ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

СПЛАЙНЫ ПО ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Для непрерывных функций построены четырехточечные рациональные интерполянты и по ним — интерполяционные рациональные сплайны. Получены оценки скорости сходимости таких сплайнов и их производных для непрерывных функций, непрерывно дифференцируемых функций и их производных по второй порядок включительно.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

A.-R. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Splines for four-point rational interpolants.

For continuous functions, we construct four-point rational interpolants and, for them, rational interpolation splines. For continuous functions, continuously differentiable functions, and their derivatives up to the second order, we obtain convergence bounds for such splines and their derivatives.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-233-246

Введение

Полиномиальные сплайны различных видов, в частности, интерполяционные сплайны, вопросы их сходимости исследованы в завершенной форме в трудах многих авторов; изучены также аппроксимативные свойства рациональных сплайнов специального вида при различных ограничениях на функции (монотонность, сохранение знака, выпуклость) (см., например, Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш [1]; С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин [2;3]; Н. П. Корнейчук [4]; А. Эдео, Г. Гофе, Т. Тефера [5] и цитируемые в них источники).

Следуя Ю. Н. Субботину [6], интерполяционные сплайны называют *безусловно сходящимися к данной функции*, если для любой последовательности сеток с диаметром, стремящимся к нулю, соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов равномерно сходится к этой функции. По аналогии определяется безусловная сходимость для производных сплайнов.

Известно [1;2], что для производной $f^{(k)}(x)$ каждой функции из класса $C^{(k)}[a,b]$ при $k=1,2$ имеет место безусловная сходимость соответствующих производных интерполяционных параболических и кубических сплайнов. При этом, как показали С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин [2] и Ал. А. Привалов [7], для самой непрерывной функции имеет место безусловная сходимость интерполяционных параболических (кубических) сплайнов тогда и только тогда, когда функция принадлежит классу Lip 1.

Пусть $f\in C[a,b]$ и задана сетка узлов $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 1)$. Для каждой пары узлов $x_{k-1}<x_k$ $(k=1,2,\dots,N)$ возьмем двуточечный рациональный интерполянт — функцию вида $q_k(x)=a_k+A_k/(x-u_k)$ с $u_k=x_k+H$ $(H>b-a)$ такую, что $q_k(x_j)=f(x_j)$ при $j=k-1,k$. Тогда легко показать, что для непрерывной на $[a,b]$ кусочно-рациональной функции $Q_N(x)$ с $Q_N(x)=q_k(x)$ при $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,N)$ выполняется неравенство

$$|Q_N(x)-f(x)|\leqslant\omega(\|\Delta\|,f)\quad(x\in[a,b]).$$

Здесь и всюду ниже обозначены диаметр сетки узлов $\|\Delta\| = \max\{x_j - x_{j-1} : j = 1, 2, \ldots, N\}$ и модуль непрерывности функции

$$\omega(\delta, f) = \sup\big\{|f(x) - f(y)| \colon |x - y| \leqslant \delta; x, y \in [a, b]\big\} \quad (\delta \geqslant 0).$$

Можно получить также (см. [8]) оценки скорости сходимости сплайнов $Q_N(x)$ и производных $Q'_N(x)$ для $f \in C^{(1)}[a, b]$.

В [9] для $f \in C[a, b]$ и сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ построены сплайны с помощью трехточечных интерполянтов — рациональных функций вида

$$R_k(x) = \alpha_k + \beta_k(x - x_k) + \frac{\gamma_k}{x - g_k},$$

определяемых тройками узлов $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ и полюсами $g_k \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]$. Показано, что такие сплайны обладают свойством безусловной сходимости для всех функций класса $C[a, b]$, а производные этих сплайнов — для производной каждой функции класса $C^{(1)}[a, b]$.

В данной работе построены интерполяционные рациональные сплайны на базе четырехточечных рациональных интерполянтов и получены оценки скорости сходимости этих сплайнов и их производных по второй порядок включительно. Как видно из этих оценок, скорость сходимости этих сплайнов на соответствующих классах в целом аналогична скорости сходимости кубических и параболических сплайнов. Основные результаты работы анонсированы в [8].

1. Четырехточечные рациональные интерполянты

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на котором задана некоторая сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$.

Тогда для любой четверки узлов $x_{k-2} < x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ $(k = 2, 3, \ldots, N - 1)$ существует непрерывная на отрезке $[x_{k-2}, x_{k+1}]$ рациональная функция вида

$$r_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{A_k}{x - u_k} \tag{1.1}$$

такая, что $r_k(x_j) = f(x_j)$ $(j = k-2, k-1, k, k+1)$ (полюс u_k определяется только узлами x_j, $j = k-2, k-1, k, k+1$), а коэффициенты для одной и той же четверки узлов могут иметь разные выражения через разделенные разности функции $f(x)$ в этих узлах; как обычно, через $f(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2, t_3)$ и $f(t_1, t_2, t_3, t_4)$ обозначены разделенные разности соответственно первого, второго и третьего порядков функции $f(x)$ в узлах $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [a, b]$.

В частности, выполняются равенства

$$\begin{aligned} &A_k = -f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \prod_{j=-2}^{1} (x_{k+j} - u_k), \quad a_k = f(x_k) - \frac{A_k}{x_k - u_k}, \\ &c_k = f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) - \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)(x_{k+1} - u_k)}, \\ &b_k = f(x_{k-1}, x_{k+1}) - c_k(x_{k+1} - x_k) + \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Коэффициенты c_k и b_k могут быть записаны также в виде

$$\begin{aligned} &c_k = f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) - \frac{A_k}{(x_{k-2} - u_k)(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}, \\ &b_k = f(x_{k-2}, x_k) + c_k(x_{k-1} - x_{k-2}) + \frac{A_k}{(x_{k-2} - u_k)(x_k - u_k)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ради краткости всюду ниже будем пользоваться обозначениями

$$h_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, N);$$

$$\alpha_k = \min\{h_{k-1}, h_k, h_{k+1}\}, \quad \beta_k = \max\{h_{k-1}, h_k, h_{k+1}\} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1);$$

$$g_k = \begin{cases} \max\{h_{k-1}, h_k\}, \text{ если } h_{k-1} < h_{k+1}, \\ \max\{h_k, h_{k+1}\}, \text{ если } h_{k+1} \leqslant h_{k-1}. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на котором задана сетка $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, и пусть для данного k $(k = 2, 3, \dots, N-1)$ рациональная функция $r_k(x)$ из равенства* (1.1) *с коэффициентами* (1.2) *имеет полюс $u_k = x_{k-2} - g_k$, если $h_{k-1} < h_{k+1}$, и полюс $u_k = x_{k+1} + g_k$, если $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$.*

Тогда при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant 38\, \frac{\beta_k}{\alpha_k}\, \omega(\beta_k, f).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала при данном k $(k = 2, 3, \dots, N-1)$ выполняется неравенство $h_{k-1} < h_{k+1}$ и $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$.

Рассмотрим рациональную функцию $r_k(x)$, определенную равенством (1.1) с $u_k = x_{k-2} - g_k$ и коэффициентами (1.2). Тогда

$$r_k(x) - f(x) = (f(x_k) - f(x)) + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{A_k(x_k - x)}{(x - u_k)(x_k - u_k)}. \tag{1.4}$$

Очевидно, $|f(x_k) - f(x)| \leqslant \omega\left(|x_k - x|, f\right) \leqslant 2\omega\left(\beta_k, f\right)$.

Оценим последовательно каждое из трех остальных слагаемых правой части (1.4):

$$|b_k(x - x_k)| \leqslant \Big(|f(x_{k-1}, x_{k+1})| + |c_k|(x_{k+1} - x_k) + \frac{|A_k|}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}\Big)|x - x_k|$$

$$\leqslant \big[\, |f(x_{k-1}, x_{k+1})| + |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k)$$

$$+ |f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})| \left((x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - x_k) + (x_{k-2} - u_k)(x_k - u_k)\right) \big]\, |x - x_k|$$

$$= \big[\, |f(x_{k-1}, x_{k+1})| + |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k)$$

$$+ |f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)\big]\, |x - x_k|.$$

Выразив разделенные разности через приращения функции, получим

$$|b_k(x - x_k)|$$

$$\leqslant \Big(|f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(x_{k-1})|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\Big)\frac{|x - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}}$$

$$+ \Big(|f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})|\frac{1}{x_{k-1} - x_{k-2}} + |f(x_k) - f(x_{k-1})|\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\Big)\frac{D_k}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$+ \Big(|f(x_k) - f(x_{k-1})|\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\frac{1}{x_{k+1} - x_k}\Big)\frac{D_k}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}.$$

Здесь обозначено $D_k = (x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)|x - x_k|$.

Ясно, что $|x - x_k| \leqslant \max\{x_{k+1} - x_k, x_k - x_{k-2}\}$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$, поэтому с учетом $h_{k-1} < h_{k+1}$ имеем $|x - x_k| \leqslant x_{k+1} - x_{k-1}$.

Оценив приращения функций через $\omega(\beta_k, f)$, получим

$$|b_k(x - x_k)| \leqslant \omega(\beta_k, f)\Big(3 + \frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)$$

$$+ \omega(\beta_k, f)\Big(\frac{|x - x_k|}{x_{k-1} - x_{k-2}} + \frac{|x - x_k|}{x_k - x_{k-1}}\Big)\frac{g_k}{x_k - x_{k-2}}\,\frac{x_{k+1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}}$$

$$+\,\omega(\beta_k,f)\Big(\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}}+\frac{g_k}{x_{k+1}-x_k}\Big)\frac{|x-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-1}}\,\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}$$

$$\leqslant \omega(\beta_k,f)\Big[\Big(3+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)+\Big(1+\frac{\beta_k}{\alpha_k}+1+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\cdot 1\cdot 2+\Big(\frac{\beta_k}{\alpha_k}+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\cdot 1\cdot 2\Big]$$

$$=\Big(7+9\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\omega(\beta_k,f).$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$|b_k(x-x_k)|\leqslant 16\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k,f). \tag{1.5}$$

Оценим $c_k(x-x_{k-1})(x-x_k)$. Величину $|(x-x_{k-1})(x-x_k)|$ оценим сверху при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ через

$$E_k=\max\Big\{h_{k-1}(h_k+h_{k-1}),h_{k+1}(h_{k+1}+h_k),\frac{1}{4}h_k^2\Big\}$$

и учтем, что $x_{k-2}-u_k=g_k=\max\{h_{k-1},h_k\}$, $h_{k-1}<h_{k+1}$.

Тогда, выразив разделенные разности через приращения функции, а эти приращения оценив через $\omega(\beta_k,f)$, получим

$$|c_k(x-x_{k-1})(x-x_k)|\leqslant|f(x_{k-1},x_k,x_{k+1})|E_k+|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|g_kE_k$$

$$\leqslant\omega(\beta_k,f)\Big(\frac{E_k}{(x-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}+\frac{E_k}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}$$

$$+\frac{g_kE_k}{(x_{k+1}-x_{k-2})(x_{k-1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})}+\frac{g_kE_k}{(x_{k+1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}\Big).$$

Здесь

$$\frac{E_k}{(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}\leqslant\max\Big\{\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{x_k-x_{k-1}},\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}},1\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k},$$

$$\frac{E_k}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}\leqslant\max\Big\{\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{x_{k+1}-x_k},1,\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_k}\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k},$$

$$\frac{g_kE_k}{(x_{k-1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-2})}$$

$$\leqslant\max\Big\{\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}},\frac{g_k(x_{k+1}-x_k)}{(x_{k-1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})},\frac{g_k}{x_{k-1}-x_{k-2}}\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k},$$

$$\frac{g_kE_k}{(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-2})}\leqslant\max\Big\{\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}},\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}},\frac{g_k}{x_{k+1}-x_k}\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k}.$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ получим

$$|c_k(x-x_{k-1})(x-x_k)|\leqslant 4\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k,f). \tag{1.6}$$

Для оценки третьего слагаемого правой части (1.4) заметим, что при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем

$$\Big|\frac{x-x_k}{x-u_k}\Big|\leqslant\frac{x_k-x_{k-2}}{x_{k-2}-u_k}.$$

Поэтому, для краткости обозначив $F_k=(x_k-x_{k-2})(x_{k-1}-u_k)(x_{k+1}-u_k)$, выразив разделенную разность через приращения функций и оценив приращения функций через $\omega(\beta_k,f)$, получим

$$\Big|\frac{A_k(x_k-x)}{(x-u_k)(x_k-u_k)}\Big|\leqslant|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|(x_k-x_{k-2})(x_{k-1}-u_k)(x_{k+1}-u_k)$$

$$\leqslant \omega(\beta_k, f)\frac{F_k}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})}\Big(\frac{1}{x_{k-1} - x_{k-2}} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\Big)$$
$$+ \omega(\beta_k, f)\frac{F_k}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}\Big(\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1} - x_k}\Big)$$
$$\leqslant \omega(\beta_k, f)\Big[2\Big(1 + \frac{g_k}{x_{k-1} - x_{k-2}}\Big) + 2\frac{x_{k-1} - x_{k-2} + g_k}{x_k - x_{k-1}}$$
$$+ 2\frac{(x_k - x_{k-2})(x_{k-1} - x_{k-2} + g_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})} + 2\frac{x_{k-1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_k}\Big]$$
$$\leqslant \omega(\beta_k, f)\Big(2 + 2\frac{\beta_k}{\alpha_k} + 4\frac{\beta_k}{\alpha_k} + 4\frac{\beta_k}{\alpha_k} + 2 + 2\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big) = \Big(4 + 12\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\omega(\beta_k, f).$$

Отсюда при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ имеем

$$\Big|\frac{A_k(x_k - x)}{(x - u_k)(x_k - u_k)}\Big| \leqslant 16\frac{\beta_k}{\alpha_k}\omega(\beta_k, f). \tag{1.7}$$

Значит, если при данном значении k ($k = 2, 3, \dots, N - 1$) выполняется неравенство $h_{k-1} < h_{k+1}$, то при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ ($k = 2, 3, \dots, N-1$) с использованием (1.4)–(1.7) для рациональной функции $r_k(x)$ из (1.1) с коэффициентами (1.2) получим

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant 38\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k, f). \tag{1.8}$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда при данном значении k ($k = 2, 3, \dots, N - 1$) выполняется неравенство $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$, $g_k = \max\{h_k, h_{k+1}\}$. Положим $u_k = x_{k+1} + g_k$ и с этим значением u_k при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ рассмотрим рациональную функцию $r_k(x)$ из (1.1), в которой коэффициенты A_k и a_k берутся по формулам (1.2), а коэффициенты b_k и c_k — по формулам (1.3).

Для оценки разности $r_k(x) - f(x)$ воспользуемся ее представлением в виде (1.4) и оценим каждое из четырех слагаемых правой части (1.4) в отдельности. Тогда по аналогии с предыдущим случаем получим, что во втором случае также выполняется неравенство (1.8).

Лемма 1.1 доказана.

В нижеследующих двух леммах считаем, что для данной произвольной сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ при данном k ($k = 2, 3, \dots, N - 1$) рациональная функция $r_k(x)$ из равенства (1.1) с коэффициентами (1.2) имеет полюс $u_k = x_{k-2} - g_k$, если $h_{k-1} < h_{k+1}$, и полюс $u_k = x_{k+1} + g_k$, если $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$.

Лемма 1.2. *Если $f \in C^{(1)}[a, b]$ и дана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), то для любого $k = 2, 3, \dots, N - 1$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ выполняются неравенства*

$$|r'_k(x) - f'(x)| \leqslant 57\,\omega(\beta_k, f'), \tag{1.9}$$

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{57}{2}\,h\,\omega(\beta_k, f'), \tag{1.10}$$

где $h = h_j$, если $x \in [x_{j-1}, x_j]$ для данного $j = k - 1, k, k + 1$.

Лемма 1.3. *Если $f \in C^{(2)}[a, b]$ и дана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), то для любого $k = 2, 3, \dots, N - 1$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ выполняются неравенства*

$$|r''_k(x) - f''(x)| \leqslant 39\,\omega(\beta_k, f''), \tag{1.11}$$

$$|r'_k(x) - f'(x)| \leqslant 39\,h\,\omega(\beta_k, f''), \tag{1.12}$$

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{39}{2}\,h^2\,\omega(\beta_k, f''), \tag{1.13}$$

где $h = h_j$, если $x \in [x_{j-1}, x_j]$ для данного $j = k - 1, k, k + 1$.

Доказательство леммы 1.2. Пусть сначала $h_{k-1} < h_{k+1}$. Положим $g_k = \max\{h_{k-1}, h_k\}$, $u_k = x_{k-2} - g_k$. Рассмотрим рациональную функцию (1.1) с коэффициентами (1.2). В правую часть разности

$$r_k'(x) - f'(x) = (b_k - f'(x)) + c_k(2x - x_{k-1} - x_k) - \frac{A_k}{(x-u_k)^2} \tag{1.14}$$

подставим значения b_k, c_k и A_k из (1.2) и оценим ее слагаемые при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$, переходя к разделенным разностям второго порядка и от них к производным.

Для первого слагаемого получим

$$|b_k - f'(x)| = \left| f(x_{k-1}, x_{k+1}) - f'(x) - c_k(x_{k+1} - x_k) + \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)} \right|$$

$$\leqslant |f(x_{k-1}, x_{k+1}) - f'(x)| + |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k)$$

$$+ |f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)$$

$$\leqslant \omega(2\|\Delta\|, f') + |f(x_{k-1}, x_{k+1}) - f(x_{k-1}, x_k)| + |f(x_{k-2}, x_{k-1}) - f(x_{k-1}, x_k)| \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$+ |f(x_{k-1}, x_k) - f(x_k, x_{k+1})| \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$\leqslant \omega(3\beta_k, f') + \omega(2\beta_k, f') \left(1 + \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})} + \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})} \right).$$

Используя также оценки

$$\frac{x_{k-2} - u_k}{x_k - x_{k-2}} = \frac{g_k}{x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2}} \leqslant 1, \quad \frac{x_{k-2} - u_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{g_k}{x_{k+1} - x_k + x_k - x_{k-1}} \leqslant 1,$$

$$\frac{x_{k+1} - u_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} = \frac{x_{k+1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} \leqslant 2,$$

при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ имеем

$$|b_k - f'(x)| \leqslant \omega(3\,\beta_k, f') + 5\,\omega(2\beta_k, f') \leqslant 13\,\omega(\beta_k, f'). \tag{1.15}$$

Оценим второе слагаемое $c_k(2x - x_{k-1} - x_k)$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$. Ясно, что

$$|2x - x_{k-1} - x_k| \leqslant \max\{|2x_{k-2} - x_{k-1} - x_k|, |2x_{k+1} - x_{k-1} - x_k|\},$$

при этом

$$\frac{|2x_{k-2} - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} \leqslant 2\frac{x_k - x_{k-2}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = 2\frac{(x_k - x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_{k-2})}{x_{k+1} - x_{k-1}}$$

$$< 2\frac{(x_k - x_{k-1}) + (x_{k+1} - x_k)}{x_{k+1} - x_{k-1}} = 2,$$

$$\frac{|2x_{k+1} - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2.$$

Поэтому при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ получим

$$\frac{|2x - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-2}} \leqslant \frac{|2x - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2.$$

Используя, в частности, эти неравенства и равенство $x_{k-2} - u_k = g_k$, имеем

$$|c_k(2x - x_{k-1} - x_k)| \leqslant |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})(2x - x_{k-1} - x_k)|$$

$$+\,|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})(x_{k-2}-u_k)(2x-x_{k-1}-x_k)|$$
$$\leqslant |f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-1}}$$
$$+\,|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{(x_{k-2}-u_k)(2x-x_{k-1}-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-2})(x_{k+1}-x_{k-1})}$$
$$+\,|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{(x_{k-2}-u_k)|2x-x_{k-1}-x_k}{(x_k-x_{k-2})(x_{k+1}-x_{k-2})}\leqslant 6\,\omega(2\beta_k,f'),$$

а значит,

$$|c_k(2x-x_{k-1}-x_k)|\leqslant 12\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.16}$$

Оценим третье слагаемое при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$:

$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1}|\frac{(x_{k-2}-u_k)(x_{k-1}-u_k)(x_k-u_k)(x_{k+1}-u_k)}{(x_{k-2}-u_k)^2}$$
$$\leqslant \left(|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{x_k-u_k}{x_k-x_{k-2}}+|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{x_k-u_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right)A.$$

Здесь

$$A=\frac{x_{k-1}-u_k}{x_{k-2}-u_k}\,\frac{x_{k+1}-u_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}=\frac{x_{k-1}-x_{k-2}+g_k}{g_k}\,\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}<4,$$
$$\frac{x_k-u_k}{x_k-x_{k-2}}=\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{x_k-x_{k-2}}<2,$$
$$\frac{x_k-u_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{(x_{k+1}-x_k)+(x_k-x_{k-1})}<\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{(x_{k-1}-x_{k-2})+(x_k-x_{k-1})}<2.$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем

$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant 16\,\omega(2\beta_k,f')\leqslant 32\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.17}$$

Из (1.13)–(1.17) при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ в случае $h_{k-1}<h_{k+1}$ получим требуемое неравенство (1.9).

Рассмотрим теперь другой возможный случай для двух отрезков $[x_{k-2},x_{k-1}]$ и $[x_k,x_{k+1}]$, соседних с $[x_{k-1},x_k]$ при данном k ($k=2,3,\dots,N-1$), а именно, пусть $h_{k+1}\leqslant h_{k-1}$.

В этом случае положим $g_k=\max\{h_k,h_{k+1}\}$, $u_k=x_{k+1}+g_k$ и возьмем рациональную функцию (1.1), но для коэффициентов c_k и b_k возьмем их выражения по формулам (1.3). В правую часть (1.14) подставим значения b_k, c_k и значение A_k из (1.2) и оценим, как и выше, отдельно ее слагаемые при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$.

Оценим первое слагаемое:

$$|b_k-f'(x)|=\left|f(x_{k-2},x_k)-f'(x)+c_k(x_{k-1}-x_{k-2})-\frac{A_k}{(x_{k-2}-u_k)(x_k-u_k)}\right|$$
$$\leqslant |f(x_{k-2},x_k)-f'(x)|+|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k)|(x_{k-1}-x_{k-2})$$
$$+\,|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|(u_k-x_{k-2})(u_k-x_{k+1}).$$

Далее по аналогии с вышеприведенным случаем получим

$$|b_k-f'(x)|\leqslant 13\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.18}$$

Оценим второе слагаемое при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ в случае $x_{k+1}-x_k\leqslant x_{k-1}-x_{k-2}$:

$$|c_k(2x-x_{k-1}-x_{k-2})|\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1},x_k)(2x-x_{k-1}-x_k)|$$

$$+|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})(x_{k+1}-u_k)(2x-x_{k-1}-x_k)|$$
$$\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_k-x_{k-2}}$$
$$+\left(|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{u_k-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}+|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{u_k-x_{k+1}}{x_k-x_{k-2}}\right)$$
$$\times\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-2}}\leqslant 2\omega(2\beta_k,f')+(\omega(2\beta_k,f')+2\omega(2\beta_k,f'));$$

неравенства
$$\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_k-x_{k-2}}\leqslant 2,\quad \frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-2}}\leqslant 2$$
при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ получаются по аналогии с неравенствами при оценке (1.16). Значит, как и выше, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем
$$|c_k(2x-x_{k-1}-x_k)|\leqslant 12\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.19}$$

Для оценки третьего слагаемого при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ заметим, что
$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|\frac{(u_k-x_{k-2})(u_k-x_{k-1})(u_k-x_k)}{u_k-x_{k+1}}$$
$$\leqslant\left(|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{u_k-x_{k-1}}{x_k-x_{k-2}}+|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{u_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right)B;$$
здесь
$$B:=\frac{u_k-x_{k-2}}{x_{k+1}-x_{k-2}}\,\frac{u_k-x_k}{u_k-x_{k+1}}=\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}\,\frac{x_{k+1}-x_k+g_k}{g_k}\leqslant 4,$$
$$\frac{u_k-x_{k-1}}{x_k-x_{k-2}}=\frac{x_{k+1}-x_{k-1}+g_k}{x_k-x_{k-2}}\leqslant 2,\quad \frac{u_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}=\frac{x_{k+1}-x_{k-1}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\leqslant 2.$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем
$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant 16\,\omega(2\beta_k,f')\leqslant 32\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.20}$$

Из (1.14) и (1.18)–(1.20) при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ в случае $h_{k+1}\leqslant h_{k-1}$ также получим требуемое неравенство (1.9).

Докажем неравенство (1.10). Пусть $x\in[x_{j-1},x_j]$ для данного $j=k-1,k,k+1$, и через t обозначим один из двух концов x_{j-1} и x_j, ближний к точке x.

По построению рациональная функция $r_k(x)$ из (1.1) интерполирует функцию $f(x)$ в точке t, а значит, в силу $f\in C^{(1)}[a,b]$ между точками x и t найдется точка ξ такая, что
$$|r_k(x)-f(x)|=|r_k(x)-f(x)-r_k(t)+f(t)|=|r_k'(\xi)-f'(\xi)||x-t|\leqslant|r_k'(\xi)-f'(\xi)|\frac{1}{2}h_j.$$

Остается воспользоваться оценкой (1.9).

Лемма 1.2 доказана.

Доказательство леммы 1.3. Пусть функция $f\in C^{(2)}[a,b]$, дана сетка узлов $\Delta:$ $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 3)$, и пусть сначала для данного k $(k=2,3,\dots,N-1)$ выполняется неравенство $h_{k-1}<h_{k+1}$. Для этого случая, как и выше, положим $g_k=\max\{h_{k-1},h_k\}$, выберем точку $u_k=x_{k-2}-g_k$, рассмотрим рациональную функцию $r_k(x)$ из (1.1) с коэффициентами (1.2) и оценим при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ разность
$$r_k''(x)-f''(x)=2c_k-\frac{2A_k}{(x-u_k)^3}-f''(x)$$

$$= [2f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) - f''(x)] + 2f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})\varphi(x)$$

$$= [2f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) - f''(x)] + [2f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) - 2f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)]\,\frac{\varphi(x)}{x_{k+1} - x_{k-2}},$$

где функция

$$\varphi(x) = (x_{k-2} - u_k) - \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x - u_k)^3}$$

возрастает на отрезке $[x_{k-2}, x_{k+1}]$, причем $\varphi(x_{k+1}) > 0$, $\varphi(x_{k-2}) < 0$.

Тогда с учетом неравенства $h_{k-1} < h_{k+1}$ имеем

$$\frac{\varphi(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_{k-2}} < \frac{x_{k-2} - u_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} = \frac{g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} < 1,$$

$$\frac{|\varphi(x_{k-2})|}{x_{k+1} - x_{k-2}} < \frac{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_{k-2} - u_k)^2(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$= \frac{x_{k-1} - x_{k-2} + g_k}{g_k}\,\frac{x_k - x_{k-2} + g_k}{g_k}\,\frac{x_{k+1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} < 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$$

Возьмем теперь точки $\xi_1 \in (x_{k-1}, x_{k+1})$ и $\xi_2 \in (x_{k-2}, x_k)$ такие, что

$$2f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = f''(\xi_1), \quad 2f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) = f''(\xi_2).$$

Тогда при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ имеем $|r_k''(x) - f''(x)| \leqslant \omega(3\beta_k, f'') + 12\,\omega(3\beta_k, f'') \leqslant 39\,\omega(\beta_k, f'')$, и в случае $h_{k-1} < h_{k+1}$ требуемое неравенство (1.11) получено.

Рассмотрим теперь случай, когда для данного k ($k = 2, 3, \ldots, N-1$) имеем $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$. Положим $g_k = \max\{h_k, h_{k+1}\}$, выберем точку $u_k = x_{k+1} + g_k$, возьмем рациональную функцию $r_k(x)$ из (1.1) с выражениями коэффициентов c_k и b_k из (1.3) и коэффициентов a_k и A_k из (1.2). При $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ разность $r_k''(x) - f''(x)$ преобразуем следующим образом:

$$r_k''(x) - f''(x) = 2c_k - \frac{2A_k}{(x - u_k)^3} - f''(x)$$

$$= [2f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) - f''(x)] + 2f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})\psi(x),$$

где функция

$$\psi(x) = -(u_k - x_{k+1}) + \frac{(u_k - x_{k-2})(u_k - x_{k-1})(u_k - x_k)(u_k - x_{k+1})}{(u_k - x)^3}$$

возрастает на отрезке $[x_{k-2}, x_{k+1}]$, $\psi(x_{k+1}) > 0$, $\psi(x_{k-2}) < 0$.

Значит,

$$\frac{\psi(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_{k-2}} < \frac{(u_k - x_{k-2})(u_k - x_{k-1})(u_k - x_k)}{(u_k - x_{k+1})^2(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$= \Big(1 + \frac{g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}}\Big)\Big(\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{g_k} + 1\Big)\Big(\frac{x_{k+1} - x_k}{g_k} + 1\Big) < 12;$$

$$\frac{|\psi(x_{k-2})|}{x_{k+1} - x_{k-2}} < \frac{u_k - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_{k-2}} = \frac{g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} < 1.$$

Отсюда в случае $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ по аналогии с предыдущим случаем также получим требуемое неравенство (1.11).

Докажем неравенство (1.13). Раз $f \in C^{(2)}[a, b]$, разность $r_k - f \in C^{(2)}[x_{k-2}, x_{k+1}]$ для данного k ($k = 2, 3, \ldots, N-1$). По построению $r_k(x)$ имеем $r_k(x_j) - f(x_j) = 0$ при $j =$

$k-2, k-1, k, k+1$, а поэтому найдутся точки $\tau_1 \in (x_{k-2}, x_{k-1})$, $\tau_2 \in (x_{k-1}, x_k)$, $\tau_3 \in (x_k, x_{k+1})$ такие, что $r'_k(\tau_j) - f'(\tau_j) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$.

В доказательстве леммы 1.2 показано, что для любой точки $x \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = k-1, k, k+1)$ найдется точка $\xi \in (x_{j-1}, x_j)$ такая, что

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} h_j |r'_k(\xi) - f'(\xi)|.$$

Обозначим через τ ту из трех точек τ_1, τ_2 и τ_3, которая вместе с точкой ξ принадлежит соответствующему (x_{j-1}, x_j) из интервалов (x_{k-2}, x_{k-1}), (x_{k-1}, x_k) и (x_k, x_{k+1}). Тогда найдется точка η между точками ξ и τ такая, что

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} h_j |r'_k(\xi) - f'(\xi) - r'_k(\tau) + f'(\tau)| = \frac{1}{2} h_j |r''_k(\eta) - f''(\eta)||\xi - \tau| \leqslant \frac{1}{2} h_j^2 |r''_k(\eta) - f''(\eta)|.$$

Чтобы получить требуемое неравенство (1.13), остается применить оценку (1.11).

Для доказательства (1.12) также воспользуемся найденными выше точками τ_1, τ_2 и τ_3 и через τ_x обозначим ту из них, которая вместе с точкой x принадлежит данному отрезку $[x_{j-1}, x_j]$ $(j = k-1, k, k+1)$. Тогда между точками x и τ_x существует точка y такая, что

$$|r'_k(x) - f'(x)| = |r'_k(x) - f'(x) - r'_k(\tau_x) + f'(\tau_x)| = |r''_k(y) - f''(y)||x - \tau_x| \leqslant h_j |r''_k(y) - f''(y)|.$$

Отсюда и из (1.11) получим (1.12).

Лемма 1.3 доказана.

2. Рациональные сплайны по интерполянтам

Сначала функцию $f(x)$ будем считать непрерывной $(b-a)$-периодической. Сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ продолжим также $(b-a)$-периодически и в соответствии с этим распространим определение приведенных выше рациональных интерполянтов $r_k(x)$ на узлы продолженной сетки.

Как показано в [8], случай функции $f(x)$, определенной лишь на самом отрезке $[a, b]$, рассматривается вполне аналогично и получаемые результаты также аналогичны периодическому случаю.

Для каждого k $(k = 1, 2, \dots, N)$ составим рациональную функцию

$$\begin{aligned} Q_k(x) = r_k(x) + (r_{k-1}(x) - r_k(x)) \frac{(x_k - x)^2}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})} \\ + (r_{k+1}(x) - r_k(x)) \frac{(x - x_{k-1})^2}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

непрерывную на $[x_{k-1}, x_k]$, причем $Q_k(x_j) = f(x_j)$ при $j = k-1, k$.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ кусочно-рациональную функцию $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N = 3, 4, \dots)$ такую, что при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ выполняется равенство $\rho_N(x) = Q_k(x)$.

Следующие равенства при $k = 1, 2, \dots, N-1$ можно проверить, непосредственно вычисляя производные $Q'_k(x)$ и $Q''_k(x)$:

$$\begin{aligned} &\rho'_N(x_k - 0) = Q'_k(x_k) = Q'_{k+1}(x_k) = \rho'_N(x_k + 0), \\ &\rho'_N(x_k) = r'_k(x_k) \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} + r'_{k+1}(x_k) \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &\rho''_N(x_k - 0) = Q''_k(x_k) = Q''_{k+1}(x_k) = \rho''_N(x_k + 0), \\ &\rho''_N(x_k) = r''_k(x_k) \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} + r''_{k+1}(x_k) \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} + (r'_{k+1}(x_k) - r'_k(x_k)) \frac{4}{h_k + h_{k+1}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Следовательно, $\rho_N(x)$ $(N \geqslant 3)$ представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[a,b]$ функцию с $\rho_N(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0,1,\dots,N)$ такую, что на частичном отрезке $[x_{k-1},x_k]$ $(k = 1,2,\dots,N)$ она совпадает с рациональной функцией $Q_k(x)$.

Исследуя аппроксимативные свойства рациональных сплайнов $\rho_N(x) = \rho_N(x;f)$, в приводимых ниже теоремах 2.1–2.3 будем предполагать, что на отрезке $[a,b]$ задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, продолженная $(b-a)$-периодически.

Следующее утверждение в принятых выше обозначениях дает оценку скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам $r_k(x)$ в случае непрерывной функции.

Теорема 2.1. *Для непрерывной $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x;f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a,b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant 38 \sup\Big\{\frac{\beta_k}{\alpha_k}\omega(\beta_k,f) : k = 2,3,\dots,N-1\Big\};$$

в частности,

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant 38\,\frac{\|\Delta\|}{\alpha}\,\omega(\|\Delta\|,f),$$

где $\alpha = \min\{h_k : k = 1,2,\dots,N\}$.

Доказательство. Пусть $x \in [x_{k-1},x_k]$ $(k = 1,2,\dots,N)$. Тогда $\rho_N(x) = Q_k(x)$, и рациональную функцию $Q_k(x)$ можно представить в виде

$$Q_k(x) = P_{k+1}(x)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + P_k(x)\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}},$$

где при $j = 1,2,\dots,N$ обозначено

$$P_j(x) = r_j(x)\frac{x - x_{j-2}}{x_j - x_{j-2}} + r_{j-1}(x)\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-2}}.$$

Тогда

$$Q_k(x) - f(x) = [P_{k+1}(x) - f(x)]\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + [P_k(x) - f(x)]\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}},$$

$$P_{k+1}(x) - f(x) = [r_{k+1}(x) - f(x)]\frac{x - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} + [r_k(x) - f(x)]\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_{k-1}},$$

$$P_k(x) - f(x) = [r_k(x) - f(x)]\frac{x - x_{k-2}}{x_k - x_{k-2}} + [r_{k-1}(x) - f(x)]\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-2}}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 остается, используя лемму 1.1, оценить правые части двух последних равенств и использовать эти оценки в равенстве для $Q_k(x) - f(x)$.

Теорема 2.1 доказана.

В целях исследования аппроксимативных свойств рациональных сплайнов $\rho_N(x) = \rho_N(x;f)$ для дифференцируемых функций $f(x)$ наряду с равенством (2.1) для рациональной дроби $Q_k(x)$ $(k = 1,2,\dots,N)$ рассмотрим другое представление через неотрицательные функции

$$\varphi_1(x) = \frac{(x_k - x)^2}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})},\ \varphi_2(x) = \frac{(x - x_{k-2})(x_k - x)}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})} + \frac{(x_{k+1} - x)(x - x_{k-1})}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - x_{k-1})^2}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})},$$

для которых, как легко проверить, выполняется тождество

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) \equiv 1. \tag{2.4}$$

А именно, при $x \in [x_{k-1},x_k]$ равенство (2.1) преобразуется к виду

$$Q_k(x) = r_{k-1}(x)\varphi_1(x) + r_k(x)\varphi_2(x) + r_{k+1}(x)\varphi_3(x). \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Для непрерывно дифференцируемой $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a,b]$ выполняются неравенства*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant \frac{57}{2}\,\|\Delta\|\omega(\|\Delta\|, f'), \tag{2.6}$$

$$|f'(x) - \rho_N'(x)| \leqslant 285\,\omega(\|\Delta\|, f'). \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Тогда $\rho_N(x) = Q_k(x)$, поэтому из (2.4) и (2.5) получим

$$\rho_N(x) - f(x) = (r_{k-1}(x) - f(x))\varphi_1(x) + (r_k(x) - f(x))\varphi_2(x) + (r_{k+1}(x) - f(x))\varphi_3(x). \tag{2.8}$$

Для получения (2.6) остается применить лемму 1.2.

Чтобы установить (2.7), используя представления $Q_k(x)$ в виде (2.1) и (2.5), при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ получим

$$Q_k'(x) = r_{k-1}'(x)\varphi_1(x) + r_k'(x)\varphi_2(x) + r_{k+1}'(x)\varphi_3(x)$$
$$+ (r_{k-1}(x) - r_k(x))\varphi_1'(x) + (r_{k+1}(x) - r_k(x))\varphi_3'(x).$$

Значит, при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ по лемме 1.2 имеем

$$|\rho_N'(x) - f'(x)| \leqslant |r_{k-1}'(x) - f'(x)|\varphi_1(x) + |r_k'(x) - f'(x)|\varphi_2(x) + |r_{k+1}'(x) - f'(x)|\varphi_3(x)$$
$$+ |r_{k-1}(x) - f(x) + f(x) - r_k(x)||\varphi_1'(x)| + |r_{k+1}(x) - f(x) + f(x) - r_k(x)||\varphi_3'(x)$$
$$\leqslant 57\,\omega(\|\Delta\|, f') + 2\cdot\frac{57}{2}h_k\,\omega(\|\Delta\|, f')|\varphi_1'(x)| + 57h_k\,\omega(\|\Delta\|, f')|\varphi_3'(x)|.$$

Так как при $x \in [x_{k-1}, x_k]$, очевидно,

$$h_k|\varphi_1'(x)| = 2\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-2}} < 2, \quad h_k|\varphi_3'(x)| = 2\frac{x - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2,$$

отсюда получим требуемое неравенство (2.7).

Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. *Для дважды непрерывно дифференцируемой $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a,b]$ выполняются неравенства*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant \frac{39}{2}\,\|\Delta\|^2\omega(\|\Delta\|, f''), \tag{2.9}$$

$$|f'(x) - \rho_N'(x)| \leqslant 195\,\|\Delta\|\omega(\|\Delta\|, f''), \tag{2.10}$$

$$|f''(x) - \rho_N''(x)| \leqslant 429\,\omega(\|\Delta\|, f''). \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, то $\rho_N(x) = Q_k(x)$, а потому по равенству (2.8) и лемме 1.3 получим неравенство (2.9).

Оценку величины $|\rho_N'(x) - f'(x)|$ при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ проведем по аналогии с оценкой этой величины в доказательстве теоремы 2.2 и учтем неравенства $h_k|\varphi_1'(x)| < 2$ и $h_k|\varphi_3'(x)| < 2$ оттуда, но вместо леммы 1.2 применим лемму 1.3.

Тогда при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ получим

$$|\rho_N'(x) - f'(x)| \leqslant 39\,h_k\omega(\|\Delta\|, f'') + 39\,h_k^2\omega(\|\Delta\|, f'')|\varphi_1'(x)|$$
$$+ 39\,h_k^2\omega(\|\Delta\|, f'')|\varphi_3'(x)| \leqslant 195\,h_k\omega(\|\Delta\|, f''),$$

а значит, выполняется (2.10).

Далее, используя равенства (2.1) и (2.5), при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ получим

$$Q_k''(x) = r_{k-1}''(x)\varphi_1(x) + r_k''(x)\varphi_2(x) + r_{k+1}''(x)\varphi_3(x)$$
$$+ 2(r_{k-1}'(x) - r_k'(x))\varphi_1'(x) + 2(r_{k+1}'(x) - r_k'(x))\varphi_2'(x)$$
$$+ (r_{k-1}(x) - r_k(x))\varphi_1''(x) + (r_{k+1}(x) - r_k(x))\varphi_3''(x).$$

Тогда, используя лемму 1.3, имеем (при $x \in [x_{k-1}, x_k]$)

$$|\rho_N''(x) - f''(x)| \leqslant |r_{k-1}''(x) - f''(x)|\varphi_1(x) + |r_k''(x) - f''(x)|\varphi_2(x)$$
$$+ |r_{k+1}''(x) - f''(x)|\varphi_3(x) + 2|r_{k-1}'(x) - f'(x) + f'(x) - r_k'(x)||\varphi_1'(x)|$$
$$+ 2|r_{k+1}'(x) - f'(x) + f'(x) - r_k'(x)||\varphi_3'(x)| + |r_{k-1}(x) - f(x) + f(x) - r_k(x)||\varphi_1''(x)|$$
$$+ |r_{k+1}(x) - f(x) + f(x) - r_k(x)||\varphi_3''(x)| \leqslant 39\,\omega(\|\Delta\|, f'')$$
$$+ 4 \cdot 39\,\omega(\|\Delta\|, f'')h_k(|\varphi_1''(x)| + |\varphi_3'(x)|) + 39\,\omega(\|\Delta\|, f'')h_k^2(|\varphi''(x)| + |\varphi_3''(x)|) \leqslant 429\,\omega(\|\Delta\|, f''),$$

поскольку, как показано выше, $h_k|\varphi_1'(x)| < 2$ и $h_k|\varphi_3'(x)| < 2$, а также

$$h_k^2|\varphi_1''(x)| = \frac{2h_k}{x_k - x_{k-2}} < 2, \quad h_k^2|\varphi_3''(x)| = \frac{2h_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2.$$

Следовательно, справедливо неравенство (2.11).

Теорема 2.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
2. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Добавления к книге Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 317 с.
3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. **Edeo A., Gofe G., Tefera V.** Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12, no. 1. P. 110–122.
6. **Субботин Ю.Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.
7. **Привалов Ал.А.** О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции // Мат. заметки. 1979. Т. 25, вып. 5. С. 681–700.
8. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестан. электрон. мат. изв. 2015. Вып. 4. С. 22–31.
9. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Интерполяционные рациональные сплайны // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы: материалы Междунар. науч. конф. / Дагестан. гос. техн. ун-т. Махачкала, 2016. С. 68–71.

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила 30.05.2016

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры математического анализа
Дагестанский государственный университет
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. Ahlberg J., Nilson E., Walsh J. *The theory of splines and their applications.* New York: Acad. Press, 1967, 284 p.
2. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Dobavleniya k knige J. Alberg, E. Wilson, J. Walsh. Teoriya splajnov i ee prilozheniya* (Adding to the book of J. Alberg, E. Wilson, J. Walsh. The theory of splines and their applications). Moscow: Mir Publ., 1972, 317 p. (in Russian).
3. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splajny v vychislitelnoj matematike* (Splines in computational mathematics). Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p. (in Russian).
4. Корнейчук Н.П. Korneichuk N.P. *Splajny v teorii priblizheniya* (Splines in approximation theory). Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p. (in Russian).
5. Edeo A., Gofe G., Tefera V. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences*, 2015, vol. 12, no. 1, pp. 110–122.
6. Subbotin Yu.N. Variations on a spline theme. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1043–1058 (in Russian).
7. Privalov Al.A. Convergence of cubic interpolation splines to a continuous function. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1979, vol. 25, iss. 5, pp. 349–359.
8. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines on rational interpolants. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, iss. 4, pp. 22–31 (in Russian).
9. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Rational interpolation splines. *Actual problems of mathematics and related topics. Proc. Int. Sci. Conf.* (*Dagestan. Gos. Tekhn. Univ., 2016*) Makhachkala, 2016, pp. 68–71 (in Russian).

A.-R.K. Ramazanov, Dr. Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367000 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

V.G. Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367000 Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru .