ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ПРОСТРАНСТВ n-РАЗДЕЛЬНОГО КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА И ВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева

В работе построены биортогональные базисы определенных автором ранее пространств n-раздельных КМА и всплесков для n масштабирующих функций и приведены быстрые алгоритмы вычисления коэффициентов разложения функции по таким базисам.

Ключевые слова: всплеск, маска, биортогональный базис, масштабирующая функция, кратномасштабный анализ.

Keywords: wavelet, mask, biorthogonal basis, scaling function, multiresolution analysis.

E. A. Pleshcheva. Biorthogonal bases of spaces of n-separate multiresolution analysis and multiwavelets.

We construct biorthogonal bases of spaces of n-separate multiresolution analysis and wavelets for n scaling functions. Fast algorithms are presented for finding the coefficients of expansion of functions in such bases.

Keywords: wavelet, mask, biorthogonal basis, scaling function, multiresolution analysis.

MSC: 42C40, 42A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-225-232

Введение

В работе строятся биортогональные базисы пространств n-раздельного кратномасштабного анализа (КМА) и всплесков. Ранее автором в работе [1] были построены ортонормированные базисы пространств n-раздельного КМА и всплесков.

Рассмотрим в отличии от классических ортонормированных всплесков следующее определение понятия всплеска.

Определение 1. Всплеском называется функция $\psi(x)$ такая, что множество функций $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\colon k, j \in \mathbb{Z}\}$ образуют базис Рисса пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ пространство W_j — это пространство всплесков, его базис образован функциями $\psi_{j,k}(x),\ k \in \mathbb{Z}$.

По базису Рисса ортонормированный базис можно построить стандартным образом:

$$\widehat{\psi}^{\perp}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\omega+\nu)|^2}},$$

где $\widehat{\psi}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-2\pi i\, x\omega}\, dx$ — преобразование Фурье функции ψ. К сожалению, при ортогонализации приведенным способом базиса Рисса, обладающего полезными в приложениях свойствами, такими, как например, компактность носителя или симметричность, эти свойства теряются. А при определении проекции функции f на пространство W_j по неортогональному базису

$$Pr_{W_j} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(x),$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

возникает также сложность с вычислением коэффициентов $c_{j,k}$.

Поэтому, чтобы преодолеть эту сложность, рассматривают (см., например, [2, гл. 8]) следующую двойственную к $\{\psi_{j,k}\}$ систему.

О п р е д е л е н и е 2. Система функций $\{\widetilde{\psi}^s(x)\}$ называется двойственной к системе $\{\psi^s(x)\}$, $s=\overline{1,n}$, если для любых $j\in\mathbb{Z}$, $s=\overline{1,n}$, выполняются условия

$$\langle\psi^s_{j,k},\widetilde{\psi}^s_{j,k_1}\rangle=\delta_{k,k_1},\quad k,k_1\in\mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Здесь и далее $\langle f,g\rangle$ — скалярное произведение функций f и g в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Определим проекции функции f на соответствующие пространства W^s_j, $\widetilde{W}^s_j$ ($s=\overline{1,n}$):

$$Pr_{W^s_j}f(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c^s_{j,\nu}\psi^s_{j,\nu}(x),\quad Pr_{\widetilde{W}^s_j}f(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}^s_{j,\nu}\widetilde{\psi}^s_{j,\nu}(x).$$

Домножая скалярно первое равенство на $\widetilde{\psi}^s_{j,k}(x)$, а второе на $\psi^s_{j,k}(x)$, получаем, что коэффициенты $c^s_{j,k}$ и $\widetilde{c}^s_{j,k}$ вычисляются по формулам

$$c^s_{j,k}=\langle f,\widetilde{\psi}^s_{j,k}\rangle,\quad \widetilde{c}^s_{j,k}=\langle f,\psi^s_{j,k}\rangle.$$

В данной работе методы построения биортогональных базисов перенесены на введенные в статье [1] базисы всплесков и масштабирующих функций произвольного n-раздельного КМА.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$p_s=\text{Выч}_n(s)+1=\begin{cases} s+1, & s=1,2,\dots,n-1,\\ 1, & s=n.\end{cases}$$

1. Построение биортогональных КМА

Как и в классическом случае, начнем построение базисов всплесков с кратномасштабного анализа. В следующем определении дается обобщение понятия n-раздельного КМА из [1].

О п р е д е л е н и е 3. Рассмотрим n последовательностей ($n\geq 2$) замкнутых подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\cdots\subset V^n_{-1}\subset V^1_0\subset V^2_1\subset V^3_2\subset\cdots\subset V^n_{n-1}\subset V^1_n\subset V^2_{n+1}\subset\cdots,$$
$$\cdots\subset V^1_{-1}\subset V^2_0\subset V^3_1\subset V^4_2\subset\cdots\subset V^1_{n-1}\subset V^2_n\subset V^3_{n+1}\subset\cdots,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\subset V^{n-1}_{-1}\subset V^n_0\subset V^1_1\subset V^2_2\subset\cdots\subset V^{n-1}_{n-1}\subset V^n_n\subset V^1_{n+1}\subset\cdots.$$

Назовем эту конструкцию в отличие от классического КМА *n-раздельным кратномасштабным анализом* (n-КМА) пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_j V^1_{nj}}=\overline{\bigcup V^2_{nj}}=\cdots=\overline{\bigcup V^n_{nj}}=\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

б) $\bigcap_j V^1_{nj}=\bigcap V^2_{nj}=\cdots=\bigcap V^n_{nj}=\{0\}$;

в) $f(x)\in V^s_j\Leftrightarrow f(x+l/2^j)\in V^s_j\ \ \forall j,l\in\mathbb{Z},\ s=1,2,\dots,n$;

г) $f(x)\in V^s_0\Leftrightarrow f(2^jx)\in V^s_j\ \ \forall j\in\mathbb{Z},\ s=1,2,\dots,n$;

д) для каждого s, $s=\overline{1,n}$, существует функция $\varphi^s(x)\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ такая, что система ее целочисленных сдвигов $\{\varphi^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса пространства V^s_0 ($s=1,2,\dots,n$). Функции $\varphi^s(x)$, $s=\overline{1,n}$ называются масштабирующими.

Вложение пространств n-КМА обеспечивается следующими условиями на базисы $\varphi^s_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi^s(x)(2^jx-k), k\in\mathbb{Z}$, называемыми *масштабирующими соотношениями*:

$$\varphi^s(x)\overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h^{s,p_s}_k\varphi^{p_s}_{1,k}(x),\quad s=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

После преобразования Фурье получим эквивалентные равенства

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) = m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad s = 1, 2, \dots, n, \tag{1.2}$$

где $h^{s,p_s} \in l^2(\mathbb{Z})$, а $m^{s,p_s}(\omega)$ — 1-периодические функции из $\mathbf{L}^2[0,1)$,

$$m^{s,p_s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^{s,p_s} e^{2\pi i k\omega}. \tag{1.3}$$

Введем двойственную систему вложенных пространств КМА.

О п р е д е л е н и е 4. Рассмотрим n последовательностей замкнутых подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\dots \subset \widetilde{V}_{-1}^n \subset \widetilde{V}_0^1 \subset \widetilde{V}_1^2 \subset \widetilde{V}_2^3 \subset \dots \subset \widetilde{V}_{n-1}^n \subset \widetilde{V}_n^1 \subset \widetilde{V}_{n+1}^2 \subset \cdots,$$

$$\dots \subset \widetilde{V}_{-1}^1 \subset \widetilde{V}_0^2 \subset \widetilde{V}_1^3 \subset \widetilde{V}_2^4 \subset \dots \subset \widetilde{V}_{n-1}^1 \subset \widetilde{V}_n^2 \subset \widetilde{V}_{n+1}^3 \subset \cdots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \subset \widetilde{V}_{-1}^{n-1} \subset \widetilde{V}_0^n \subset \widetilde{V}_1^1 \subset \widetilde{V}_2^2 \subset \dots \subset \widetilde{V}_{n-1}^{n-1} \subset \widetilde{V}_n^n \subset \widetilde{V}_{n+1}^1 \subset \cdots$$

Назовем эту конструкцию *двойственным n-раздельным кратномасштабным анализом пространства* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_j \widetilde{V}_{nj}^1} = \overline{\bigcup \widetilde{V}_{nj}^2} = \dots = \overline{\bigcup \widetilde{V}_{nj}^n} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

б) $\bigcap_j \widetilde{V}_{nj}^1 = \bigcap \widetilde{V}_{nj}^2 = \dots = \bigcap \widetilde{V}_{nj}^n = \{0\}$;

в) $f(x) \in \widetilde{V}_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in \widetilde{V}_j^s \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \dots, n$;

г) $f(x) \in \widetilde{V}_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in \widetilde{V}_j^s \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \dots, n$;

д) для каждого s, $s = \overline{1,n}$, существует функция $\widetilde{\varphi}^s(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, такая, что система ее целочисленных сдвигов $\{\widetilde{\varphi}^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса пространства $\widetilde{V}_0^s$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, где система $\{\widetilde{\varphi}^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ двойственна системе $\{\varphi^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т.е. $\langle \varphi^s(x+k), \widetilde{\varphi}^s(x+l)\rangle = \delta_{k,l}$.

Для двойственной системы масштабирующие соотношения выглядят следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}^s(x) \overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k^{s,p_s} \widetilde{\varphi}_{1,k}^{p_s}(x), \quad s = \overline{1,n},$$

а после преобразования Фурье

$$\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega) = \widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad s = 1, 2, \dots, n, \tag{1.4}$$

где $\widetilde{h}^{s,p_s} \in l^2(\mathbb{Z})$, а $\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)$ — 1-периодические функции из $\mathbf{L}^2[0,1)$,

$$\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k^{s,p_s} e^{2\pi i k\omega}. \tag{1.5}$$

Известное условие биортогональности, выписанные в п. д) Определения 4, в терминах преобразований Фурье для систем функций $\varphi^s(x), \widetilde{\varphi}^s(x)$ записывается в виде

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}^s(\omega+\nu)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega+\nu)} \overset{\text{п.в.}}{=} 1, s = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть выполняются условия биортогональности (1.6). Тогда $m^{s,p_s}(\omega)$, $\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}+m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\overset{\text{п.в.}}{=}1. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем равенства (1.6), используя формулы (1.2) и (1.4), и стандартным образом разбивая суммирование отдельно по четным и по нечетным ν:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}$$

$$=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)}$$

$$+\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)}\overset{\text{п.в.}}{=}1.$$

Вынося за знак суммы 1-периодические слагаемые, получим

$$m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)}$$

$$+m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)}\overset{\text{п.в.}}{=}1,$$

откуда по (1.6) следуют равенства (1.7) □

Пусть имеется базис Рисса пространства V_0^s.

Построить по нему двойственный базис пространства $\widetilde{V}_0^s$ можно, используя формулу

$$\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega)=\frac{\widehat{\varphi^s}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi^s}(\omega+k)|^2}.$$

Действительно, для таких $\varphi^s(x),\ \widetilde{\varphi}^s(x), s=\overline{1,n}$, будет выполняться условие (1.6), что эквивалентно выполнению условий биортогональности (0.1).

При таком способе построения система, биортогональная к системе сдвигов масштабирующих функций с компактным носителем, вообще говоря, не будет иметь компактного носителя. Поэтому для масштабирующих функций с компактным носителем будем строить биортогональный базис по аналогии с другим известным способом.

2. Биортогональные базисы из масштабирующих функций с компактным носителем

Пусть функции $\varphi^s(x),\widetilde{\varphi}^s(x), s=\overline{1,n}$, имеют компактный носитель. Тогда масштабирующие соотношения (1.1) содержат конечное число слагаемых:

$$\varphi^s(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-N_1}^{N_2}h_k^{s,p_s}\varphi_{1,k}^{p_s}(x),\quad \widetilde{\varphi}^s(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2}\widetilde{h}_k^{s,p_s}\widetilde{\varphi}_{1,k}^{p_s}(x),\quad s=\overline{1,n}.$$

Следовательно, маски m^{s,p_s} и $\widetilde{m}^{s,p_s}$ являются тригонометрическими полиномами

$$m^{s,p_s}(\omega)=\sum_{k=-N_1}^{N_2}h_k^{s,p_s}e^{2\pi ik\omega},\quad \widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)=\sum_{k=-\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2}\widetilde{h}_k^{s,p_s}e^{2\pi ik\omega},\quad s=\overline{1,n}.$$

Обозначим $z = e^{2\pi i\omega}$. Тогда по имеющимся многочленам $H^{s,p_s}(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} h_k^{s,p_s} z^k$ построим многочлены $\overline{\widetilde{H}}^{s,p_s}(z) = \sum_{k=-\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2} \overline{\widetilde{h}}_k^{s,p_s} ((\frac{1}{z}))^k,\ s = \overline{1,n}$.

Для $m^{s,p_s},\ \widetilde{m}^{s,p_s}$ должно выполняться свойство (1.7), которое в терминах $H^{s,p_s}(z),\ \widetilde{H}^{s,p_s}(z)$ выглядит следующим образом: $H^{s,p_s}(z)\overline{\widetilde{H}}^{s,p_s}(z) + H^{s,p_s}(-z)\overline{\widetilde{H}}^{s,p_s}(-z) = 1$.

Данное уравнение имеет решения — многочлены $\widetilde{H}^{s,p_s}(z)$, причем многочлен $\widetilde{H}^{s,p_s}(z)$, удовлетворяющий неравенству $\deg \widetilde{H}^{s,p_s}(z) \le \deg H^{s,p_s}(z)$, единственный и может быть найден с использованием алгоритма Евклида аналогично [3, разд. 4.1]. Таким образом, зная $\varphi^s(x)$ с компактным носителем, найдем $\widetilde{H}^{s,p_s}(z)$, коэффициенты $\widetilde{h}_k^{s,p_s}$ и маски $\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)$, и по обычной схеме (см., напр., [1]) восстановим двойственные масштабирующие функции $\widetilde{\varphi}^s(x)$.

3. Базисы пространств всплесков

Построим теперь биортогональные базисы пространств всплесков по имеющимся системам биортогональных масштабирующих функций. Это значит, что мы хотим построить такие функции $\psi^s(x),\ \widetilde{\psi}^s(x)$, что системы $\{\psi_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ($\{\widetilde{\psi}_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$) образуют базисы пространств W_j^s ($\widetilde{W}_j^s$), дополняющих пространства V_j^s (соответственно, $\widetilde{V}_j^s$) до пространств $V_{j+1}^{p_s}$ ($\widetilde{V}_{j+1}^{p_s}$) со свойствами $\langle \psi_{j,k}^s, \widetilde{\psi}_{j,k_1}^s \rangle = \delta_{k,k_1}$, $\langle \varphi_{j,k_1}^s, \widetilde{\psi}_{j,k}^s \rangle = 0, s = \overline{1,n},\ j,k,k_1 \in \mathbb{Z}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть при $s = \overline{1,n}$, $\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$ и $\widetilde{\psi}^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\widetilde{h}_{1-\nu}^{s,p_s}} \widetilde{\varphi}_{1,\nu}^{p_s}(x)$, где h_ν^{s,p_s} и $\widetilde{h}_\nu^{s,p_s}$ — коэффициенты из (1.3), (1.5). Тогда для любых $j \in \mathbb{Z}$ системы $\{\psi_{j,k}^s(x)\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{j,k}^s(x)\}$, где $k \in \mathbb{Z}$, образуют биортогональные базисы пространств W_j^s и $\widetilde{W}_j^s$, а при каждом $s = 1,2,\ldots,n$ системы $\{\psi_{nj+l,k}^{p_{s+l-1}}(x)\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{nj+l,k}^{p_{s+l-1}}(x)\}$, где $l = 0,1,\ldots,n-1;\ j,k \in \mathbb{Z}$ — двойственные базисы пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при фиксированном $s \in 1,\ldots,n$ функция $f(x) \in W_0^s$. Тогда $f \in V_1^{p_s},\ f \perp \widetilde{V}_0^s$. Это значит, что справедливы соотношения $f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$, $\langle f, \widetilde{\varphi}_{0,k}^s \rangle = 0$, или в терминах преобразований Фурье

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu e^{\pi i\nu\omega} \widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) := m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \qquad \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{e^{2\pi ik\omega}\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega)}\, d\omega = 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая условия (1.2), последнее равенство перепишется в виде

$$\int_{\mathbb{R}} m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi}^{p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)} e^{-2\pi ik\omega}\, d\omega = 0.$$

Стандартным образом, заменяя интеграл по оси интегралом по объединению интервалов и далее переходя к сумме интегралов, получим равенства

$$\int_{\bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}}[\nu,\nu+1]} m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi}^{p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)} e^{-2\pi ik\omega}\, d\omega$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{\nu}^{\nu+1} m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)} e^{-2\pi ik\omega}\, d\omega = 0.$$

После замены переменных и переноса суммы под знак интеграла имеем

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 m_f\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)} e^{-2\pi ik(\omega+\nu)}\, d\omega$$

$$= \int_0^1 \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big(m_f\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}\Big(\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}\Big)\Big) e^{-2\pi i k\omega}\, d\omega$$

$$= \int_0^1 \Big(m_f(\frac{\omega}{2})\overline{m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi^{p_s}}(\frac{\omega}{2}+\nu)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}(\frac{\omega}{2}+\nu)}$$

$$+ m_f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu+\frac{1}{2}\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu+\frac{1}{2}\Big)}\Big) e^{-2\pi i k\omega}\, d\omega = 0.$$

С учетом (1.6) последнее равенство эквивалентно условию

$$\int_0^1 \Big(m_f(\frac{\omega}{2})\overline{m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})} + m_f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big) e^{-2\pi i k\omega}\, d\omega = 0,$$

откуда в силу 1-периодичности подынтегральной функции следует равенство

$$m_f(\omega)\overline{m^{s,p_s}(\omega)} + m_f\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} \overset{\text{п.в.}}{=} 0,$$

равносильное тому, что $m_f(\omega) = A(\omega)\overline{m^{s,p_s}(\omega+1/2)}$, где $A(\omega) = -A(\omega+1/2)$. Таким образом, при каждом $s=\overline{1,n}$ для любой функции $f\in W_0^s$ существует 1-периодическая фукнция $m_f(\omega)\in \mathbf{L}^2[0,1]$, такая, что

$$\widehat{f}(\omega) = m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\ \text{где}\ m_f(\omega) = \alpha_f(\omega)e^{2\pi i\omega}\overline{m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} \in \mathbf{L}^2[0,1], \tag{3.1}$$

$\alpha_f(\omega)$ — 1/2-периодическая функция. Аналогичными рассуждениями с заменой соответственно f, φ, m, W, $\widetilde{V}$ на $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{W}$, V для любой функции $\widetilde{f}(x)\in\widetilde{W}_0^s$ получим соотношения

$$\widehat{\widetilde{f}}(\omega) = \widetilde{m}_{\widetilde{f}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\ \widetilde{m}_{\widetilde{f}}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}(\omega)e^{2\pi i\omega}\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} \in \mathbf{L}^2[0,1],\ \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}(\omega) \tag{3.2}$$

Построим теперь функции $\psi^s\in W_0^s$, $\widetilde{\psi}^s\in\widetilde{W}_0^s$, целочисленные сдвиги которых образуют биортогональные базисы пространств W_0^s и $\widetilde{W}_0^s$. В силу (3.1), (3.2) при $f=\psi^s$ и $f=\widetilde{\psi}^s$ имеем

$$\widehat{\psi^s}(\omega) = \alpha_{\psi^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)e^{\pi i\omega}\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\quad \widehat{\widetilde{\psi}^s}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)e^{\pi i\omega}\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{3.3}$$

и, как легко проверить, чтобы выполнялось условие биортогональности вида (1.6) для ψ^s и $\widetilde{\psi}^s$, функции $\alpha_{\psi^s}(\omega)$ и $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega)$ должны лишь удовлетворять условиям $\alpha_{\psi^s}(\omega)\overline{\widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega)} = 1, s=\overline{1,n}$. Для определенности положим $\alpha_{\psi^s}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega) = 1$. После обратного преобразования Фурье получаем, что

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^\nu\overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}}\varphi_{1,\nu}^{p_s}(x),\ \widetilde{\psi}^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^\nu\overline{\widetilde{h}_{1-\nu}^{s,p_s}}\widetilde{\varphi}_{1,\nu}^{p_s}(x),\ s=\overline{1,n}.$$

Покажем, что построенные таким образом системы функций $\{\psi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ($\{\widetilde{\psi}^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$) образуют базисы пространств W_0^s ($\widetilde{W}_0^s$), $s=\overline{1,n}$, дополняющих пространства V_0^s до $\widetilde{V}_1^{p_s}$ (V_0^s до $\widetilde{V}_1^{p_s}$), т. е. удовлетворяющих равенствам $W_0^s\bigoplus V_0^s = V_1^{p_s}$ ($\widetilde{W}_0^s\bigoplus\widetilde{V}_0^s = \widetilde{V}_1^{p_s}$), где $\bigoplus$ — символ прямой суммы. Это определение пространств всплесков записывают еще в виде $W_0^s = V_1^{p_s}\dot{-}V_0^s$ ($\widetilde{W}_0^s = \widetilde{V}_1^{p_s}\dot{-}\widetilde{V}_0^s$)

Объединяя условия (3.1), (3.2) и (3.3) (последнее с $\alpha_{\psi^s}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega) = 1$), в качестве следствия для функций $f \in W_0^s$ ($\widetilde{f} \in \widetilde{W}_0^s$) получим соотношения

$$\widehat{f}(\omega) = e^{i\pi\omega}\alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)m_{\psi^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\psi^s}(\omega)\ \Big(\widehat{\widetilde{f}}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\psi}^s}(\omega)\Big), \qquad (3.4)$$

где $\alpha_f(\omega)$, $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}(\omega)$ — 1/2-периодические функции. После обратного преобразования Фурье получим $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\psi^s(x-k)$ ($\widetilde{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{d}_k\widetilde{\psi}^s(x-k)$), где d_k ($\widetilde{d}_k$) — коэффициенты из разложения $\alpha_f\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{-2\pi ik\omega}$ ($\widetilde{\alpha}_f\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{d}_k e^{-2\pi ik\omega}$), которые через сами функции f ($\widetilde{f}$) выражаются так: $d_k = \Big\langle f, \widetilde{\psi}_{0,k}\Big\rangle$ ($\widetilde{d}_k = \Big\langle \widetilde{f}, \psi_{0,k}\Big\rangle$).

Учитывая связь пространств W_j^s ($\widetilde{W_j^s}$) с V_0^s ($\widetilde{V_0^s}$), в результате получим, что любую функцию $f \in W_j^s$ ($\widetilde{f} \in \widetilde{W_j^s}$) можно разложить по базису $\{\psi_{j,k}^s(x)\}$ ($\{\widetilde{\psi}_{j,k}^s(x)\}$), $k \in \mathbb{Z}$. А тогда из определений 3, 4 и пространств W_j^s ($\widetilde{W_j^s}$) следует, что $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{r=0}^{n-1} W_{nj+r}^{j-1+r}$ ($\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{r=0}^{n-1} \widetilde{W}_{nj+r}^{j-1+r}$), откуда и из доказанного вытекает вторая часть теоремы. $\square$

4. Прямое и обратное дискретное всплеск-преобразование

Как и в случае одной масштабирующей функции, зная коэффициенты разложения $f_j^{p_s}(x)$ — проекции функции $f(x)$ на пространства $V_j^{p_s}$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$, можно найти коэффициенты разложения проекции $f(x)$ на пространства V_{j-1}^s и W_{j-1}^s. Пусть проекция $f(x)$ на пространство $V_j^{p_s}$ имеет вид $f_j^{p_s}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{p_s,j}\varphi_{j,k}^{p_s}(x)$. Тогда, так как $W_{j-1}^s \bigoplus V_{j-1}^s = V_j^{p_s}$, $s = 1, 2$, то

$$f_j^{p_s}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(c_k^{s,j-1}\varphi_{j-1,k}^s(x) + d_k^{s,j-1}\psi_{j-1,k}^s(x)\Big).$$

Учитывая масштабирующие соотношения (1.1), получим, что $c_k^{s,j-1} = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} c_l^{p_s,j}\overline{h_{l-2k}^{s,p_s}}$, $\quad d_k^{s,j-1} = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} c_l^{p_s,j}(-1)^{l+1}h_{2k+1-l}^{s,p_s}$. где $s = 1, 2, \ldots, n$, $j \in \mathbb{Z}$. Схематично этот процесс можно изобразить в виде n пирамидальных схем

$$\begin{array}{ccccc} c_k^{p_{s+1},j} & \longrightarrow & c_k^{p_s,j-1} & \longrightarrow & c_k^{s,j-2} \\ & \searrow & & \searrow & & \cdots,\ s = \overline{1,n}, \\ & & d_k^{p_s,j-1} & & d_k^{s,j-2} \end{array}$$

вместо одной для классических и для нестационарных всплесков (см., напр., [3, гл. 8]).

Зная же коэффициенты разложения проекции функции на пространства V_{j-1}^s и $W_l^{p_{s+l-1}}$, $l \geq j-1$, полученные по предыдущей схеме, можно восстановить коэффициенты проекции этой функции на все пространства $V_{p_{s+l}}^l$, $l \geq j$: $c_l^{p_s,j} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big(c_k^{s,j-1}h_{l-2k}^{s,p_s} + d_k^{s,j-1}(-1)^l\overline{h^{s,p_s}{}_{2k+1-l}}\Big)$, или в виде обратного всплеск-преобразования:

$$\begin{array}{ccccc} c_k^{s,j-1} & \longrightarrow & c_k^{p_s,j} & \longrightarrow & c_k^{p_{s+1},j+1} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \cdots,\ s = \overline{1,n}. \\ d_k^{s,j-1} & & d_k^{p_s,j} & & \end{array}$$

Аналогичные прямая и обратная схемы дискретного всплеск-преобразования получаются для двойственных пространств. Зная коэффициенты разложения $\widetilde{f}_j^{p_s}(x)$ — проекции функции $\widetilde{f}(x)$ на пространства $\widetilde{V}_j^{p_s}$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$, можно найти коэффициенты разложения проекции $\widetilde{f}(x)$ на пространства $\widetilde{V}^s_{j-1}$ и $\widetilde{W}^s_{j-1}$. Пусть проекция $\widetilde{f}(x)$ на пространство $\widetilde{V}_j^{p_s}$ имеет вид $\widetilde{f}_j^{p_s}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}_k^{p_s,j}\widetilde{\varphi}^{p_s}_{j,k}(x)$. Тогда, так как $\widetilde{W}^s_{j-1}\bigoplus\widetilde{V}^s_{j-1}=\widetilde{V}^{p_s}_{j}$, $s=1,2$, то

$$\widetilde{f}_j^{p_s}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\widetilde{c}_k^{s,j-1}\widetilde{\varphi}^s_{j-1,k}(x)+\widetilde{d}_k^{s,j-1}\widetilde{\psi}^s_{j-1,k}(x)\Big).$$

Учитывая масштабирующие соотношения, получим, что $\widetilde{c}_k^{s,j-1}=\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}_l^{p_s,j}\overline{\widetilde{h}^{s,p_s}_{l-2k}}$, $\widetilde{d}_k^{s,j-1}=\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}_l^{p_s,j}(-1)^{l+1}\widetilde{h}^{s,p_s}_{2k+1-l}$. где $s=1,2,\ldots,n$, $j\in\mathbb{Z}$. Изобразим этот процесс в виде $2n$ пирамидальных схем

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{c}_k^{p_{s+1},j} & \longrightarrow & \widetilde{c}_k^{p_s,j-1} & \longrightarrow & \widetilde{c}_k^{s,j-2} \\ & \searrow & & \searrow & & \cdots, \ s=\overline{1,n}. \\ & & \widetilde{d}_k^{p_s,j-1} & & \widetilde{d}_k^{s,j-2} \end{array}$$

Также, зная коэффициенты разложения проекции функции на пространства $\widetilde{V}^s_{j-1}$ и $\widetilde{W}_l^{p_{s+l-1}}$, $l\geq j-1$, полученные по предыдущей схеме, можно восстановить коэффициенты проекции этой функции на все пространства $\widetilde{V}^l_{p_{s+l}}$, $l\geq j$: $\widetilde{c}_l^{p_s,j}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\widetilde{c}_k^{s,j-1}\widetilde{h}^{s,p_s}_{l-2k}+\widetilde{d}_k^{s,j-1}(-1)^l\overline{\widetilde{h}^{s,p_s}_{2k+1-l}}\Big)$, или схематически:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{c}_k^{s,j-1} & \longrightarrow & \widetilde{c}_k^{p_s,j} & \longrightarrow & \widetilde{c}_k^{p_{s+1},j+1} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \cdots . \ , \ s=\overline{1,n}. \\ \widetilde{d}_k^{s,j-1} & & \widetilde{d}_k^{p_s,j} & & \end{array}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Плещева Е.А.** Новое обобщение ортогональных базисов всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 264–271.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вэйвлетам. М.; Ижевск: Динамика, 2001. 464 с.
3. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

Плещева Екатерина Александровна
канд.физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: eplescheva@gmail.com

Поступила 15.08.2016

REFERENCES

1. Pleshcheva E.A. New generalization of orthogonal wavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 124–132.
2. Daubechies I. *Ten lectures on wavelets.* Philadelphia: SIAM, 1992, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., vol. 61, 350 p.
3. Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. *Wavelet theory.* New York: AMS, 2011, Transl. Math. Monographs, vol. 239, 506 p.

E. A. Pleshcheva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: e-mail: eplescheva@gmail.com .