ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ВСПЛЕСКИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе предложен и обоснован простой численный метод приближенного решения с любой заданной точностью краевой задачи Дирихле в круге для однородного уравнения с оператором Лапласа. Известно много численных методов решения этой задачи, начиная с приближенного вычисления интеграла Пуассона, точно представляющего решение внутри круга через заданные граничные значения искомых функций. Здесь же эксплуатируется идея аппроксимации 2π-периодической задаваемой граничной функции тригонометрическими полиномами, поскольку они очень просто продолжаются до гармонических полиномов внутрь круга, отклоняясь от искомой гармонической функции не далее, чем на погрешность аппроксимации граничной функции. При этом построение аппроксимирующих тригонометрических полиномов осуществляется с помощью интерполяционной проекции на подпространства кратномасштабного анализа (приближения) с базисными 2π-периодическими масштабирующими функциями (точнее, их двоичнорациональными сжатиями и сдвигами), построенными авторами ранее на основе всплесков типа Мейера, являющимися огтогональными и одновременно интерполяционными на равномерных сетках соответствующего масштаба, или только интерполяционными. Оценки в скорости аппроксимации решения краевой задачи основаны на свойстве всплесков Мейера сохранять тригонометрические полиномы определенных (больших) порядков, уже используемом для других целей в первых двух работах из списка литературы. Поскольку для практического применения метода очень важна численная оценка погрешности аппроксимации, значительная часть работы посвящена этой проблеме, точнее явному вычислению констант в известных ранее порядковых оценках погрешности.

Ключевые слова: всплески, интерполяционные всплески, гармонические функции, задача Дирихле.

Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Interpolation wavelets in boundary value problems.

We propose and validate a simple numerical method that finds an approximate solution with any given accuracy to the Dirichlet boundary value problem in a disk for a homogeneous equation with the Laplace operator. There are many known numerical methods that solve this problem, starting with the approximate calculation of the Poisson integral, which gives an exact representation of the solution inside the disk in terms of the boundary values of the required functions. We employ the idea of approximating a given 2π-periodic boundary function by trigonometric polynomials, since it is easy to extend them to harmonic polynomials inside the disk so that the deviation from the required harmonic function does not exceed the error of approximation of the boundary function. The approximating trigonometric polynomials are constructed by means of an interpolation projection to subspaces of a multiresolution analysis (approximation) with basis 2π-periodic scaling functions (more exactly, their binary rational compressions and shifts). Such functions were constructed by the authors earlier on the basis of Meyer-type wavelets; they are either orthogonal and at the same time interpolational on uniform grids of the corresponding scale or only interpolational. The bounds for the rate of approximation of the solution to the boundary value problem are based on the property of Meyer wavelets to preserve trigonometric polynomials of certain (large) orders; this property was used for other purposes in the first two papers from the list of references. Since a numerical bound of the approximation error is very important for the practical application of the method, a considerable portion of the paper is devoted to this issue, more exactly, to the explicit calculation of the constants in the order bounds of the error known earlier.

Keywords: wavelets, interpolation wavelets, harmonic function, Dirichlet problem.

MSC: 65T60, 31A05, 35G15, 35J47, 35J91, 65N15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-257-268

Введение

Вещественные ортогональные 2π-периодические всплески из [1; 2], продолженные с границы круга и кольца до гармонических функций внутрь этих областей, в [3–5] применены для

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

представления и анализа решений в таких областях краевых задач типа Дирихле, Неймана и Пуассона для гармонических и бигармонических функций. Полученные формулы удобны и для приближенного численного решения этих задач, поскольку соответствующие ряды сходятся равномерно в замыкании области, а их частичные суммы порядка N представляются через конечные разложения по базисным функциям выбранного масштаба и являются гармоническими полиномами, аппроксимирующими решения со скоростью наилучшего (в чебышевском смысле) приближения полиномами порядка не менее $N/3$. При этом, конечно, нужно вычислять коэффициенты частных сумм как интегралы по периоду от произведения граничных значений самих функций или их радиальных производных на соответствующие базисные функции. Это можно делать с помощью подходящих квадратурных формул или, используя значения граничных функций на достаточно плотной сетке в качестве начальных данных для дискретного всплеск-преобразования, вернуться по обычной схеме к коэффициентам Фурье частных сумм выбранного для обеспечения требуемой точности масштаба.

В настоящей работе для решения тех же задач предлагается использовать интерполяционно-ортогональные периодические всплески из работы [6], а также тривиальные обобщения интерполяционных всплесков Котельникова — Шеннона на базе ортогональных всплесков Мейера.

Как будет показано, это позволит для указанных краевых задач, но теперь только в классической постановке (т. е. с непрерывными граничными функциями) проще, чем указано выше, строить аналогичные гармонические полиномы, аппроксимирующие точные решения с тем же порядком приближения.

1. Необходимые обозначения и определения

Пусть, как в [6], $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — преобразование Фурье, определяющее любую конкретную, одну и ту же на протяжении всей работы, масштабирующую функцию кратно-масштабной аппроксимации (КМА) типа Мейера, т. е. $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — сосредоточенная на $\Delta_\varepsilon = (-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ $(0 < \varepsilon \le 1/3)$ непрерывная функция, тождественная единице на промежутке $|\omega| \le (1-\varepsilon)/2$ и такая, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+n)|^2 \equiv 1$. Потребуем еще, чтобы функция $\widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega)$ была четной и гладкой на $\mathbb{R}$ с центром симметрии графика над промежутком $\Delta^1_\varepsilon = ((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ в точке $\omega = 1/2$. Из этих ограничений, в частности, следует, что функция $\widehat{\varphi}_3(\omega) = \widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega)$ четная на $\mathbb{R}$, а производная $\widehat{\varphi}'_3(\omega)$ нечетная на $\mathbb{R}$ и четная относительно точки $\omega = 1/2$ на промежутке Δ^1_ε, так же как и дифференциал $d\widehat{\varphi}'_3(\omega)$. Свойство ортонормированности в $L^2(\mathbb{R})$ системы $\Big\{\varphi_\varepsilon(x-k) :\ k\in\mathbb{Z},\ \varphi_\varepsilon(x) = \int_R \widehat{\varphi}_\varepsilon(\nu)e^{2\pi i x\omega}\,d\omega\Big\}$ превращается для $\widehat{\varphi}_3(\omega)$ в свойство $\sum \widehat{\varphi}_3(\omega+n) \equiv 1$, равносильное условию интерполяционности систем

$$\Big\{\varphi_3(2^jx-k)\colon k\in\mathbb{Z};\ \varphi_3(x) = \int\limits_R \widehat{\varphi}_3(\omega)e^{2\pi i x\omega}\,d\omega\Big\} \quad (j\in\mathbb{Z})$$

на сетках $\{l/2^j : l\in\mathbb{Z}\}$ $(j\in\mathbb{Z})$, т. е. условию $\varphi_3(2^jx-k)\Big|_{x=l/2^j} = \varphi(l-k) = \delta_{k,l}$.

Определенные в [6] две интерполяционные в $C(\mathbb{R})$ и одновременно ортогональные в $L^2(\mathbb{R})$ системы $\{\varphi_s(2^jx-k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$ $(j\in\mathbb{Z},\ s=1,2)$ связаны через свои преобразования Фурье $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ $(s=1,2)$ с выбранной функцией $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ следующими соотношениями:

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}^2_\varepsilon(\omega) + i(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega), \quad \beta(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)), \tag{1.1}$$

$$\widehat{\varphi}_1(\omega) = \frac{1}{2}\begin{cases} (1+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)) + i\,(\operatorname{sign}\omega)\sqrt{2\beta(\omega)} & \text{при} \ \ |\omega| < (1+\varepsilon)/2, \\ 0 \ \ \text{при} \ \ |\omega| \ge (1+\varepsilon)/2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\beta(\omega)$ — гладкая, четная на $\mathbb{R}$ функция, зануляющаяся вместе с производной $\beta'(\omega)$ на концах промежутков $\pm\Delta_\varepsilon^1 = \pm((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$, сосредоточенная на их объединении и четная относительно их центров $\omega = \pm 1/2$.

В [6] доказано, что функция $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ представима в виде (1.1) с заменой $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ на другую подходящую функцию $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$. Накладывая на нее условия, что наложены выше на $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$, мы можем формулируемые ниже утверждения при $s = 1,2,3$ доказывать только для $s = 3$ и 2.

Легко видеть, что в силу свойств функций $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ и $\beta(\omega)$ можно функции $\varphi_s(x)$ $(s = 1,2,3)$ на всем их носителе $\mathbb{R}$ представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_3(x) = 2\int\limits_0^{(1+\varepsilon)/2} \cos(2\pi x\omega)\widehat{\varphi}_3(\omega)\,d\omega,\\
&\varphi_2(x) = \varphi_3(x) - \beta^\vee(x), \quad \beta^\vee(x) = 2\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} \sin(2\pi x\omega)\beta(\omega)\,d\omega,\\
&\varphi_1(x) = \int\limits_0^{(1+\varepsilon)/2} (1+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1))\cos(2\pi x\omega)\,d\omega - \int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} \sin(2\pi x\omega)\sqrt{2\beta(\omega)}\,d\omega,
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

откуда следует, что они являются ограниченными на $\mathbb{R}$ целыми функциями экспоненциального типа $(1+\varepsilon)/2$.

Интегрируя два раза по частям, первые две из предыдущих формул заменим на

$$\varphi_3(x) = -2\int\limits_{\Delta_\varepsilon^1} \frac{\sin 2\pi x\omega}{2\pi x}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\,d\omega = 2\int\limits_{\Delta_\varepsilon^1} \frac{1-\cos 2\pi x\omega}{(2\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega) = \int\limits_{\Delta_\varepsilon^1} \frac{\sin^2 \pi x\omega}{(\pi x)^2}\,d\varphi_3'(\omega),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \varphi_3(x) - 2\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} (\sin(2\pi x(1-\omega)) + \sin(2\pi x\omega))\,d\omega\\
&= \varphi_3(x) - 4\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \sin(\pi x)\cos\Big(2\pi x\Big(\omega - \frac{1}{2}\Big)\Big)\beta(\omega)\,d\omega.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Из этих и предыдущих двух формул следует, что при $|x| < 1/2$ справедливы грубые равномерные оценки $|\varphi_s(x+\nu)| = O(1/(1+|\nu|^2))$, гарантирующие равномерную сходимость на промежутке $[-1/2, 1/2]$ процесса 1-периодизации функций $\varphi_s(2^j x - k)$:

$$\mathrm{Pe}_1\varphi_s(2^j x - k) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \varphi_s(2^j(x+\mu) - k) =: \Phi_s^{j,k}(2\pi x), \quad s = 1,2,3, \quad k = \overline{0, 2^j - 1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для того, чтобы отличить в обозначениях эти функции от 1-периодизаций $\Phi_{s,j,k}(x)$ функций $2^{j/2}\varphi_s(2^j x - k)$ из работы [6], будем обозначать их через $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$, заодно сохраняя обозначение $\Phi_s^{j,k}(x)$ для 2π-периодических по x функций, получающихся заменой переменной x в $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$ на $x/(2\pi)$. Вычисляя коэффициенты разложения функции $\Phi_s^{j,0}(2\pi x)$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i l x} \colon l \in \mathbb{Z}\}$, получаем

$$\Phi_s^{j,0}(2\pi x) = 2^{-j} \sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon} \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{2\pi i\nu x} \quad (s = 1,2,3). \tag{1.5}$$

Отсюда и из перечисленных свойств функций $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ $(s = 1,2,3)$ вытекают (при целых ν и обозначениях $2^j\Delta_\varepsilon^+ = 2^{j-1}(0,(1+\varepsilon))$, $2^j\Delta_\varepsilon^1 = 2^{j-1}\,(1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$ более удобные для применения, чем (1.2)–(1.5), формулы

$$\Phi_3^{j,k}(x)=\Phi_3^{j,0}\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)=2^{-j+1}\bigg(\frac12+\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^+}\widehat{\varphi}_3\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg),$$

$$\Phi_2^{j,k}(x)=\Phi_3^{j,k}(x)-2^{-j+1}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^1}\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(1-\frac{\nu}{2^j}\Big)\sin\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big),$$

$$\Phi_1^{j,k}(x)=\Phi_1^{j,0}\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big),$$

где

$$\Phi_1^{j,0}(x)=2^{-j-1}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon}\Big(1+\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu x\Big)$$

$$-2^{-j}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^1}\bigg(\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(1-\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu x+\sqrt{2\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(1-\frac{\nu}{2^j}\Big)}\sin\nu x\bigg).$$

Ясно, что $\Phi_s^{0,0}(x)\equiv 1$, $\Phi_s^{j,0}(x)\equiv \mathrm{const}$ при $j<0$, $\Phi_s^{j,k+2^jn}(x)\equiv\Phi_s^{j,k}(x)$ $(n\in\mathbb{Z})$, поэтому во всех трех предыдущих формулах можно считать $0\le k<2^j-1,\ j\in\mathbb{N}$.

2. Аппроксимативные свойства интерполяционных всплесков

Будем сначала работать с 1-периодическими масштабирующими функциями $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$. Свойство $\varphi_s(2^jx-k)\big|_{x=l/2^j}=\delta_{k,l}$ очевидно распространяется на $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$ следующим образом: $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)\big|_{x=l/2^j}=\delta_{k,l}$. Положим $V_s^j=\operatorname{span}\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$, где V_s^0 — множество постоянных на периоде $[-1/2,1/2]$ функций. Далее обозначим через W_s^j прямое дополнение V_s^j до V_s^{j+1} с интерполяционным на сетке $\{(2l\pi)/2^j: l=\overline{0,2^j-1}\}$ базисом $\{\Phi^{j+1,2k+1}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$.

Обозначим интерполяционную проекцию функции $f(x)\in\widetilde{C}[0,1]$ через $S_{s,2^j}(2\pi x;f)=\sum_{k=0}^{2^j-1}f(k/2^j)\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$; $\widetilde{C}[0,a]$ — пространство непрерывных a-периодических функций.

В работе [6] с использованием ряда оценок из [2] доказано, что для функций $f(x)\in\widetilde{C}[0,1]$ и $s=1,2$ справедливы неравенства

$$\Big|f(x)-\sum_{k=0}^{2^j=1}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(2\pi x)\Big|\le C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)\omega\Big(\frac{1}{N_{\varepsilon,j}};f\Big)_{C_{[0,1]}}\quad (N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1+\varepsilon)],\ s=1,2).\tag{2.1}$$

Здесь и далее $C(g)$ означает положительную константу, зависящую только от g. Оценки (2.1) достаточно, чтобы доказать, что множество $\bigcup_{j=0}^\infty V_s^j=V_s^0\oplus(\oplus_{j=0}^\infty W_s^j)$ всюду плотно в $\widetilde{C}[0,1]$. Для эффективного алгоритма приближенного решения указанных краевых задач, этой оценки недостаточно из-за неопределенности $C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)$, поскольку это не позволяет по требуемой точности приближения выбрать подходящий параметр j. Следующая часть разд. 2 связана с уточнением этого неравенства.

В работе [2] в основу оценки сверху функции $|\varphi_\varepsilon(x)|$ положено неравенство $|\varphi_\varepsilon(x)|<C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)/(1+|x|^2)$, которое верно и для функций $\varphi_s(x)$ $(s=1,2,3,\ 0<\varepsilon\le 1/3)$. Для последних функций установим более аккуратное неравенство, в частности согласованное со свойством их интерполяционности $\varphi_s(n)=\delta_{n,0}$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Ограничения A. Пусть функция $\varphi_{\varepsilon(x)}$ удовлетворяет всем условиям на нее и ее производную $\widehat{\varphi}'_\varepsilon(\omega)$, приведенные в первом абзаце разд. 1.

Далее через $(\Delta_\varepsilon^1)/2$ обозначена правая половинка промежутка Δ_ε^1. Справедливо следующее

Утверждение. *При ограничениях A для функции* $\varphi_3(x)=\varphi_3(x;\widehat{\varphi}_\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$|\varphi_3(x)|\le C(\widehat{\varphi}_3')\Big\{\frac{\sin(\pi x)\sin(\pi\varepsilon x)}{(\pi x)^2}\chi_{\left(|\cdot|\le\frac{1}{2\varepsilon}\right)}(x)+\frac{|\sin\pi x|}{|\pi x|^2}\chi_{\left(|\cdot|\ge\frac{1}{2\varepsilon}\right)}(x)\Big\},\tag{2.2}$$

где $C(\widehat{\varphi}_3')\le V(\varphi_3';(\Delta_\varepsilon^1)/2)$ *— вариация функции на отрезке* $[(1/2),(1+\varepsilon)/2]$, *а* $\chi_{(|\cdot|\le a)}(x)$ *и* $\chi_{(|\cdot|\ge a)}(x)$ *— характеристические функции множеств* $\{x\colon |x|\le a\}$ *и* $\{x\colon |x|\ge a\}$ *соответственно.*

Доказательство. Используя первую формулу из (1.3) и равенства $\widehat{\varphi}_3'(0)=\widehat{\varphi}_3'((1\pm\varepsilon)/2)=0$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\varphi_3(x)=-2\int\limits_0^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\sin(2\pi x\omega)}{2\pi x}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\,d\omega=-2\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\sin(2\pi x\omega)}{2\pi x}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\,d\omega$$

$$=2\left(\widehat{\varphi}_3'(\omega)\frac{\cos(2\pi x\omega)-1}{(2\pi x)^2}\Big|_{\omega=\frac{1-\varepsilon}{2}}^{\frac{1+\varepsilon}{2}}+\int\limits_{\Delta_\varepsilon^1}\frac{1-\cos(2\pi x\omega)}{4(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega)\right)$$

$$=\left(\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\right)\frac{1-\cos(2\pi x\omega)}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega).$$

Так как из условий на $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ следует, что $\widehat{\varphi}_3'(\omega)$ — четная на промежутке Δ_ε^1 функция относительно точки $\omega=1/2$, то после замены ω на $1-\omega'$ в интеграле по левой половине Δ_ε^1, получаем

$$\varphi_3(x)=-\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{1/2}\frac{1-\cos(2\pi x(1-\omega))}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega)+\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{1-\cos(2\pi x\omega)}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega)$$

$$=-\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\cos(2\pi x(1-\omega))-\cos(2\pi x\omega)}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega).$$

Окончательно выводим

$$\varphi_3(x)=-\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\sin(\pi x)\sin(2\pi x(\omega-1/2))}{(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega).\tag{2.3}$$

Здесь $\omega-1/2$ возрастает от нуля до $\varepsilon/2$, поэтому аргумент функции $|\sin(2\pi|x|(\omega-1/2))|$ при $|x|\le 1/2\varepsilon$ не превосходит $\pi/2$ и, следовательно, при каждом таком x выполняется неравенство $|\sin(2\pi x(\omega-1/2))|\le|\sin(\pi x\varepsilon)|$. А тогда для $|x|<1/(2\varepsilon)$ из формулы (2.3) в силу четности $\widehat{\varphi}_3'(\omega)$ на Δ_ε^1 относительно точки $\omega=1/2$ получаем

$$|\varphi_3(x)|\le V(\widehat{\varphi}_3'(\omega),(\Delta_\varepsilon^1)/2)\frac{|\sin(\pi x)\sin(\pi x\varepsilon)|}{(\pi x)^2}=\frac{1}{2}V(\varphi'(\omega),\Delta_\varepsilon^1)\frac{|\sin(\pi x)\sin(\pi x\varepsilon)|}{(\pi x)^2},\quad |x|<\frac{1}{2\varepsilon},$$

что соответствует первой части оценки (2.2).

При всех x из (2.3) следует оценка $|\varphi_3(x)|\le(1/2)V(\widehat{\varphi}_3'(\omega);\Delta_\varepsilon^1)|\sin(\pi x)|/(\pi x)^2$, что при $|x|>1/(2\varepsilon)$ соответствует второй части оценки (2.2). Утверждение доказано. □

Лемма 1. *При* $|y|\le 1/2$ *справедливо неравенство* $A(y)=:\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z},\,\nu\ne0}\dfrac{1}{(y+\nu)^2}\le\pi^2-4.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теории мероморфных функций хорошо известна формула

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(y+\nu)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi y}, \tag{2.4}$$

в явном виде выписанная, например, в [7, с. 652]. Следовательно,

$$A(y)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi y}-\frac{1}{y^2}=\frac{(\pi y)^2-\sin^2\pi y}{y^2\sin^2\pi y}.$$

Полагая $\pi y=z$ представим $A(y)$ в виде

$$A(y)=\pi^2 A_1(z),\qquad A_1(z)=\frac{z^2-\sin^2 z}{z^2\sin^2 z}$$

и покажем, что на участке $0\le z<\pi$ функция $A_1(z)$ возрастает. Легко проверить, что производная $A_1'(z)$ имеет вид:

$$A_1'(z)=2\frac{\sin^3 z-z^3\cos z}{z^3\sin^3 z}.$$

Хотя $\sin^3 z$ существенно меньше z^3, числитель $A_2(z)=\sin^3 z-z^3\cos z$ этой дроби при $0<z\le\pi/2$ положителен. Действительно,

$$A_2'(z)=z^3\sin z-3\cos z(z^2-\sin^2 z),$$

$$A_2''(z)=6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z-6z\cos z+6z^2\sin z+z^3\cos z,$$

$$A_2'''(z)=18\sin z(z-\sin z\cos z)+9\cos z(z^2-\sin^2 z).$$

Из последней формулы видно, что $A_2''(z)\ge 0$ при $0\le z\le\pi/2$, откуда в силу равенств $A_2''(0)=0,\ A_2'(0)=0,\ A_2(0)=0$ последовательно вытекает положительность при $0<z\le\pi/2$ производных $A_2''(z),\ A_2'(z)$ и функций $A_2(z),\ A_1'(z)$. Применяя троекратно правило Лопиталя, находим, что $A_1(0)=1/3$ и следовательно (учитывая очевидную положительность $A_1'(z)$ также при $\pi/2\le z<\pi$) функция $A(y)$ вслед за $A_1(z)$ на участке $[0,1)$ возрастает от $\pi^2/3$ до ∞. В частности, при $|y|\le 1/2$ будет $A(y)\le A(1/2)$, что совпадает с утверждением леммы 2. $\square$

Оценим теперь норму $\|S_{3,2^j}\|$ оператора

$$S_{3,2^j}(2\pi x,f)=\sum_{k=0}^{2^{j-1}}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Phi_3^{j,k}(2\pi x)$$

как оператора $S_{3,2^j}:\widetilde{C}[0,1]\to V_j^3$ интерполяционного проектирования 1-периодических непрерывных функций на подпространство $V_j^3=\operatorname{span}\{\Phi_3^{j,k}(2\pi x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$ — части пространства 1-периодических тригонометрических полиномов порядка $<2^{j-1}(1+\varepsilon)$, содержащей целиком все подпространство $T_{N_{\varepsilon,j}}$ таких полиномов порядка $N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$.

Лемма 2. *Для оператора $S_{3,2^j}=S_{3,2^j}(x,f;\widehat{\varphi}_\varepsilon)$ при выполнении условий ограничений A на функцию $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$справедлива оценка*

$$\|S_{3,2^j}\|\le\Big[\frac{4}{\pi^2}+\varepsilon+\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}\Big)V\big(\widehat{\varphi}(\omega);(\Delta_\varepsilon^1)/2\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку справедливо точное на классе $\widetilde{C}[0,1]$ неравенство

$$|S_{3,2^j}(2\pi x;f)|\le\|f\|_{\widetilde{C}[0,1]}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big|\Phi_3^{j,0}\Big(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big|,$$

то для оценки нормы $\|S_{3,2^j}\|$ сверху нужно оценить последнюю сумму. Легко проверить, что в силу 1-периодичности функции $\Phi_3^{j,0}(2\pi x)$ эта сумма является (2^{-j})-периодической, так что достаточно ее оценить при $|x| \le 1/(2^{j+1})$. Для таких точек x имеем $|2^j x| \le 1/2 < 1/(2\varepsilon)$, так что $|\Phi_3^{j,0}(x)|$ с помощью утверждения 1 и леммы 1 оценивается так:

$$|\Phi_3^{j,0}(2\pi x)| = \Big|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_3(2^j(x+\nu))\Big| \le |\varphi_3(2^j x)| + \sum_{\nu\ne 0} |\varphi_3(2^j(x+\nu))|$$

$$\le C(\widehat{\varphi}_3')\Big\{\frac{|\sin(\pi 2^j x)\sin(\pi\varepsilon 2^j x)|}{(\pi 2^j x)^2} + \sum_{\nu\ne 0}\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{(\pi 2^j)^2(x+\nu)^2}\Big\},$$

и, следовательно,

$$|\Phi_3^{j,0}(2\pi x)| \le C(\widehat{\varphi}_3')\Big\{\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{\pi 2^j |x|}\frac{|\sin(\pi\varepsilon 2^j x)|}{\pi 2^j x} + \frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}|\sin(\pi 2^j x)|\Big\}. \tag{2.5}$$

Далее, так как при $k = \overline{1, 2^j-1}$ и $|x| \le 1/2^{j+1}$ имеем $|x - k/2^j| > 1/2^{j+1}$, то, огрубляя результат утверждения 1 при $|x| < 1/(2\varepsilon)$, видим, что

$$\Big|\Phi_3^{j,0}(2\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\Big|\varphi_3\Big(2^j\Big(x+\nu-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{|\sin(\pi 2^j(x-\frac{k}{2^j}))|}{|\pi 2^j|^2}\,\frac{C(\widehat{\varphi}_3')}{((x-k/2^j)+\nu)^2},$$

используя формулу (2.4), получаем оценку

$$\Big|\Phi_3^{j,0}(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big| \le C(\widehat{\varphi}_3')\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{(\pi 2^j)^2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-\frac{k}{2^j}+\nu)^2} = C(\widehat{\varphi}_3')\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{2^{2j}}\,\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)}.$$

Отсюда в силу четности функции $\sin\pi y$ относительно точки $y = 1/2$ имеем

$$\sum_{k=1}^{2^j-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)} = 2\sum_{k=1}^{2^{j-1}-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)} + \frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{1}{2})\Big)} < 2\sum_{k=1}^{2^j-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)}.$$

На этом участке $[1/2^j - x, 1/2 - x]$ функция $\xi_x(k)$ под знаком последней суммы по $k = \overline{1, 2^{j-1}}$ монотонно убывает, поэтому ее можно оценить так:

$$2^{j+2}\sum_{k=1}^{2^j-1}\frac{1}{2^{j+1}}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)} \le 2^{j+2}\int_{x-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2^j}}\frac{1}{\sin^2\pi(x-\xi)}\,d\xi$$

$$= \frac{2^{j+2}}{\pi}\operatorname{ctg}\pi(x-\xi)\Big|_{\xi=x-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2^j}} = \frac{2^{j+2}}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2^j} \le \frac{4}{\pi^2}2^{2j}.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\sum_{k=1}^{2^j-1}\Big|\Phi_3^{j,0}\Big(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le \frac{4}{\pi^2}C(\widehat{\varphi}_3')|\sin\pi 2^j x|. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.5) и (2.6), выводим оценку для функции Лебега $L_{3,2^j}(2\pi x) = \sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_3^{j,k}(2\pi x)|$ оператора $S_{3,2^j}(x,f)$ на одном из ее периодов $(-1/2^{j+1}, 1/2^{j+1})$:

$$L_{3,2^j}(2\pi x) \le \Big(\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\Big)\Big\{\frac{|\sin(\pi 2^j x)\sin(\pi\varepsilon 2^j x)|}{(\pi 2^j x)^2} + \Big(\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}} + \frac{4}{\pi^2}\Big)|\sin(\pi 2^j x)|\Big\}, \tag{2.7}$$

из которой вытекает утверждение леммы 2. □

Оценим далее норму операторов $S_{2,2^j}$ интерполяционного проектирования на подпространства $V_{s,j}$.

Лемма 3. *Для оператора* $S_{2,2^j}(2\pi x, f)$ *интерполяционного проектирования* $\widetilde{C}[0,1]$ *на* $V_{2,j} = \operatorname{span}\{\Phi_2^{j,k}(2\pi x)\colon k = \overline{0, 2^j-1}\}$ *при условиях ограничений A на функцию* $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ *справедлива оценка*

$$\|S_{2,2^j}\|_{\widetilde{C}[0,1]}^{\widetilde{C}[0,1]} \le \bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} ((\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega))'_\omega) + \bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} ((\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega))'_\omega)\Big(\frac{4}{\pi^2} + \varepsilon + \frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}\Big).$$

Такая же оценка выполняется и для оператора $S_{1,2^j}$ *при замене функции* $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ *на* $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$ *по формуле* $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}^2(\omega) = \dfrac{1}{2}(1 + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вспоминая, что $\widehat{\varphi}_2(\omega) = (\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega))^2 + i(\operatorname{sign}\omega)\,\beta(\omega) = \widehat{\varphi}_3(\omega) + i(\operatorname{sign}\omega)\,\beta(\omega)$ (здесь $\beta(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1))$, устанавливаем: $\Phi_2^{j,k}(2\pi x) = \Phi_3^{j,k}(2\pi x) - B^{j,k}(2\pi x)$, где $B^{j,k}(2\pi x) = B^{j,0}(2\pi(x - k/2^j))$; функция $B^{j,0}(2\pi x)$ определена ниже. В силу нечетности функции $(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega)$ на $\mathbb{R}$, а также четности $\beta(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega)$ на интервале $\Delta_\varepsilon^1 = ((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ относительно точки $\omega = 1/2$, после преобразований формулы (1.4), аналогичных выполненным для $\widehat{\varphi}_3(\omega)$, получим для обратного преобразования Фурье $\beta^\vee(x)$ функции $\beta(\omega)$ формулу

$$\beta^\vee(x) = -2\int_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \frac{\sin(\pi x)\sin^2(\pi x(\omega - \frac12))}{(\pi x)^2}\, d\beta'(\omega).$$

Будем 1-периодизацию функции $\widehat{\beta}(2^j x)$ обозначать через $B_2^{j,0}(2\pi x)$. Имеем

$$B_2^{j,0}(2\pi x) = -2\Big\{\int_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \frac{\sin(\pi 2^j x)\sin^2(\pi 2^j x(\omega - \frac12))}{(\pi x)^2}\, d\beta'(\omega)$$

$$+\sum_{\nu\neq 0}\int_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \frac{\sin(\pi 2^j x)\sin^2(\pi 2^j (x+\nu)(\omega - \frac12))}{\pi 2^j (x+\nu)^2}\, d\beta'(\omega)\Big\}.$$

Считая $|x| \le 1/2^{j+1}$, будем иметь $\pi|x|(\omega - 1/2)2^j \le (\pi/2)(\varepsilon/2) < \pi/2$, и потому $\sin^2(\pi 2^j x(\omega - 1/2)) \le \sin^2(\pi 2^j x(\varepsilon/2))$. Во втором интеграле за счет больших ν аргумент у второго множителя может меняться и при $|x| < 1/2^{j+1}$ в очень больших пределах, так что вместо грубой оценки $|\sin^2(\pi 2^j(x-\nu)(\omega - 1/2))| \le 1$ вряд ли что можно придумать. Тогда, с учетом леммы 1 получаем

$$|B_2^{j,0}(2\pi x)| \le \Big(\frac{|\sin\pi 2^j x|\sin^2(\pi 2^j x\varepsilon/2)}{(\pi 2^j x)^2} + \frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}|\sin\pi 2^j x|\Big)C(\beta'(\omega)), \quad (C(\beta'(\omega)) = \bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\beta'(\omega)).$$

Буквально повторяя рассуждения доказательства леммы 2, начиная с вывода оценки для $\Phi_3^{j,0}(2\pi(x - k/2^j))$ с заменой всего лишь $\widehat{\varphi}'_3(\omega)$ на $\beta'(\omega)$ и $\sin(2\pi\varepsilon 2^j x)$ на $\sin^2(\pi\varepsilon 2^j x/2)$, получим следующие неравенства при $|x| \le 1/2^{j+1}$ и $k = \overline{1, 2^j-1}$:

$$\Big|B_2^{j,0}\Big(2\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le C(\beta'(\omega))\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{2^{2j}}\frac{1}{\sin^2\pi(x - \frac{k}{2^j})},$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big|B_2^{j,0}\Big(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le C(\beta'(\omega))\Big(\frac{|\sin(\pi 2^j x)|\sin^2(\pi 2^j x\frac{\varepsilon}{2})}{(\pi 2^j x)^2}+\Big(\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}+\frac{4}{\pi^2}\Big)|\sin(\pi 2^j x)|\Big).$$

Объединив это неравенство с аналогичным неравенством для функций $\Phi_3^{j,k}(2\pi x)$, получаем для функции Лебега $L_{2,2^j}(2\pi x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_2^{j,k}(2\pi x)|$ оценку на периоде $[1/2^{j+1},1/2^{j+1}]$ этой функции:

$$L_{2,2^j}(2\pi x)\le\Big(C(\varphi_2'(\omega))\Big|\frac{\sin\pi\varepsilon 2^j x}{|\pi 2^j x|}\Big|+C(\beta'(\omega))\frac{\sin^2\pi\varepsilon 2^{j-1}x}{|\pi 2^j x|}\Big)\frac{|\sin\pi 2^j x|}{|\pi 2^j x|}$$

$$+\big(C(\varphi_2'(\omega))+C(\beta'(\omega))\big)\Big(\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}+\varepsilon+\frac{4}{\pi^2}\Big)|\sin(\pi 2^j x)|, \tag{2.8}$$

откуда вытекает результат леммы 3 относительно константы Лебега $\|S_{2,2^j}\|_{\widetilde C[0,1]}^{\widetilde C[0,1]}=\max_x L_{2,2^j}(2\pi x)$.

З а м е ч а н и е. Поскольку переход от 1-периодических функций $f(2\pi x)$ к 2π-периодическим $f(x)$ совершается простой заменой x на $x/(2\pi)$, то

1) 2π-периодические системы функций

$$\Big\{\Phi_s^{j,k}(x)=2^{-j}\sum_{\nu/2^j\in\Delta_\varepsilon}\widehat\varphi_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\colon k=\overline{0,2^j-1}\Big\}\quad(s=1,2,3,\ j\in\mathbb N)$$

будут интерполяционными на сетке $\{x_k=(2\pi k)/2^j\}_{k=0}^{2^j-1}$, а при $s=1$ и 2 одновременно ортонормированными относительно скалярного произведения $(f,g)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g}(x)\,dx$;

2) для функций Лебега $\sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_s^{j,k}(x)|$ справедливы оценки (2.7), (2.8), если в них заменить x на $x/(2\pi)$;

3) для констант Лебега

$$L_s=\|S_{s,2^j}\|_{C_{2\pi}}^{C_{2\pi}}=\max_x\sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_s^{j,k}(x)|$$

(где $S_{s,2^j}(x,f)=\sum_{k=0}^{2^j-1}f((2\pi k)/2^j)\Phi_s^{j,k}(x)$, $f(x)\in C_{2\pi}=\widetilde C[0,2\pi]$, $s=1,2,3$) сохраняются соответствующие оценки из лемм 2 и 3.

Для полноты изложения обоснуем почти тривиальное распространение факта, хорошо известного для ортогональных масштабирующих систем типа Мейера, на рассматриваемые здесь интерполяционные периодические системы: на пространстве 2π-периодических тригонометрических полиномов $\tau_n(x)$ порядка $n\le N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$ интерполяционная проекция на пространства $V_j^s=\operatorname{span}\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{1,2^j-1}\}$ оператор $S_{s,2^j(x,\tau_n)}$ является тождественным оператором: $S_{s,2^j}(x,\tau_n)\equiv\tau_n(x)$. Действительно, так как ортогональная проекция на V_j^s любой функции лежит в V_j и сохраняет $\tau_n(x)$ при $n\le N_{\varepsilon,j}$, то любой $\tau_n(x)\in V_j^s$, а поскольку $S_{s,2^j}$ как проектор тождественен на V_j^s, то $S_{s,2^j}(x,\tau_n)\equiv\tau_n(x)$.

Из лемм 2 и 3 и пп. 1), 3) замечания по схеме Лебега тривиально вытекает следующее утверждение, названное ввиду его важности теоремой.

Теорема. *Точность аппроксимации в метрике пространства $C_{2\pi}=\widetilde C[0,2\pi]$ функций $f(x)\in C_{2\pi}$ их интерполяционной проекцией $S_{s,2^j}(x,f)$ на подпространство V_j^s гарантируется формулой*

$$\|f(\cdot)-S_{s,2^j}(\cdot,f)\|_{C_{2\pi}}\le(1+\|S_{s,2^j}\|)E_{N_{\varepsilon,j}}(f),$$

где $E_{N_{\varepsilon,j}}(f)$ — наилучшее приближение функции f в $C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка $N_{\varepsilon,j} = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, а

$$\|S_{s,2^j}\| \le \begin{cases} \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \Big(\dfrac{d}{d\omega}(\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega))\Big)\Big(\dfrac{4}{\pi^2}+\varepsilon\Big), \ s=3, \ j\ge 1; \\ \Big(\bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \dfrac{d}{d\omega}(\varphi_\varepsilon^2(\omega)) + \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \dfrac{d}{d\omega}(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega))\Big)\Big(\dfrac{4}{\pi^2}+\varepsilon+1\Big), \ s=2, \ j\ge 1; \\ \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \Big(\dfrac{d}{d\omega}(\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}^2(\omega))\Big) + \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \Big(\dfrac{d}{d\omega}(\varphi_{1,\varepsilon}(\omega)\varphi_{1,\varepsilon}(1-\omega))\Big)\Big(\dfrac{4}{\pi^2}+\varepsilon+1\Big), \ s=1, \ j\ge 1. \end{cases}$$

Отметим, что при некоторых простых дополнительных ограничениях на $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ значения выписанных вариаций легко определить. Так, например, если функция $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ при прочих условиях ограничений A еще и выпукла вниз на участке $(1/2,(1+\varepsilon)/2)$, то $\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}(d/d\omega\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)) = |\widehat{\varphi}_\varepsilon'(1/2)|$, $\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}(d/d\omega)(\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(1-\omega)) = \max_{\omega\in\Delta_\varepsilon^1}|(\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(1-\omega))'_\omega|$. А для оценки $E_n(f)$ можно применить хорошо известные неравенства Джексона — Стечкина через геометрические характеристики гладкости функции f — ее модули непрерывности $\omega_m(\pi/N_{\varepsilon,j},f)$ m-го порядка ($m=1$ — Д. Джексон, $m=2$ — Н. И. Ахиезер, $m>2$ — С. Б. Стечкин).

В некоторых работах, в частности в [2;6], в случае ортогональных всплесков наряду с уклонениями $\|f-S_{2^j}(f)\|$ теоретически изучаются и уклонения $\|f-S_n(f)\|$ для промежуточных $n\in(2^j,2^{j+1})$, но вряд ли стоит применять такие аппроксимации в вычислительной практике, поскольку добавление к системе $\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$ дополнительных (не всех) всплесков $\Psi_s^{j,k}(x) = \Phi_s^{j+1,2k+1}(x)$, $k\in\{0,1,\dots,2^j-1\}$, (из-за их сильной локализации) может только локально существенно улучшать точность аппроксимации.

3. Применение к решению задачи Дирихле в круге

В наших работах [3–5] и ряде публикаций Г.А. Дубосарского ортогональные всплески, построенные на базе периодизаций всплесков Мейера, уже применялись для решения задач Дирихле в круге, кольце и (Г.А. Дубосарским) в круге с несколькими круглыми отверстиями, причем допускалось граничным функциям быть функциями из произвольного $L_p[0,2\pi)$ $(1\le p\le\infty)$. Однако для непрерывных граничных значений в вычислительном плане в круге экономичнее применять рассмотренные выше базисы пространств V_j^s $(s=1,2,3)$.

Как отмечалось в начале работы, тригонометрические полиномы $\sum_{k=0}^{2^j-1}c_k\Phi_s^{j,k}(x)$ тривиально продолжаются до гармонических в круге полиномов заменой $\Phi_s^{j,k}(x)$ на

$$\Phi_s^{j,k}(r,x) = 2^{-j}\sum_{\nu\in\Delta_\varepsilon}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)r^\nu e^{2\pi i\nu(x-(2\pi k)/2^j)},$$

где re^{ix} $(0\le r\le 1,\ 0\le x<2\pi)$ — точки единичного круга K_1 с центром в начале полярной системы координат.

Для приближенного решения задачи Дирихле

$$(D) \qquad \begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0\le r<1), \\ u(1,x) = g(x)\in\widetilde{C}[0,2\pi] = C_{2\pi} \end{cases}$$

с заданной точностью нужно с помощью оценок теоремы 1 выбрать (для желательного $s=1,2,3$) с помощью удобных оценок величин $E_n(f)$ нужный параметр $j\gg 1$, и, используя значения $f(x)$ на сетке $Q_j =: \{(2\pi k)/2^j\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$, построить гармонический полином

$S_{s,2^j}(r,x;g) = \sum_{k=0}^{2^j-1} g((2\pi k)/2^j)\Phi_s^{i,0}(r,x-(2\pi k)/2^j)$, совпадающий на сетке Q_j при $r=1$ со значениями функции g.

Применяя принцип максимума и дословно повторяя доказательство при $\nu=0$ следствия 1.1 из [3] и теорему, получаем

Следствие. *При условиях ограничений A и* $g(x)\in C_{2\pi}$ *функция* $S_{s,2^j}(r,x;g)$ *приближает решение* $u(r,x)$ *задачи* (D) *с точностью, гарантируемой неравенством*

$$|u(r,x)-S_{s,2^j}(r,x;g)| \le \frac{4}{\pi}(1+\|S_{s,2^j}\|)r^{1+N_{\varepsilon,j}}E_{N_{\varepsilon,j}}(g)_{C_{2\pi}}, \quad re^{ix}\in K_1,$$

где при каждом $s=1,2,3$ *константа Лебега* $\|S_{s,2^j}\|_{C_{2\pi}}^{C_{2\pi}}$ *определена в теореме.*

Наиболее простым в построении и с наименьшей из трех констант Лебега $\|S_{s,2^j}\|$ $(s=1,2,3)$ является случай с $s=3$. Его удобно применять, если значения функции $g(x)$ детерминированы и точно определены. Однако в случае когда функция $g(x)$ содержит случайные ошибки в ее определении, например, когда сеточные значения $g((2\pi k)/2^j)$ $(k=\overline{1,2^j-1})$ определены экспериментально, то выгоднее применять интерполяционно-ортогональные КМА с $s=2$ или 1. В этом случае можно применить к построенным интерполяционным $S_{s,2^j}(x,f)$ хорошо представленные в Mathlab'е и других аналитических пакетах программ прямое и обратное дискретные всплеск-преобразования, используя ортогональность систем $\Phi_s^{j,k}(x)$, чтобы с помощью известных методов уменьшить влияние случайных ошибок (шумов) в задании функции $g(x)$, особенно если известен закон распределения случайных ошибок. Важно, что при этом, спускаясь с уровня V_s^j на $V_s^{j-1},\ldots$ и возвращаясь обратно, мы будем получать на этих уровнях в качестве коэффициентов функций $S_{s,2^l}(x,g)$ $(l<j)$ не сеточные значения, а усредненные по локальным окрестностям точек $(2\pi k)/2^l$ $(k=\overline{0,2^l-1})$ данные, аппроксимирующие коэффициенты ортогональных проекций g на V_s^l $(s=2,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Meyer Y.** Ondelettes et opérateurs // Actualites Mathematiques. Paris: Herman, 1990. 215 p.
2. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. № 9. P. 319–325.
3. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 41, № 5. С. 17–30.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 283–298.
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
7. **Прудников А.П., Брычков Ю.А.** Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. Т. 1. 748 с.

Субботин Юрий Николаевич
Поступила 15.11.2016
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Meyer Y. *Ondelettes et opérateurs*, Actualites Mathematiques, Paris: Herman, 1990, 215 p.
2. Offin D., Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets. *Constr. Approx.*, 1993, no. 9, pp. 319–325.
3. Subbotin, Yu.N.; Chernykh, N.I. Wavelets in spaces of harmonic functions. *Izv. Math.*, 2000, vol. 64, no. 1, pp. 143–171 (in Russian).
4. Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Harmonic wavelets and asymptotics of Dirichlet problem solution in circle with small perforation. *Matem. Mod.*, 2002, vol. 14, no. 5, pp. 17–30 (in Russian).
5. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Harmonic wavelets in boundary value problems for harmonic and biharmonic functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 142–159.
6. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Interpolating-orthogonal wavelet systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. 107–115.
7. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O. I. Integraly i ryady* (Integrals and Series), vol. 1, 2. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986. 1548 p.

Yu. N. Subbotin, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

N. I. Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru .