ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518.834

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВИЗНЫ ГЛАДКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ[1]

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Получена оценка погрешности аппроксимации кривизны графиков функций класса W^r при $r \geqslant 3$ в равномерной метрике.

Ключевые слова: приближение кривизны, плоские кривые.

Yu. N. Subbotin, S. A. Telyakovskii. Uniform approximation of curvature of smooth planar curves.

We estimate the error of curvature approximation for graphs of functions from the class W^r for $r \geqslant 3$ in the uniform metric.

Keywords: curvature approximation, planar curves.

MSC: 42A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-254-256

В работе [1] изучалась аппроксимация кривизны гладких плоских кривых в среднеквадратической метрике L_2. Настоящая работа посвящена подобным вопросам о приближении в равномерной метрике.

Будем рассматривать кривые, являющиеся графиками 2π-периодических функций f класса W^r, $r \geqslant 3$, т. е. когда для f при всех x и y выполняется оценка

$$|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)| \leqslant |x-y|.$$

В [1] для приближения кривизны графика функции f

$$K(f,x) = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} \tag{1}$$

использовались частные суммы ряда Фурье функции f (использовались также сплайны), которые осуществляют наилучшее приближение в L_2.

В настоящей работе для построения приближающих агрегатов производные f'' и f' в формуле (1) заменяются средними Фавара их рядов Фурье (см., например, [2, § 4.1, п. 3]). Именно если средние Фавара порядка n функции $g(x)$ обозначить $u_n(g,x)$, то приближать кривизну (1) будем функцией

$$U(f,x) := \frac{u_n(f'',x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}. \tag{2}$$

Будет показано, что функции $U(f,x)$ хорошо приближают кривизну $K(f,x)$.

Будем пользоваться тем, что для функций $f(x) \in W^r$ при $r \geqslant 3$ справедливы оценки

$$\left|f''(x) - u_n(f'',x)\right| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-2}}{n^{r-2}}, \tag{3}$$

$$\left|f'(x) - u_n(f',x)\right| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-1}}{n^{r-1}}, \tag{4}$$

[1]Первым автором работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00496).

где $\widetilde{K}_r = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(r+1)s}}{(2s+1)^{r+1}}$ — константы Фавара.

Запишем неравенство

$$|K(f,x)-U(f,x)| = \Big|\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} - \frac{u_n(f'',x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}\Big|$$

$$\leqslant \Big|\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} - \frac{f''(x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}\Big| + \Big|\frac{f''(x)-u_n(f'',x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}\Big|$$

$$\leqslant |f''(x)-u_n(f'',x)| + |f''(x)|\frac{|[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}-[1+(f'(x))^2]^{3/2}|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}} \tag{5}$$

и оценим множитель при $|f''(x)|$ во втором слагаемом из правой части (5).

Для сокращения записи введем обозначения $u := f'(x)$ и $v := u_n(f',x)$. Тогда рассматриваемый множитель при $|f''(x)|$ запишется так

$$\frac{|(1+v^2)^{3/2}-(1+u^2)^{3/2}|}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}} = \frac{|(1+v^2)^3-(1+u^2)^3|}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}[(1+v^2)^{3/2}+(1+u^2)^{3/2}]}$$

$$= |v-u|\frac{|u+v|[(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2]}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}[(1+v^2)^{3/2}+(1+u^2)^{3/2}]}. \tag{6}$$

Лемма. *Максимальное при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ значение функции*

$$J(u,v) := \frac{(u+v)[(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2]}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}[(1+v^2)^{3/2}+(1+u^2)^{3/2}]}$$

не превосходит

$$\frac{9\sqrt{3}}{16} = 0,974\ldots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$J(u,v) = \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}\,\frac{(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2}+(1+v^2)^2(1+u^2)^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}\,\frac{(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2+(1+v^2)^2}$$

$$= \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}\Big[1+\frac{(1+v^2)(1+u^2)}{(1+u^2)^2+(1+v^2)^2}\Big]$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\,\frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

Для завершения доказательства леммы найдем максимальное значение дроби

$$\frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}. \tag{7}$$

В стационарных точках этой дроби выполняются равенства

$$\frac{1-u^2-2uv}{(1+u^2)^2(1+v^2)} = 0, \qquad \frac{1-v^2-2uv}{(1+u^2)(1+v^2)^2} = 0.$$

Отсюда следует, что максимальное значение дробь (7) имеет при $u = v = 1/\sqrt{3}$, и лемма доказана.

Таким образом, из (5) и (6) с помощью оценок (3) и (4) получаем

$$|K(f,x)-U(f,x)| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-2}}{n^{r-2}} + \frac{9\sqrt{3}}{16}|f''(x)|\frac{\widetilde{K}_{r-1}}{n^{r-1}}.$$

Пользуясь тем, что для функций $f \in W^r$ справедлива оценка (см. [3, п. 88])

$$|f''(x)| \leqslant \widetilde{K}_{r-2},$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Для приближения кривизны функций $f \in W^r$, $r \geqslant 3$, справедлива оценка*

$$|K(f,x)-U(f,x)| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-2}}{n^{r-2}}\Big(1 + \frac{9\sqrt{3}}{16\,n}\widetilde{K}_{r-1}\Big).$$

Отметим, что общая размерность подпространств, используемых при построении функций $U(f,x)$, равна $2n-2$, так как тригонометрические полиномы u_n в оценках (3) и (4) имеют порядок $n-1$ и как средние Фавара производных они не имеют свободных членов.

Оценки вида (3) и (4) справедливы также при приближении функций класса W^r, $r \geqslant 3$, сплайнами степени $r-2$ и $r-1$ соответственно с шагом π/n, но, если строить функции вида (2) с помощью таких сплайнов, общая размерность используемых подпространств будет равна $4n+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
2. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
3. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во тех.-теорет. лит-ры, 1947. 323 с.

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 10.10.2016

Теляковский Сергей Александрович д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyAltel@yandex.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Curvature approximation for smooth classes of plane curves by elements of finite-dimensional subspaces. *Izv. Tul'sk. Gos. Univ. Ser. Estestv. Nauki.*, 2012, no. 3, pp. 41–47 (in Russian).
2. Korneichuk N.P. *Tochnye konstanty v teorii priblizheniya* (Exact constants in approximation theory). Cambridge: Cambridge University Press, 1991, Ser. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 38, 452 p.
3. Achieser N.I. Theory of approximation, Reprint of the 1956, New York: Dover Publ., Inc., 1992, 307 p.

Yu. N. Subbotin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

S. A. Telyakovskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: sergeyAltel@yandex.ru .