+r_4)+u_4r_3}{r_3r_4(r_3+r_4)}. \tag{1.6}$$

Будем говорить, что функция $u(z)$ удовлетворяет в точке z_0 *обобщенному разностному уравнению Лапласа* $\Delta^{(*)}u=0$, если предел $\Delta^{(*)}u(z_0;A^{(n)}_{z_0})$ равен нулю хотя бы для одной последовательности наборов узлов $\{A^{(n)}_{z_0}\}$, стягивающейся к z_0. Для разных последовательностей наборов узлов $\{A^{(n)}_{z_0}\}$, стягивающихся к точке z_0, пределы $\Delta^{(*)}u(z_0;A^{(n)}_{z_0})$ могут быть разными или не существовать.

Определим теперь условие непрерывности, которое будет накладываться на функцию $u(z)$ в точках области G.

Пусть $h(t)$, $t\geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности и функция $u(z)$ определена на некотором множестве B_ζ, $z\in B_\zeta$, у которого точка ζ является предельной. Если для некоторого значения $L_\zeta>0$ в каждой точке $z\in B_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z)-u(\zeta)|\leqslant L_\zeta h(|z-\zeta|)$, то функцию $u(z)$ будем называть *h-регулярной в точке ζ относительно множества B_ζ с коэффициентом L_ζ* или просто *h-регулярной в ζ относительно B_ζ*, если конкретное значение L_ζ неважно.

Ясно, что если функция $u(z)$ дифференцируема в точке ζ вдоль B_ζ как функция двух действительных аргументов, то при некотором $L_\zeta>0$ во всех точках $z\in B_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z)-u(\zeta)|\leqslant L_\zeta|z-\zeta|$. Это значит, что функция $u(z)$ является h-регулярной в точке ζ относительно B_ζ для линейной функции $h(t)$.

В точках $\zeta\in G$ в качестве условия непрерывности мы будем рассматривать условие h-регулярности относительно некоторого прямоугольного крестика T_ζ или некоторой звездочки S_ζ.

Теорема. *Пусть функция $u(z)$ локально суммируема в области $G\subset\mathbb{R}^2$, а функция $h(t)$, $t\geqslant 0$, является функцией типа модуля непрерывности. Если в каждой точке $\zeta\in G$ функция $u(z)$ удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа и является h-регулярной относительно некоторого прямоугольного крестика, то функция $u(z)$ гармонична в области G.*

2. Доказательство теоремы

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть функция $u(z)$ имеет в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ второй пеановский дифференциал*

$$u(z) = u(z_0) + du + \frac{1}{2}d^2u + \alpha(z)|z - z_0|^2, \tag{2.7}$$

где $du = p(x-x_0) + q(y-y_0)$ и $d^2u = r(x-x_0)^2 + 2s(x-x_0)(y-y_0) + t(y-y_0)^2$, а $\alpha(z) \to 0$ при $z\to z_0$. Тогда для любой стягивающейся к z_0 последовательности наборов узлов $\{A_{z_0}^{(n)}\}$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{(*)}u\big(z_0, A_{z_0}^{(n)}\big) = r + t.$$

Доказательство. Пусть ℓ — произвольная прямая, проходящая через точку z_0, h — координата на ℓ с началом в z_0, а γ — угол между осями Ox и ℓ. Подставляя координаты точек $z = (x_0{+}h\cos\gamma; y_0{+}h\sin\gamma)$ прямой ℓ в выражение (2.7) получаем

$$u(z) = u(z_0) + (p\cos\gamma{+}q\sin\gamma)h + \frac{1}{2}(r\cos^2\gamma{+}2s\cos\gamma\sin\gamma{+}t\sin^2\gamma)h^2 + \alpha(z)h^2.$$

Если коэффициенты при h и h^2 в этом выражении обозначить соответственно a_ℓ и b_ℓ, то это равенство запишется так:

$$u(z) = u(z_0) + a_\ell h + \frac{1}{2}b_\ell h^2 + \alpha(z)h^2,$$

и, значит, функция $u(z)$ имеет в точке z_0 второй пеановский дифференциал вдоль ℓ, причем остаток совпадает с остатком в выражении (2.7), взятом в точке прямой ℓ. Поэтому, если точки z_1 и z_2 лежат на прямой ℓ по разные стороны от точки z_0, то согласно соотношениям (1.4) и (1.5) выполнено неравенство

$$|\delta^{(2)}_{z_1z_2}u(z_0; z_1, z_2) - b_\ell| \leqslant 2|\alpha(z_1)| + 2|\alpha(z_2)|. \tag{2.8}$$

В точке z_0 функция $u(z)$ имеет второй пеановский дифференциал. Поэтому согласно лемме 1 из работы [4] сумма вторых пеановских производных $u(z)$ в точке z_0, взятых вдоль любых двух взаимно ортогональных направлений, равна $r + t$. Для набора узлов $A(z_0)$ прямые z_1z_2 и z_3z_4 ортогональны друг другу, и, значит, $b_{z_1z_2} + b_{z_3z_4} = r + t$. Поэтому, используя оценку (2.8), получаем оценку

$$\big|\Delta^{(*)}u\big(z_0, A_{z_0}\big) - (r + t)\big| = \big|\delta^{(2)}u(z_0; z_1, z_2) + \delta^{(2)}u(z_0; z_3, z_4) - (b_{z_1z_2} + b_{z_3z_4})\big|$$

$$\leqslant \big|\delta^{(2)}u(z_0; z_1, z_2) - b_{z_1z_2}\big| + \big|\delta^{(2)}u(z_0; z_3, z_4) - b_{z_3z_4}\big| \leqslant 2\big(|\alpha(z_1)| + |\alpha(z_2)| + |\alpha(z_3)| + |\alpha(z_4)|\big).$$

Поскольку последовательность наборов $\{A_{z_0}^{(n)}\}$ стягивается к точке z_0, то из полученной оценки следует выполнение заключения леммы.

Следствия 1 и 2 непосредственно вытекают из леммы 2.

Следствие 1. *Гармоническая в области функция в каждой точке области удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа для любой последовательности наборов узлов, стягивающейся к этой точке.*

Следствие 2. *Для каждого многочлена второго порядка $u(x) = ax^2 + bx + c$ и для любого набора узлов $\{x_0, x_1, x_2\}$ выражение $\delta^{(2)}u(x_0; x_1, x_2)$ в точности равно $2a$. Поэтому, если функция $u(z)$ — многочлен второго порядка от двух переменных $u(z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0$, то для любой точки z и любого набора узлов A_z выполнено тождество $\Delta^{(*)}u\big(z, A_z\big) \equiv 2(a_{11} + a_{22})$.*

Лемма 3. *Пусть функция $u(z)$ непрерывна в области G и в каждой точке $z \in G$ удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа. Тогда функция $u(z)$ гармонична в области G.*

Доказательство леммы следует схеме И. И. Привалова [1, теорема 2]. Доказательство теоремы Привалова приведено также в примечании к работе И. Г. Петровского [5, с. 107].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение неверно и функция $u(z)$ гармонична не всюду внутри G. Возьмем круг $D \subset G$, внутри которого $u(z)$ не всюду гармонична. Пусть функция $v(z)$ гармонична внутри круга D и совпадает с непрерывной $u(z)$ на ∂D. Тогда из следствия 1 леммы 2 вытекает, что функция $w(z) := u(z)-v(z)$ удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа всюду внутри D.

По определению $w(z) \equiv 0$ на ∂D, но не равна нулю тождественно внутри D. Будем считать, что $\max_D w(z) > 0$, в противном случае вместо функции $w(z)$ рассмотрим функцию $-w(z)$. Пусть $z_0 = (x_0,y_0)$ — точка максимума $w(z)$ в круге D: $\max_D w(z) = w(z_0) > 0$, причем точка z_0 лежит строго внутри D. Положим $\varphi(z) := w(z) + \dfrac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big), \quad z \in D$. Поскольку функция $\varphi(z)$ равна сумме функции $w(z)$ и многочлена второго порядка, то из следствия 2 леммы 2 получаем, что для любой точки ζ, лежащей внутри круга D, и любого набора узлов $A_\zeta \subset D$ выполнено

$$\Delta^{*}\varphi(\zeta, A_\zeta) = \Delta^{(*)}w(\zeta, A_\zeta) + \frac{w(z_0)}{\operatorname{diam}^2 D}. \tag{2.9}$$

По определению $\varphi(z)$ всюду внутри D выполнено неравенство $\varphi(z) \geqslant w(z)$, поэтому

$$\max_D \varphi(z) \geqslant \max_D w(z) = w(z_0) > 0.$$

Так как все точки ∂D лежат от точки z_0 (внутренней точки D) на расстоянии меньше $\operatorname{diam} D$ и на ∂D функция $w(z) \equiv 0$, то по определению $\varphi(z)$ на ∂D выполнено неравенство

$$\varphi(z) = w(z) + \frac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\big) = \frac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\big) \leqslant \frac{w(z_0)}{2}.$$

Поэтому функция $\varphi(z)$ принимает максимальное значение строго внутри круга D. Пусть ζ_0 — точка максимума: $\max_D \varphi(z) = \varphi(\zeta_0)$.

Для каждой внутренней точки ζ круга D существует набор узлов A_ζ, для которого величина $\Delta^{(*)}w(\zeta, A_\zeta)$ сколь угодно мала по модулю. Пусть $A_{\zeta_0} = \{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4\} \subset D$ — набор узлов, для которого $\big|\Delta^{(*)}w(\zeta_0, A_{\zeta_0})\big| < \dfrac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}$. Согласно соотношению (2.9) для такого набора выполнено неравенство

$$\Delta^{(*)}\varphi(\zeta_0, A_{\zeta_0}) = \Delta^{(*)}w(\zeta_0, A_{\zeta_0}) + \frac{w(z_0)}{\operatorname{diam}^2 D} > \frac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D} > 0.$$

Полагая $\varphi_j := \varphi(\zeta_j)$ и $r_j := |\zeta_j - \zeta_0|$ при $j = 1, 2, 3, 4$, из формулы (1.6) получим, что

$$\Delta^{(*)}\varphi(\zeta_0, A_{\zeta_0}) = 2\frac{\varphi_1 r_2 - \varphi_0(r_1+r_2) + \varphi_2 r_1}{r_1 r_2(r_1+r_2)} + 2\frac{\varphi_3 r_4 - \varphi_0(r_3+r_4) + \varphi_4 r_3}{r_3 r_4(r_3+r_4)} > 0.$$

По крайней мере одно из слагаемых, составляющих $\Delta^{(*)}\varphi(\zeta_0)$, положительно. Пусть это, например, первое слагаемое. Преобразуя его, получаем

$$\frac{\varphi_1 r_2 - \varphi_0(r_1+r_2) + \varphi_2 r_1}{r_1 r_2(r_1+r_2)} = \frac{r_2(\varphi_1-\varphi_0) + r_1(\varphi_2-\varphi_0)}{r_1 r_2(r_1+r_2)} > 0.$$

Величины r_1 и r_2 положительны (это расстояния). Поэтому положительна по крайней мере одна из разностей $\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_0)$ или $\varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_0)$, но это противоречит тому, что в точке ζ_0 функция $\varphi(z)$ достигает максимума. Следовательно, предположение о том, что функция $u(z)$ гармонична не всюду внутри области G, неверно. Лемма доказана.

Доказательства следующих лемм и самой теоремы следуют схемам доказательств соответствующих утверждений из работы [4]. Однако, поскольку изменения и в формулировках, и в доказательствах все-таки требуются, мы приводим здесь доказательства полностью.

Лемма 4 настоящей работы аналогична некоторым утверждениям Д. Е. Меньшова (см., например, [6, лемма 1]); ее доказательство основано на идеях Меньшова.

Лемма 4. *Пусть $h(t)$, $t \geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности и множество P замкнуто относительно области $G \subset \mathbb{R}^2$. Пусть функция $u(z)$ определена в области G, непрерывна на $G \setminus P$ и h-регулярна в каждой точке $\zeta \in P$ относительно некоторой звездочки $S_\zeta = S(\zeta, \sigma_\zeta)$ с k лучами. Тогда найдутся положительные числа L и σ и порция* Π *множества P (быть может, состоящая из одной точки),* $\operatorname{diam}\Pi < \sigma^2/2$, *такие, что для каждой точки $\zeta \in$* Π *существует звездочка $K(\zeta, \sigma)$ с k лучами и коэффициентом распределения лучей не меньше σ, для всех точек z которой выполнено неравенство*

$$|u(z)-u(\zeta)| \leqslant Lh(|z-\zeta|). \tag{2.10}$$

При этом для любых точек ζ' и $\zeta'' \in$ Π *выполнено неравенство*

$$|u(\zeta')-u(\zeta'')| \leqslant Lh(|\zeta'-\zeta''|). \tag{2.11}$$

Доказательство. Сначала проверим, что если для некоторых положительных чисел r, δ и l на звездочках $S(\zeta_1, r)$ и $S(\zeta_2, r)$, коэффициенты распределения лучей которых не меньше δ и $|\zeta_1-\zeta_2| < \delta r/2$, выполнены неравенства

$$|u(z)-u(\zeta_j)| \leqslant lh(|z-\zeta_j|), \quad z \in S(\zeta_j, r), \quad j = 1, 2, \tag{2.12}$$

то

$$|u(\zeta_1)-u(\zeta_2)| \leqslant \frac{8l}{\delta}\, h(|\zeta_1-\zeta_2|). \tag{2.13}$$

По определению коэффициента распределения лучей звездочки его величина $\delta < 1$, поэтому соотношение (2.13) выполнено, если $\zeta_2 \in S(\zeta_1, r)$ или $\zeta_1 \in S(\zeta_2, r)$. Предположим, что $\zeta_2 \notin S(\zeta_1, r)$ и $\zeta_1 \notin S(\zeta_2, r)$.

Поскольку $|\zeta_1-\zeta_2| < \delta r/2$, то $\zeta_2 \in D(\zeta_1, \delta r)$, а сам круг $D(\zeta_1, \delta r)$ лежит в многоугольнике $P(\zeta_1, r)$. Лучи звездочки $S(\zeta_1, r)$ разбивают многоугольник $P(\zeta_1, r)$ на k равнобедренных треугольников, причем поскольку $\zeta_2 \notin S(\zeta_1, r)$, точка ζ_2 не лежит на их боковых сторонах. Обозначим Δ тот из этих треугольников, который содержит точку ζ_2, а Δ_{ζ_2} — треугольник, который отделяет от Δ прямая, параллельная основанию Δ и проходящая через точку ζ_2.

Длины боковых сторон треугольника Δ_{ζ_2} равны $h/\sin\alpha$, где h — высота треугольника Δ_{ζ_2}, опущенная из его вершины ζ_1 на основание, а α — угол при основании. Точка ζ_2 лежит на основании Δ_{ζ_2}, поэтому $h \leqslant |\zeta_1-\zeta_2|$. По определению коэффициента распределения лучей звездочки его величина $\delta \leqslant \sin\alpha$. По неравенству треугольника $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}$ меньше суммы длин любых двух сторон Δ_{ζ_2}, в частности суммы длин боковых сторон Δ_{ζ_2}. Поэтому $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < 2h/\sin\alpha \leqslant 2|\zeta_1-\zeta_2|/\delta$. Отсюда, поскольку $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta r/2$, следует, что $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < r$.

В звездочке $S(\zeta_2, r)$ есть луч, который лежит с той же стороны от прямой, содержащей основание треугольника Δ_{ζ_2}, что и сам треугольник Δ_{ζ_2}. Обозначим этот луч s'. Луч s' исходит из точки, лежащей внутри основания треугольника Δ_{ζ_2}, входит в этот треугольник и не содержит его вершину ζ_1. Так как $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < r$, а длина луча s' равна r, то луч s' пересекает одну из боковых сторон треугольника Δ_{ζ_2}. Точку пересечения обозначим ζ'.

Поскольку точки ζ_1, ζ_2, $\zeta' \in \Delta_{\zeta_2}$, то $|\zeta_1 - \zeta'| \leqslant \operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}$ и $|\zeta_2 - \zeta'| \leqslant \operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}$. Так как точка $\zeta' \in S(\zeta_1, r) \cap S(\zeta_2, r)$, а на звездочках $S(\zeta_1, r)$ и $S(\zeta_2, r)$ выполнено неравенство (2.12), то, учитывая свойства функции $h(t)$ и то, что $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < 2|\zeta_1-\zeta_2|/\delta$, получаем неравенство (2.13)

$$\begin{aligned}|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| &\leqslant |u(\zeta_1) - u(\zeta')| + |u(\zeta_2) - u(\zeta')| \leqslant lh(|\zeta_1 - \zeta'|) + lh(|\zeta_2 - \zeta'|)\\ &\leqslant 2lh(\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}) \leqslant 2lh\Big(\frac{2}{\delta}|\zeta_1-\zeta_2|\Big) \leqslant \frac{8l}{\delta}\, h(|\zeta_1-\zeta_2|).\end{aligned}$$

Теперь покажем, что существуют числа σ, L и порция Π множества P, о которых говорилось в условии леммы. В каждой точке $\zeta \in P$ функция $u(z)$ удовлетворяет условию h-регулярности относительно некоторой звездочки $S(\zeta, \sigma_\zeta)$. Ко множеству P_m отнесем те точки ζ из P, для которых у звездочек $S(\zeta, \sigma_\zeta)$ длина лучей σ_ζ и коэффициент распределения лучей δ_ζ не меньше $1/m$ и во всех точках z которых выполнено неравенство

$$|u(z) - u(\zeta)| \leqslant m\, h(|z - \zeta|).$$

Ясно, что $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots$ и $P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$. Множество P замкнуто относительно области G, поэтому имеет тип G_δ. Значит, по теореме Бэра о категориях (см., например, [7, с. 87]) найдется множество P_q, всюду плотное на некоторой порции Π множества P. Положим $\sigma := 1/q$. Уменьшая в случае необходимости величину σ и радиус круга, определяющего порцию Π, можно считать, что $\operatorname{diam} \Pi < \sigma^2/2$ и расстояние от Π до ∂G больше σ. Определим звездочки K_ζ для точек ζ порции Π.

Для точек $\zeta \in \Pi \cap P_q$ положим $K_\zeta = K(\zeta, \sigma) := S(\zeta, \sigma)$. У таких звездочек коэффициенты распределения лучей δ_ζ не меньше σ.

Если $\Pi = P_q$, то звездочки K_ζ определены для всех точек $\zeta \in \Pi$. В этом случае по определению множества P_q при $l = 1/\sigma = q$, $r = \sigma$ и $\delta = \sigma$ на звездочках K_ζ выполнено неравенство (2.12). Так как расстояние между любыми точками ζ' и ζ'' порции Π меньше $\sigma^2/2 = \delta r/2$, то, как показано в начале доказательства леммы, из выполнения на звездочках $K(\zeta', \sigma)$ и $K(\zeta'', \sigma)$ условия (2.12) следует, что для точек ζ' и ζ'' выполнено условие (2.13) с коэффициентом $8l/\delta = 8/\sigma^2 = 8q^2$. При $L := 8q^2$ соотношения (2.10) и (2.11) следуют из (2.12) и (2.13). В этом случае лемма доказана. В частности, если порция Π состоит из единственной точки множества P, то для доказательства леммы надо проверить только неравенство (2.10), а оно выполняется при любом значении $L \geqslant q$.

Предположим теперь, что множество $\Pi \setminus P_q$ непусто. Определим для точек этого множества звездочки K_ζ. Множество P_q всюду плотно на Π. Поэтому для каждой точки $\zeta \in \Pi \setminus P_q$ найдется сходящаяся к ζ последовательность $\{\zeta_n\}$ точек множества P_q. По условию леммы для точки ζ найдется звездочка $S(\zeta, r_\zeta)$ с коэффициентом распределения лучей δ_ζ, во всех точках которой выполнено неравенство (2.12) при $l = L_\zeta > 0$. Коэффициент распределения лучей всех звездочек $K(\zeta_n, \sigma)$ не меньше σ, и на них выполнено неравенство (2.12) при $l = 1/\sigma$. Поэтому, если $|\zeta - \zeta_n| < \min\{r_\zeta, \sigma\} \min\{\delta_\zeta, \sigma\}/2$, то выполняется неравенство (2.13), которое принимает вид $|u(\zeta) - u(\zeta_n)| < \dfrac{8 \max\{L_\zeta, 1/\sigma\}}{\min\{\delta_\zeta, \sigma\}} h(|\zeta - \zeta_n|)$, и, следовательно, $u(\zeta_n) \to u(\zeta)$ при $n \to \infty$.

Пусть $\varphi_n^{(j)}$ — угол, который образует с осью Ox луч $s_n^{(j)}$ звездочки K_{ζ_n}, $j = 1, \ldots, k$. Последовательности углов $\{\varphi_n^{(j)}\}$ ограничены, поэтому их можно считать сходящимися (если потребуется, перейдем для этого к подпоследовательностям $\{\varphi_{n_k}^{(j)}\}$). Соответствующие пределы обозначим $\varphi^{(j)}$. Для точки ζ в качестве звездочки K_ζ возьмем звездочку с k лучами длины σ, у которой j-й луч образует с осью Ox угол величины $\varphi^{(j)}$. Поскольку звездочка K_ζ является предельным положением звездочек K_{ζ_n}, а внутренние радиусы K_{ζ_n} не меньше σ^2, то внутренний радиус звездочки K_ζ также не меньше σ^2, и поэтому коэффициент распределения лучей в звездочке $K_\zeta = K(\zeta, \sigma)$ не меньше σ. Звездочка K_ζ определена, вообще говоря, неоднозначно. Направления ее лучей могут зависеть от выбора как последовательности точек $\{\zeta_n\}$ множества P_q, сходящейся к ζ, так и подпоследовательности $\{\zeta_{n_k}\}$, для которой подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}^{(j)}\}$ сходятся.

Проверим, что при таком определении звездочек K_ζ для точек $\zeta \in \Pi \setminus P_q$ функция $u(z)$ удовлетворяет в ζ условию h-регулярности относительно K_ζ с коэффициентом $3q$, т.е. покажем, что в каждой точке $w \in K_\zeta$ выполнено неравенство

$$|u(w) - u(\zeta)| \leqslant 3qh(|w - \zeta|). \tag{2.14}$$

Естественно, надо рассмотреть только точки $w \neq \zeta$.

Звездочка K_ζ была определена как предельное положение звездочек K_{ζ_n}. Поэтому к точке w звездочки K_ζ сходится некоторая последовательность точек $w_n \in K_{\zeta_n}$. Для доказательства неравенства (2.14) покажем сначала, что последовательность $\{w_n\}$ можно выбрать так, чтобы $u(w_n) \to u(w)$ при $n \to \infty$.

Возможны случаи $w \in G \setminus P$ и $w \in P$. Если $w \in G \setminus P$, то по условию леммы функция $u(z)$ непрерывна в точке w, и поэтому в качестве $\{w_n\}$ можно взять любую последовательность точек $w_n \in K_{\zeta_n}$, сходящуюся к w.

Пусть теперь точка $w \in P$. Обозначим s' луч звездочки K_ζ, на котором лежит точка w. Так как $w \neq \zeta$ и концы лучей звездочки K_ζ самой звездочке не принадлежат, то для некоторого $d > 0$ расстояния от точки w до концов луча s' больше $4d$. Поскольку точка $w \in P$, то по условию леммы функция $u(z)$ удовлетворяет в точке w условию h-регулярности с коэффициентом L_w относительно некоторой звездочки $S(w, r_w)$, коэффициент распределения лучей которой равен некоторому δ_w. Возьмем произвольное положительное число $\rho < \delta_w \min\{d, r_w\}$.

Звездочка K_ζ была определена как предельное положение звездочек K_{ζ_n}. Поэтому, начиная с некоторого номера n_ρ расстояние от любой точки произвольного луча звездочки K_{ζ_n} до соответствующего луча звездочки K_ζ станет меньше $\rho/2$, и, наоборот, на расстоянии меньше $\rho/2$ от любой точки звездочки K_ζ есть точки, лежащие на соответствующем луче каждой из звездочек K_{ζ_n}. Обозначим s'_n лучи звездочек K_{ζ_n}, предельным положением которых является луч s', а ℓ_n — прямые, на которых лежат лучи s'_n.

Рассмотрим многоугольник $P(w, \rho/\delta_w)$ с вершинами в концах лучей звездочки $S(w, \rho/\delta_w)$. Поскольку $\rho < \delta_w r_w$, то $\rho/\delta_w < r_w$, и, значит, $S(w, \rho/\delta_w) \subset S(w, r_w)$. Поэтому в точке w функция $u(z)$ удовлетворяет условию h-регулярности с коэффициентом L_w относительно звездочки $S(w, \rho/\delta_w)$. По определению коэффициента распределения лучей круг $D(w, \rho)$ лежит в многоугольнике $P(w, \rho/\delta_w)$.

Для каждого номера $n \geqslant n_\rho$ точка w лежит на расстоянии меньше $\rho/2$ от луча s'_n звездочки K_{ζ_n}. Пусть z_n — ближайшая к w точка луча s'_n (основание перпендикуляра, опущенного из w на луч s'_n). Ясно, что $|w - z_n| < \rho/2$.

Если точка z_n лежит на звездочке $S(w, \rho/\delta_w)$, то положим $w_n := z_n$. В этом случае выполнено неравенство

$$|w - w_n| < \rho/2. \tag{2.15}$$

Предположим, что точка z_n не лежит на звездочке $S(w, \rho/\delta_w)$. Лучи звездочки $S(w, \rho/\delta_w)$ разбивают многоугольник $P(w, \rho/\delta_w)$ на k равнобедренных треугольников, причем точка z_n не лежит на их боковых сторонах (этот случай уже рассмотрен). Тот из этих треугольников, которому принадлежит точка z_n, обозначим Δ_n.

Оценим сверху и снизу расстояние от точки z_n до концов луча s'_n звездочки K_{ζ_n}, которому принадлежит z_n. Напомним, что расстояния от точки w до концов луча s' звездочки K_ζ, которому принадлежит w, больше $4d$, $\rho < d/2$ и лучи звездочки K_ζ имеют длину σ. По неравенству треугольника имеем оценки сверху

$$|z_n - \zeta_n| \leqslant |z_n - w| + |w - \zeta| + |\zeta - \zeta_n| < \rho/2 + (\sigma - 4d) + \rho/2 = \sigma - 4d + \rho < \sigma - 3d$$

и снизу

$$|z_n - \zeta_n| = |(z_n - w) + (w - \zeta) + (\zeta - \zeta_n)| \geqslant |w - \zeta| - (|z_n - w| + |\zeta - \zeta_n|) \geqslant 4d - (\rho/2 + \rho/2) = 4d - \rho > 3d.$$

Эти неравенства показывают, что при каждом $n \geqslant n_\rho$ точка z_n лежит на расстоянии больше $3d$ от концов содержащего ее луча s'_n звездочки K_{ζ_n}.

Точка z_n не лежит на звездочке $S(w, \rho/\delta_w)$. В этом случае z_n либо внутренняя точка равнобедренного треугольника Δ_n, либо лежит на его основании между вершинами. Поэтому любая прямая, проходящая через z_n, пересекает по крайней мере одну из боковых сторон треугольника Δ_n. Покажем, что в качестве точки w_n можно взять точку пересечения прямой ℓ_n

с боковыми сторонами Δ_n; если таких точек две, возьмем любую из них. Для этого надо проверить, что определенные таким образом точки w_n принадлежат пересечению звездочек S_w и K_{ζ_n} и что $u(w_n) \to u(w)$ при $n \to \infty$.

По определению точка w_n лежит на боковой стороне трегольника Δ_n, а боковые стороны Δ_n в свою очередь лежат на лучах звездочки S_w. Поэтому $w_n \in S_w$. Точка w_n лежит на прямой $\ell_n \supset s_n'$; проверим, что $w_n \in s_n' \subset K_{\zeta_n}$. Действительно, расстояние $|w_n - z_n|$ меньше $\operatorname{diam}\Delta_n$, а $\operatorname{diam}\Delta_n$ меньше суммы длин любых двух сторон треугольника Δ_n, в частности меньше суммы длин боковых сторон Δ_n, не превосходящей $2\rho/\delta_w < 2d$. Значит, $|w_n - z_n| < 2d$. Поэтому, так как расстояние от точки z_n до концов луча s_n' больше $3d$, точка w_n лежит на луче s_n'. Расстояние от точки w (вершины треугольника Δ_n) до точки w_n, лежащей на боковой стороне Δ_n, не больше длины этой стороны, которая не превосходит ρ/δ_w, и, следовательно,

$$|w - w_n| \leqslant \rho/\delta_w. \tag{2.16}$$

Так как в качестве ρ можно взять произвольное достаточно малое положительное число, то из соотношений (2.15) и (2.16) следует, что $w_n \to w$ при $n \to \infty$. Поскольку для каждого n точка w_n лежит на звездочке S_w, вдоль которой функция удовлетворяет условию h-регулярности с коэффициентом L_w, то

$$|u(w_n) - u(w)| \leqslant L_w\, h(|w_n - w|) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь проверим выполнение неравенства (2.14). При каждом n имеем

$$|u(w) - u(\zeta)| \leqslant |u(w) - u(w_n)| + |u(w_n) - u(\zeta_n)| + |u(\zeta_n) - u(\zeta)|. \tag{2.17}$$

Первое и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю. Оценим величину $|u(w_n) - u(\zeta_n)|$. Точки w_n лежат на звездочках K_{ζ_n}, $\zeta_n \in P_q$, а на множествах K_ζ для точек $\zeta \in P_q$ функция $u(z)$ удовлетворяет условию h-регулярности с коэффициентом q. Так как $\zeta_n \to \zeta$ и $w_n \to w$, то $|w_n - \zeta_n| \to |w - \zeta| > 0$, и при достаточно больших номерах n выполнено неравенство $|w_n - \zeta_n| < 2|w - \zeta|$. Для таких n из свойств функции $h(t)$ следует выполнение неравенства

$$|u(w_n) - u(\zeta_n)| \leqslant qh(|w_n - \zeta_n|) \leqslant qh(2|w - \zeta|) \leqslant 2qh(|w - \zeta|).$$

Величина в правой части этого соотношения положительна, поэтому, переходя в (2.17) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что неравенство (2.14) выполнено: $|u(w) - u(\zeta)| \leqslant 3qh(|w - \zeta|)$.

Следовательно, для каждой точки ζ порции Π определена звездочка $K(\zeta, \sigma)$, на которой выполнено неравенство (2.14), которое при $l = 3q$, $r = \sigma$ и $\delta = \sigma$ совпадает с неравенством (2.12). Порция Π была определена так, что $\operatorname{diam}\Pi < \sigma^2/2 = \delta r/2$, поэтому расстояние между любыми двумя точками ζ' и ζ'' порции Π меньше $\delta r/2$. Тогда, как показано в начале доказательства леммы, из выполнения неравенства (2.12) на звездочках $K(\zeta', \sigma)$ и $K(\zeta'', \sigma)$ следует неравенство (2.13) в следующей форме:

$$|u(\zeta') - u(\zeta'')| \leqslant \frac{8l}{\delta} h(|\zeta' - \zeta''|) = \frac{24q}{\sigma} h(|\zeta' - \zeta''|). \tag{2.18}$$

Положим $L := 24q/\sigma$. При таком значении L на звездочках $K(\zeta, \sigma)$, определенных для всех точек ζ порции Π, выполнено неравенство (2.10) (следует из (2.14)), и для любых точек ζ' и ζ'' порции Π выполнено неравенство (2.11) (следует из (2.18)).

Таким образом, положительные числа L и σ и порция Π множества P, о которых говорилось в условии леммы, найдены. Лемма доказана.

Лемма 4 доказана в более общем виде, чем это требуется в настоящей работе. Поскольку прямоугольный крестик K_ζ является звездочкой S_ζ с четырьмя лучами и прямыми углами между соседними лучами, коэффициент распределения лучей в которой равен $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$, то формулировка леммы 4 для прямоугольных крестиков примет следующий вид.

Следствие 3. *Пусть $h(t)$, $t \geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности и множество P замкнуто относительно области G. Пусть функция $u(z)$ определена в области G, непрерывна на $G \setminus P$ и h-регулярна в каждой точке $\zeta \in P$ относительно некоторого прямоугольного крестика T_ζ. Тогда найдутся такие положительные числа L и σ и такая порция Π множества P (быть может, состоящая из одной точки), $\operatorname{diam}\Pi < \sigma/2$, что для каждой точки $\zeta \in \Pi$ существует прямоугольный крестик $K(\zeta,\sigma)$, во всех точках z которого выполняется неравенство*

$$|u(z)-u(\zeta)| \leqslant Lh(|z-\zeta|), \tag{2.19}$$

а для любых точек ζ' и $\zeta'' \in \Pi$ — неравенство

$$|u(\zeta')-u(\zeta'')| \leqslant Lh(|\zeta'-\zeta''|). \tag{2.20}$$

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема неверна и функция $u(z)$ гармонична не всюду в области G. Обозначим P исключительное множество функции $u(z)$, т.е. множество точек области G, в любой окрестности каждой из которых $u(z)$ не всюду гармонична. Ясно, что множество P замкнуто относительно области G.

В силу следствия 3 леммы 4 найдутся такие положительные числа σ и L и такая порция Π множества P, $\operatorname{diam}\Pi < \sigma/2$, для которых для каждой точки $\zeta \in \Pi$ определен прямоугольный крестик $K_\zeta = K(\zeta,\sigma)$, на котором выполнено условие (2.19), а вдоль порции Π — неравенство (2.20). Уменьшив, если потребуется σ, можно считать, что порция Π лежит на расстоянии больше σ от ∂G. Тогда для всех точек $\zeta \in \Pi$ крестики K_ζ целиком лежат в области G. Обозначим $D = D(\omega, R)$ круг, определяющий порцию Π, т.е. круг, для которого $\Pi = P \cap D$. Так как $\operatorname{diam}\Pi < \sigma/2$, то круг D можно выбрать так, что $\operatorname{diam} D < \sigma/2$.

Сначала докажем ограниченность функции $u(z)$ внутри круга $D(\omega, R/2)$. Будем считать, что точка $\omega \in \Pi$ и что $u(\omega) = 0$.

Возьмем круг $D(\eta, r)$ с центром в некоторой точке $\eta \in \Pi$ радиуса $r < \sigma/2$. Положим $\mathcal{K}(\eta, r) := \overline{\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D(\eta,r)} K(\zeta, 2r)}$. Функция $u(z)$ удовлетворяет неравенству (2.20) вдоль порции Π и неравенству (2.19) на крестике K_ζ для каждой точки $\zeta \in \Pi$. Пусть z — произвольная точка $\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D(\eta,r)} K(\zeta, 2r)$, а ζ — точка из $\Pi \cap D(\eta, r)$, для которой $z \in K(\zeta, 2r)$; если таких точек несколько, возьмем любую из них. Тогда, так как $|z-\zeta| < 2r$ и $|\zeta-\eta| < r$, то

$$\begin{aligned} |u(z) - u(\eta)| &\leqslant |u(z)-u(\zeta)| + |u(\zeta)-u(\eta)| \leqslant Lh(|z-\zeta|) + Lh(|\zeta-\eta|) \\ &\leqslant Lh(2r) + Lh(r) \leqslant 2Lh(r) + Lh(r) = 3Lh(r). \end{aligned} \tag{2.21}$$

При замыкании множества $\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D(\eta,r)} K(\zeta, 2r)$ к нему могут добавляться только точки множества $D \setminus \Pi$, в некоторой окрестности которых функция $u(z)$ гармонична и, следовательно, непрерывна, поэтому неравенство (2.21) выполняется во всех точках множества $\mathcal{K}(\eta, r)$. Поскольку $u(\omega) = 0$ и $\operatorname{diam}\Pi < \sigma$, то из соотношения (2.21) следует, что на множестве $\mathcal{K} := \overline{\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D} K(\zeta, \sigma)}$ функция $u(z)$ ограничена: $|u(z)| \leqslant 3Lh(\sigma) =: m$.

Для точек $\zeta \in \Pi \subset D$ интервалы, составляющие крестики K_ζ, имеют длину 2σ и их середины лежат в точке ζ круга D. Так как $\operatorname{diam} D < \sigma/2$, то каждый крестик K_ζ разбивает круг D на четыре выпуклые части. Следовательно, множество $D \setminus \mathcal{K}$ состоит из непересекающихся выпуклых компонент. Пусть Δ — одна из них.

Граница области Δ лежит на множестве $\mathcal{K}$ и, быть может, на окружности ∂D. Все точки $\partial\Delta$, лежащие внутри круга D, принадлежат множеству $\mathcal{K}$, в точках которого $|u(z)|$ принимает значения, не превосходящие m. Покажем, что в точках границы $\partial\Delta$, лежащих внутри D, граничные значения функции $|u(z)|$ относительно области Δ также не превосходят m.

Это очевидно для лежащих внутри D точек $w \in \partial\Delta$, которые принадлежит множеству $D \setminus \Pi$. Действительно, на $D \setminus \Pi$ функция $u(z)$ непрерывна, и поэтому

$$\varlimsup_{z\to w, z\in\Delta} |u(z)| = \lim_{z\to w} |u(z)| = |u(w)| \leqslant m.$$

Предположим, что на границе области Δ найдется точка $\zeta \in \Pi$, лежащая внутри круга D. Сначала покажем, что на $\partial\Delta$ может лежать не более четырех точек порции Π. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots,$ ζ_k — точки из Π, лежащие на $\partial\Delta$. Так как область Δ выпукла, то минимальная выпуклая оболочка точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ является выпуклым k-угольником, лежащим в Δ. Сумма углов выпуклого k-угольника равна $\pi(k-2)$. В то же время по определению множества $\mathcal{K}$ для каждой точки ζ_j, $j = 1, \dots, k$, область Δ лежит в прямом угле с вершиной в ζ_j, и поэтому сумма углов нашего k-угольника не превосходит $\pi k/2$. Значит, должно выполняться неравенство $\pi(k-2) \leqslant \pi k/2$, и поэтому $k \leqslant 4$.

Множество компонент множества $D\backslash\mathcal{K}$ не более чем счетно, и на границе каждой компоненты лежит не более четырех точек порции Π. Поэтому, если потребуется, можно так уменьшить радиус R круга $D = D(\omega, R)$, определяющего порцию Π, чтобы на окружности $C(\omega, R)$ не было точек порции Π, лежащих на границе какой-либо из компонент множества $D \setminus \mathcal{K}$.

Так как точек порции Π, лежащих на $\partial\Delta$, не больше четырех, то для каждой точки $\zeta \in \Pi \cap \partial\Delta$ найдется круг $D(\zeta, r) \subset D$, внутри которого нет других точек $\Pi \cap \partial\Delta$ кроме ζ и для которого пересечение $\Delta \cap C(\zeta, r)$ состоит из одной дуги. В проколотом круге $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ определим функцию $u^*(z)$, положив

$$u^*(z) := \begin{cases} \max\{|u(z)|, m+1\}, & z \in D(\zeta, r) \cap \Delta; \\ m+1 & z \in D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\} \setminus \Delta, \end{cases} \tag{2.22}$$

(m — число, ограничивающее $|u(z)|$ на множестве $\mathcal{K}$).

Функция $u^*(z)$ субгармонична на $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$. Действительно, внутри области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ функция $u^*(z)$ субгармонична как максимум двух субгармонических функций, а в некоторой окрестности каждой из остальных точек $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ функция $u^*(z) \equiv m+1$ и поэтому субгармонична. Поскольку функция $u(z)$ суммируема на $D(\zeta, r) \subset G$, то функция $u^*(z)$ суммируема на $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$.

Возьмем точку $w \in D(\zeta, r/2)$, $w \neq \zeta$. Внутренность круга $D(w, |w-\zeta|)$ лежит в проколотом круге $D(\zeta, r) \setminus \zeta$, внутри которого положительная субгармоническая функция $u^*(z)$ суммируема. Поэтому по неравенству среднего

$$u^*(w) \leqslant \frac{1}{\pi|w-\zeta|^2} \iint\limits_{D(w,|w-\zeta|)} u^*(z)\, dx\, dy \leqslant \frac{1}{\pi|w-\zeta|^2} \iint\limits_{D(\zeta,2|w-\zeta|)} u^*(z)\, dx\, dy.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла отсюда получаем, что

$$u^*(w) = o(|w-\zeta|^{-2}) \quad \text{при } w \to \zeta. \tag{2.23}$$

Воспользуемся следующей теоремой типа Фрагмена — Линделефа для субгармонических функций.

Пусть область Ω лежит в угле величины $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leqslant 2$, с вершиной в точке $z = 0$, причем $0 \in \partial\Omega$. Пусть граничные значения субгармонической в Ω функции $\varphi(z)$ не превосходят некоторого C во всех точках $\partial\Omega \setminus \{0\}$ и при $z \to 0$, $z \in \Omega$, справедлива оценка $\varphi^+(z) = o(|z|^{-1/\alpha})$. Тогда неравенство $\varphi(z) \leqslant C$ выполняется во всей области Ω.

При замене $z = 1/w$ эта теорема следует из утверждения, приведенного в монографии И. И. Привалова [8, с. 87]. Как было отмечено самим Приваловым, сделанное в [8] предположение о том, что область Ω является углом раствора $\alpha\pi$, при доказательстве не использовалось и приведенная в [8] теорема остается верной, если Ω лежит в угле раствора $\alpha\pi$. Впрочем, этот случай легко свести к случаю угла, если вместо функции $u(z)$ рассматривать функцию $u^*(z)$, определенную внутри угла аналогично (2.22).

Крестик $K(\zeta, \sigma)$ разбивает круг $D(\zeta, r)$ на четыре сектора раствора $\pi/2$, и область $\Delta \cap D(\zeta, r)$ лежит в одном из этих секторов. Функция $u^*(z)$ определена так, что в некоторой окрестности каждой точки $\partial\Delta$, лежащей внутри $D(\zeta, r)$, кроме, быть может, самой точки ζ, тождественно $u^*(z) \equiv m{+}1$, и поэтому граничные значения $u^*(z)$ в этих точках относительно области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ не превосходят $m{+}1$. В точках замыкания дуги $\Delta \cap C(\zeta, r)$ функция $u^*(z)$ непрерывна и поэтому ограничена сверху некоторым числом C'. Следовательно, во всех точках $\partial\big(\Delta \cap D(\zeta, r)\big) \setminus \{\zeta\}$ граничные значения $u^*(z)$ относительно области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ ограничены числом $C'' := \max\{m{+}1, C'\}$, область $\Delta \cap D(\zeta, r)$ лежит в угле раствора $\pi/2$, и при $z \to \zeta$ выполнена оценка (2.23). Поэтому по приведенной теореме типа Фрагмена — Линделефа функция $u^*(z)$ не превосходит C'' внутри области $\Delta \cap D(\zeta, r)$. Граничные значения $u^*(z)$ в точке ζ относительно области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ не превосходят $m{+}1$. В этом надо убедиться, только если $m{+}1 < C''$, но это вытекает из следствия леммы 4 в [4].

Таким образом, для каждой компоненты Δ множества $D \setminus \mathcal{K}$ в точках $\partial\Delta$, лежащих внутри круга D, граничные значения функции $u^*(z)$ относительно области Δ не превосходят одного и того же числа $m{+}1$. Теперь покажем, что функция $u(z)$ ограничена на круге $D(\omega, R/2)$ (круг $D = D(\omega, R)$ определяет порцию Π множества P). Для произвольной компоненты Δ множества $D \setminus \mathcal{K}$ рассмотрим функцию

$$u_\Delta(z) := \begin{cases} \max\{|u^*(z)|, m+2\} & z \in \Delta; \\ m+2 & z \in D(\omega, R) \setminus \Delta. \end{cases}$$

Как и раньше, проверяется, что эта функция субгармонична всюду внутри круга $D(\omega, R)$. Так как функция $|u(z)|$ интегрируема на $D(\omega, R) \subset G$, то функция $u_\Delta(z)$ интегрируема в круге $D(\omega, R)$, и

$$0 < \iint\limits_{D(\omega,R)} u_\Delta(z)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{D(\omega,R)} |u(z)|\,dx\,dy + (m+2)\pi R^2.$$

Последний член в этом неравенстве не зависит от выбора компоненты Δ, обозначим его M. Возьмем произвольную точку $\zeta \in D(\omega, R/2)$. Круг $D(\zeta, R/2)$ лежит в круге $D(\omega, R)$, внутри которого функция $u_\Delta(z)$ субгармонична. Поэтому по неравенству среднего значения

$$u_\Delta(\zeta) \leqslant \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint\limits_{D(\zeta,R/2)} u_\Delta(z)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint\limits_{D(\omega,R)} u_\Delta(z)\,dx\,dy \leqslant \frac{M}{\pi(R/2)^2} =: M'. \tag{2.24}$$

По определению функций $u_\Delta(z)$ на каждой компоненте Δ выполнено неравенство $|u(z)| \leqslant u_\Delta(z)$. Так как величина M' не зависит от выбора компоненты Δ, то из неравенства (2.24) следует, что на множестве $D(\omega, R/2) \setminus \mathcal{K}$ значения $|u(z)| \leqslant M'$. На множестве $\mathcal{K}$ значения $|u(z)| \leqslant m$. Следовательно, функция $u(z)$ ограничена в круге $D(\omega, R/2)$, причем в этом круге есть точки исключительного множества, например, точка ω.

Теперь докажем непрерывность $u(z)$ в круге $D(\omega, R/2)$.

Непрерывность функции $u(z)$ надо проверять только в точках порции Π исключительного множества. Предположим, что функция $u(z)$ имеет разрыв в точке $\zeta \in \Pi \cap D(\omega, R/2)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $u(\zeta) = 0$. Тогда $\varlimsup_{z\to\zeta} |u(z)| = \varepsilon > 0$. Поэтому найдется круг $D(\zeta, r)$, в котором выполнено неравенство $|u(z)| < 5\varepsilon/4$, причем в любой окрестности точки ζ есть точки z', в которых $|u(z')| > 3\varepsilon/4$.

По предположению $u(\zeta) = 0$, поэтому из неравенства (2.21) получаем, что на множестве $\mathcal{K}(\zeta, r)$ справедливо неравенство $|u(z)| < 3Lh(r)$. Значит, если радиус r взять достаточно малым, то на $\mathcal{K}(\zeta, r)$ (в частности, на $\Pi \cap D(\zeta, r)$) будет выполнено неравенство $|u(z)| < \varepsilon/4$. Поэтому функция $u(z)$ гармонична в некоторой окрестности каждой точки $z' \in D(\zeta, r/5)$, в которой $|u(z')| > 3\varepsilon/4$. Обозначим Δ' связную компоненту множества $D(\zeta, r/2) \setminus \mathcal{K}(\zeta, r)$, в которой лежит точка z'. В области Δ' значения $|u(z)| \leqslant 5\varepsilon/4$. Функция $u(z)$ непрерывна во всех точках $\partial\Delta' \setminus \Pi$, которые лежат внутри круга $D(\zeta, r/2)$. В этих точках $|u(z)| \leqslant \varepsilon/4$. На $\partial\Delta'$ может лежать не более четырех точек η порции Π исключительного множества, причем компонента Δ' лежит в прямом угле с вершиной в η. Так как функция $u(z)$ ограничена в Δ', то по следствию леммы 4 из [4] отсюда следует, что $\varlimsup_{z\to\eta, z\in\Delta'} |u(z)| \leqslant \varepsilon/4$. Таким образом, во всех точках $\partial\Delta'$, лежащих внутри круга $D(\zeta, r/2)$, функция $|u(z)|$ не превосходит $\varepsilon/4$ в смысле граничных значений в точках $\partial\Delta'$ относительно области Δ'. Поэтому по лемме 4 из [4] в точках $z \in \Delta'$ выполнено неравенство

$$|u(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \Big(\frac{5\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{4}{\pi}\Big(\frac{|z-\zeta|}{r/2}\Big)^2 = \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon\frac{4}{\pi}\Big(\frac{|z-\zeta|}{r/2}\Big)^2. \tag{2.25}$$

Это неравенство выполнено и в точке z' круга $D(\zeta, r/5)$. Поэтому из (2.25) получаем, что

$$|u(z')| < \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon\frac{4}{\pi}\frac{4}{25} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это противоречит тому, что по предположению $|u(z')| > 3\varepsilon/4$.

Следовательно, предположение о том, что у функции $u(z)$ есть точки разрыва, неверно и функция $u(z)$ непрерывна. Тогда по лемме 3 функция $u(z)$ гармонична. Теорема доказана.

Автор признателен И. В. Тихонову за обсуждение и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Priwaloff I.** Sur les fonctions harmoniques // Мат. сб. 1925. Т. 23, № 3. С. 464–471.
2. **Толстов Г.П.** Об ограниченных функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа // Мат. сб. 1951. Т. 29 (71), № 3. С. 559–564.
3. **Теляковский Д.С.** Об одном обобщении теоремы Лумана — Меньшова // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 4. С. 539–549.
4. **Теляковский Д.С.** Об одном достаточном условии гармоничности // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 4. С. 628–640.
5. **Петровский И.Г.** Метод Перрона решения задачи Дирихле // Успехи мат. наук. 1941. Вып. 8. С. 107–114.
6. **Меньшов Д.Е.** Об асимптотической моногенности // Мат. сб. 1936. Т. 1 (43). С. 189–210.
7. **Сакс С.** Теория интеграла М.: ИЛ, 1949. 496 с.
8. **Привалов И.И.** Субгармонические функции. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 199 с.

Теляковский Дмитрий Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ
e-mail: dtelyakov@mail.ru

Поступила 23.08.2016

REFERENCES

1. Priwaloff I. Sur les fonctions harmoniques. *Mat. Sb.*, 1925, Vol. 23, no. 3, pp. 464–471 (in Russian).
2. Tolstov G.P. On bounded functions satisfying Laplace's equation, *Mat. Sb.*, 1951, vol. 29 (71), no. 3, pp. 559–564 (in Russian).
3. Telyakovskii D.S. Generalization of the Looman–Men'shov theorem. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 4, pp. 296–301.
4. Telyakovskii D.S. A sufficient condition for the harmonicity of functions of two variables. *Math. Notes*, 2009, vol 86, no. 4, pp. 591–601.
5. Petrovskii I.G. Perron's method for solving the Dirichlet problem. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1941, iss. 8, pp. 107–114 (in Russian).
6. Men'shov D.E. Ob asimptoticheskoj monogennosti. *Mat. Sb.*, 1936, vol. 1 (43), pp. 189–210.
7. Saks S. *Theory of the integral.* Warszawa, Lwow, Inst. Matem. Polskiej Akad. Nauk, 1937, 348 p.
8. Privalov I.I. *Subgarmonicheskie funkcii* (Subharmonic functions). Moscow, Leningrad: ONTI Publ., 1937, 199 p. (in Russian).

D. S. Telyakovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), National Research Nuclear University MEPhl, Moscow, 115409 Russia, e-mail: dtelyakov@mail.ru .