ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518

КОНСТРУКТИВНЫЕ РАЗРЕЖЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С НЕБОЛЬШОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ[1]

С. А. Стасюк

Получены точные по порядку оценки (в случае приближения в интегральной метрике) для наилучшего m-членного тригонометрического приближения периодических функций с небольшой смешанной гладкостью из классов, близких классам типа Никольского — Бесова. Полученные оценки (при тех же ограничениях на гладкость) отличаются по порядку от соответствующих оценок m-членного тригонометрического приближения классов Бесова смешанной гладкости, установленных А. С. Романюком. Верхняя оценка при этом реализуется конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.

Ключевые слова: нелинейное приближение, разреженное приближение, смешанная гладкость, порядковые оценки.

S. A. Stasyuk. Constructive sparse trigonometric approximations of function classes with small mixed smoothness.

Exact order bounds are obtained for the best m-term trigonometric approximation (in the integral metric) of periodic functions with small mixed smoothness from classes close to Nikol'skii–Besov type classes. The obtained bounds differ (under identical constraints on the smoothness) from the corresponding bounds of the best m-term trigonometric approximation of Besov classes of mixed smoothness established by A.S. Romanyuk. The upper bound is realized by a constructive method based on a greedy algorithm.

Keywords: nonlinear approximation, sparse approximation, mixed smoothness, order bounds.

MSC: 42A10, 42B10, 42B35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-247-253

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с получением точных по порядку оценок наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов функций, которые близки и тесно связаны (хотя и несколько шире в сравнении) с функциональными классами типа Никольского — Бесова смешанной гладкости, для некоторого "точечного" значения показателя гладкости ($r = 1/p$), которое называют *"критической" гладкостью.* Полученная порядковая оценка наилучшего m-членного тригонометрического приближения упомянутых классов является конструктивной, поскольку верхняя оценка реализуется конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме. Кроме того, установленные в работе оценки отличаются по порядку от полученных А. С. Романюком [1] точных по порядку оценок наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов Бесова смешанной гладкости при тех же значениях соответствующих параметров. Отметим, что в работах [1–4] как рассматриваемые здесь классы, так и классы Бесова являются неразличимыми с точки зрения их наилучшего m-членного тригонометрического приближения, иными словами, в ранее рассмотренных в [2–4] ситуациях, как в случае большой гладкости, так и в случае малой гладкости порядковые оценки наилучшего m-членного тригонометрического приближения обоих классов совпадают (более детально об этом еще будет идти речь в комментариях к результатам в разд. 2).

[1]Работа выполнена при частичной поддержке FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p < \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, — пространство функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, 2π-периодических по каждой переменной и суммируемых в степени p на $\mathbb{T}^d$ с нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Для $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ пространство $MB^r_{p,\theta}$ определяется следующим образом (см. [5], случай $\theta = \infty$, и [6], случай $1 \le \theta < \infty$):

$$MB^r_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

где

$$||f||_{MB^r_{p,\theta}} := \Big(\sum_{\mathbf{s}} \big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \big)^\theta \Big)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.2}$$

$$||f||_{MB^r_{p,\infty}} := ||f||_{MH^r_p} := \sup_{\mathbf{s}} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p}{2^{-r||\mathbf{s}||_1}}, \tag{1.3}$$

а $||\mathbf{s}||_1 := s_1 + \cdots + s_d$, $\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := (f * \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})})(\mathbf{x})$, $\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})} := \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := k_1 x_1 + \cdots + k_d x_d$, $\rho(\mathbf{s}) := \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, s_j \in \mathbb{Z}_+, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, d \right\}$ (символом “$*$” обозначена операция свертки двух функций, т. е. $(\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) \, g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$ для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$).

Заметим, что при предельном значении параметра θ, т. е. при $\theta = \infty$, $MB^r_{p,\theta} \equiv MH^r_p$ — пространства С. М. Никольского смешанной гладкости, а при конечном значении параметра θ, т. е. при $1 \le \theta < \infty$, $MB^r_{p,\theta}$ — пространства О. В. Бесова смешанной гладкости.

Единичные шары пространств $MB^r_{p,\theta}$ будем обозначать $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ и называть их *классами*. С историей исследования классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ (с аппроксимативной точки зрения) можно ознакомиться, например, в монографии [7] и обзоре [8].

Наряду с пространствами $MB^r_{p,\theta}$ рассмотрим близкие к ним пространства $MH^r_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r > 0$, которые определяются таким образом:

$$MH^r_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} < \infty \right\}, \tag{1.4}$$

где

$$||f||_{MH^r_{p,\theta}} := \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big)^\theta \Big)^{1/\theta}. \tag{1.5}$$

При $\theta = \infty$ полагаем $MH^r_{p,\infty} \equiv MH^r_p$, а $||f||_{MH^r_{p,\infty}} := ||f||_{MH^r_p}$ (см. (1.3)).

Для определенных выше функциональных пространств, исходя из определений (1.1)–(1.5), выполняются вложения

$$MB^r_{p,\theta} \subset MH^r_{p,\theta} \subset MH^r_p, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.6}$$

$MH^r_{p,\theta_1} \subset MH^r_{p,\theta_2}$, $1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

Через $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ обозначим единичные шары пространств $MH^r_{p,\theta}$, которые будем называть *классами*.

Классы $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ введены В. Н. Темляковым [2]. Вопросы, связанные с нахождением порядковых оценок нелинейного приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, изучались в [2–4; 8; 9] (для наилучшего m-членного приближения по тригонометрической системе) и в [10] (для наилучшего m-членного приближения по тензорной системе Хаара).

Пусть Θ_m — произвольный набор из m точек с целочисловой решетки $\mathbb{Z}^d$. Для

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^m c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{n_k}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C},$$

и $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q, \tag{1.7}$$

которая называется *наилучшим m-членным тригонометрическим приближением* (*наилучшим m-членным приближением по тригонометрической системе*) *функции f в метрике пространства* $L_q(\mathbb{T}^d)$ и является одним из видов разреженного тригонометрического приближения.

Для функционального класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ положим

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f\in F} \sigma_m(f)_q. \tag{1.8}$$

Детальнее с историей исследования величин (1.7) и (1.8) можно ознакомиться, например, из монографии [7], обзора [8] и работ [2; 11].

Заметим, что для двух положительных величин A и B запись $A \asymp B$ означает, что существует положительная величина C такая, что $C^{-1}A \le B \le CA$. В случае $B \ge C^{-1}A$ или $B \le CA$ будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Для величин C_j, $j \in \mathbb{N}$, которые будут встречаться в работе явным или неявным образом, существенным является то, что они не зависят от одного обозначенного контекстом параметра.

В завершение этого раздела приведем определение еще одного функционального класса.

Для $f \in L_1$ положим

$$f_j := \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \delta_{\mathbf{s}}(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

и рассмотрим класс функций

$$\mathbf{MW}^{r,b}_p := \{f\colon ||f||_{MW^{r,b}_p} \le 1\},$$

где

$$||f||_{MW^{r,b}_p} := \sup_j ||f_j||_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)b}, \tag{1.9}$$

$$MW^{r,b}_p := \{f \in L_p(\mathbb{T}^d)\colon ||f||_{MW^{r,b}_p} < \infty\},$$

а $r > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\bar{j} := \max\{1; j\}$.

Для $r > 0$, $1 < p \le 2$, $p \le \theta \le \infty$ имеет место вложение

$$MH^r_{p,\theta} \subset MW^{r,1/p-1/\theta}_p, \tag{1.10}$$

доказательство которого содержится в завершающем разделе и предваряет доказательство основного результата, базирующегося на использовании (1.10) и теоремы A.

Для классов $\mathbf{MW}^{r,b}_p$ В. Н. Темляковым [3] установлено следующее утверждение.

Теорема A [3, Theorem 3.5]. *Пусть $1 < p \le 2 < q < \infty$ и $r = 1/p$. Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MW}^{r,b}_p)_q \asymp m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)(b+1-1/p)+1}.$$

Оценка сверху обеспечивается конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.

2. Основные результаты и комментарии к ним

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $p \le \theta \le \infty$ *и* $r = 1/p$. *Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}. \tag{2.1}$$

Оценка сверху обеспечивается конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.

В завершение сформулированного результата приведем некоторые комментарии.

З а м е ч а н и е 1. Точные по порядку оценки величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ при $1 < p \le 2 < q < \infty$ установлены в [2–4]. А именно, в [2] рассмотрен случай $r > 1/p$, $1 \le \theta \le \infty$, в [3] — $1/p - 1/q < r < 1/p$, $\theta = \infty$, а в [4] — $\max\{1/p - 1/q; 1/p - q'/(q\theta')\} < r < 1/p$, $1 < \theta < \infty$ и $1/p - 1/q < r < 1/p$, $1 \le \theta < q$, где $a\colon 1/a + 1/a' = 1$. Поэтому данная теорема дополняет результаты работ [2–4] (см. также [8]), касающиеся точных по порядку оценок величин $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, которые совпадают по порядку с оценками величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, установленными А. С. Романюком [1]. В упомянутых работах [2; 3] оценки сверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ обеспечиваются конструктивными методами, основанными на жадных алгоритмах.

З а м е ч а н и е 2. Еще одной отличительной особенностью результата теоремы 1 в сравнении с результатами работ [2–4] является то, что точные по порядку оценки $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ хуже (за исключением лишь случая, когда $\theta = \infty$, т. е. $\mathbf{MH}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MB}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p$), чем $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (см. [1, теорема 2.1]), а именно, при условиях теоремы 1 имеет место оценка

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{1/\theta}\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

З а м е ч а н и е 3. По-видимому, впервые различие в точных по порядку оценках величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (см. [1, теорема 3.1]) и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ (см. [9, теорема 6.1]) обнаружено Д. Б. Базархановым [9], в частности, при рассмотрении им случая $1 < p \le q \le 2$, $1 \le \theta < q$, $r = 1/p - 2/q + 1/\theta$ имеем

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log\log m)^{1/\theta}\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

3. Доказательство результатов

3.1. Доказательство вложения $MH^r_{p,\theta} \subset MW^{r,1/p-1/\theta}_p$ при $r > 0$, $1 < p \le 2$, $p \le \theta \le \infty$

Рассмотрим последовательно случаи $\theta = p$, $\theta = \infty$, $p < \theta < \infty$.

При $\theta = p$ согласно (1.9), следствию к теореме Литтлвуда — Пэли, которое выражается соотношением

$$\Big\| \sum_{\mathbf{s}} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \ll \Big(\sum_{\mathbf{s}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^p \Big)^{1/p}, \quad 1 < p \le 2, \tag{3.1}$$

и (1.5) имеем

$$||f||_{MW^{r,0}_p} = \sup_j \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \cdot 2^{rj} \ll \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\big)^p \Big)^{1/p} = ||f||_{MH^r_{p,p}}, \tag{3.2}$$

откуда видим, что $MH^r_{p,p} \subset MW^{r,0}_p$.

Вследствие (1.9), (3.1), (1.5) и

$$\sum_{||s||_1=j} 1 \asymp j^{\,d-1} \tag{3.3}$$

при $\theta=\infty$ получаем

$$||f||_{MW_p^{r,1/p}} = \sup_j \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)/p} \ll \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \big(2^{r||\mathbf{s}||_1} \, ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\big)^p \Big)^{1/p} \cdot (\bar{j})^{-(d-1)/p}$$

$$\le \sup_{j:||\mathbf{s}||_1=j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} \, ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\Big) \cdot \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1\Big)^{1/p} (\bar{j})^{-(d-1)/p} \ll ||f||_{MH_p^r}, \tag{3.4}$$

откуда делаем вывод о том, что $MH_p^r \equiv MH_{p,\infty}^r \subset MW_p^{r,1/p}$.

Для $p<\theta<\infty$, учитывая (1.9), (3.1), неравенство Гельдера, а также (3.3), (1.5), выводим

$$||f||_{MW_p^{r,1/p-1/\theta}} = \sup_j \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)(1/p-1/\theta)}$$

$$\ll \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} \, ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\Big)^p \Big)^{1/p} \cdot (\bar{j})^{-(d-1)(1/p-1/\theta)}$$

$$\le \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} \, ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\Big)^\theta \Big)^{1/\theta} \cdot \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1\Big)^{1/p-1/\theta} (\bar{j})^{-(d-1)(1/p-1/\theta)} \ll ||f||_{MH_{p,\theta}^r}, \tag{3.5}$$

что указывает на справедливость вложения (1.10) для $p<\theta<\infty$.

Ввиду (3.2), (3.4), (3.5) делаем вывод о том, что вложение (1.10) доказано.

3.2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 в части, прежде всего, установления для (2.1) *оценки сверху* базируется на использовании доказанного выше вложения (1.10) и теоремы А.

Теперь перейдем к установлению в (2.1) *оценки снизу*. Для заданного m выберем N и n из соотношений

$$2^N \asymp m^{q/2} (\log m)^{(d-1)(1-q)} \tag{3.6}$$

и

$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{3.7}$$

соответственно.

Рассмотрим функцию $g(x) := C_1 N^{-(d-1)/\theta} \sum\limits_{n<j\le N} 2^{-j} \sum\limits_{||\mathbf{s}||_1=j} \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}(\mathbf{x})$. Покажем, что $g \in \mathbf{MH}_{p,\theta}^r$ для $1\le\theta\le\infty$.

Поскольку

$$||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p \asymp 2^{||s||_1(1-1/p)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.8}$$

то, согласно (3.3), для $1\le\theta<\infty$ имеем

$$||g||_{MH_{p,\theta}^{1/p}} = \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \big(2^{||\mathbf{s}||_1/p} ||\delta_{\mathbf{s}}(g)||_p\big)^\theta \Big)^{1/\theta}$$

$$= C_1 N^{-(d-1)/\theta} \sup_{j:\,n<j\le N} \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \big(2^{-||\mathbf{s}||_1(1-1/p)} ||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p\big)^\theta \Big)^{1/\theta}$$

$$\asymp N^{-(d-1)/\theta} \sup_{j:\,n<j\le N} \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1\Big)^{1/\theta} \asymp N^{-(d-1)/\theta} \sup_{j:\,n<j\le N} j^{(d-1)/\theta} = 1.$$

Если же $\theta = \infty$, то, принимая во внимание (3.8), получаем

$$||g||_{MH_p^{1/p}} \ll \sup_{\mathbf{s}:\, n<||\mathbf{s}||_1 \le N} 2^{-||\mathbf{s}||_1(1-1/p)} ||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p \asymp 1.$$

Далее, возьмем произвольное множество K_m, состоящее из m гармоник $\mathbf{k}$. Рассмотрим дополнительную функцию $h(\mathbf{x}) := \sum\limits_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, где

$$\Delta(n,N) := \bigcup_{\mathbf{s}:\, n<||\mathbf{s}||_1 \le N} \rho(\mathbf{s}). \tag{3.9}$$

Для произвольного тригонометрического полинома t с гармониками из K_m, с одной стороны, имеем

$$\langle g - t, h\rangle \le ||g-t||_q \cdot ||h||_{q'}. \tag{3.10}$$

Но в то же время, с другой стороны,

$$\langle g - t, h\rangle = \langle g, h\rangle = \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}). \tag{3.11}$$

Принимая во внимание (3.6), (3.7), (3.9), имеем

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}) \gg (N-n)N^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{3.12}$$

Далее, учитывая (3.6), (3.7), (3.9), получаем

$$||h||_{q'} \le \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Big\|_{q'} + \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\cap K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Big\|_{q'}$$

$$\ll 2^{N(1-1/q')}N^{(d-1)/q'} + \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Big\|_2 \ll 2^{N/q}N^{(d-1)/q'} + m^{1/2} \asymp m^{1/2}. \tag{3.13}$$

Исходя из (3.10)–(3.13), (3.6), (3.7), получаем

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^{1/p}_{p,\theta})_q \ge \sigma_m(g)_q \gg (N-n)N^{(d-1)(1-1/\theta)}m^{-1/2} \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}.$$

Нижняя оценка в (2.1) установлена.

Теорема 1 доказана.

В завершение автор выражает искреннюю признательность рецензенту за сделанные им замечания, способствовавшие улучшению изложения материала. Результаты данной работы были получены во время пребывания в Centre de Recerca Matemàtica (г. Барселона, Испания) в рамках научно-исследовательской программы по конструктивной теории приближений и гармоническому анализу. Также автор выражает огромную благодарность проф. В. Н. Темлякову за обсуждение изложенных здесь результатов во время научно-исследовательской программы по конструктивной теории приближений и гармоническому анализу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романюк А.С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.
2. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160.

3. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness [e-resource]. 2015. URL: https://arxiv.org/pdf/1503.00282v1.pdf . 30 p.
4. **Стасюк С.А.** Найкраще m-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 7. С. 983–1003.
5. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 3–113.
6. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
7. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Інституту математики НАН України. Київ, 2012. Vol. 92. 353 с.
8. **D. Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation [e-resource]. 2016. URL: https://arxiv.org/pdf/1601.03978v1.pdf . 154 p.
9. **Базарханов Д.Б.** Нелинейные тригонометрические пиближения классов функций многих переменных // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 8–42.
10. **Стасюк С.А.** Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 251–260.
11. **Stasyuk S.A.** Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 177. P. 1–16.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 24.08.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Romanyuk A.S. Best M-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 265–302.
2. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Math. Sb.* 2015, vol. 206, no. 11, pp. 1628–1656.
3. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *arXiv.org*, 2015, available at: URL: https://arxiv.org/pdf/1503.00282v1.pdf , 30 p.
4. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximations of periodic functions with low mixed smoothness from the classes of Nikol'skii–Besov type. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 2016, vol. 68, no. 7, pp. 983–1003 (in Ukrainian).
5. Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
6. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
7. Romanyuk A.S. The approximation characteristics of classes of periodic functions of many variables. *Proc. Inst. Math. NASU.* Kiev, 2012, vol. 92 (in Russian).
8. Dũng D., Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation. *arXiv.org*, 2016, available at: https://arxiv.org/pdf/1601.03978v1.pdf ., 154 p.
9. Bazarkhanov D.B. Nonlinear trigonometric approximations of multivariate function classes. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 2–36.
10. Stasyuk S.A. Approximation of certain smoothness classes of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 251–260 (in Russian).
11. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness. *J. Approx. Theory.*, 2014, vol. 177, pp. 1–16.

S. A. Stasyuk, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 01601, Ukraine, e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua .