ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. И. Новиков

В работе найдены точные значения равномерных констант Лебега ограниченных на всей вещественной оси интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов с равноотстоящими узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору третьего порядка с постоянными действительными коэффициентами $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2+\alpha^2)$, $\alpha > 0$. Также проведено сравнение полученного результата с константами Лебега других $\mathcal{L}$-сплайнов.

Ключевые слова: интерполяция, сплайн, константа Лебега.

S. I. Novikov. Lebesgue constants for some interpolational $\mathcal{L}$-splines.

We find exact values for the uniform Lebesgue constants of interpolational $\mathcal{L}$-splines that are bounded on the real axis, have equidistant knots, and correspond to the linear third-order differential operator $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2+\alpha^2)$ with constant real coefficients, where $\alpha > 0$. We compare the obtained result with the Lebesgue constants of other $\mathcal{L}$-splines.

Keywords: interpolation, spline, Lebesgue constant.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-215-224

Введение

Сначала введем обозначения и дадим нужные определения.

Пусть D — оператор дифференцирования,

$$\mathcal{L}_n(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

— произвольный линейный дифференциальный оператор порядка n ($n \geq 2$) с постоянными вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $p_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ — его характеристический полином, $T_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ — множество всех нулей полинома p_n. Если $p_n(-z) = (-1)^n p_n(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, то такой дифференциальный оператор будем называть *формально самосопряженным.*

Через $C^k(\mathbb{R})$ обозначаем множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, $C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$, $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство ограниченных, непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{R}\}$, а $l_\infty(\mathbb{Z})$ — пространство ограниченных последовательностей $y = \{y_\nu\}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$, снабженное нормой $\|y\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} = \sup\{|y_\nu|\colon \nu \in \mathbb{Z}\}$. В дальнейшем индексы в обозначениях норм будем опускать.

Пусть $\Delta_h = \{jh\colon j \in \mathbb{Z}\}$ — равномерная сетка на $\mathbb{R}$ с шагом h.

$\mathcal{L}$-сплайнами, соответствующими линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n(D)$, с узлами в точках сетки Δ_h будем называть функции s_n, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $s_n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$,

2) $\mathcal{L}_n(D)s_n(x) = 0$ $\forall x \in (jh, (j+1)h), \forall j \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что если $\mathcal{L}_n(D) = D^n$, то $\mathcal{L}$-сплайн становится полиномиальным сплайном.

Пространство $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n(D)$, с узлами в точках сетки Δ_h обозначаем $\mathbb{S}_{\mathcal{L}_n}$. Далее всюду, где это не вызывает недоразумений, будем опускать указание на дифференциальный оператор и сетку узлов $\mathcal{L}$-сплайнов.

Введем еще одну равномерную сетку $\widetilde{\Delta}_h$, которая получается из сетки Δ_h сдвигом всех ее точек на фиксированную величину $a \in [0,1)$, т. е. $\widetilde{\Delta}_h = \{(j+a)h\colon j \in \mathbb{Z}\}$. В точках сетки $\widetilde{\Delta}_h$ будем интерполировать элементами пространства $\mathbb{S}_{\mathcal{L}_n}$. Предположим, что сдвиг сетки точек интерполяции a и ее шаг h выбраны так, что задача интерполяции разрешима для любой последовательности интерполируемых данных $y = \{y_j\colon j \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Тогда на множестве $l_\infty(\mathbb{Z})$ можно определить линейный оператор S_n, который каждому $y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ставит в соответствие ограниченный $\mathcal{L}$-сплайн, интерполирующий y в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h$, т. е. $S_n\colon l_\infty(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{S}_{\mathcal{L}_n} \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Норму этого оператора будем называть *константой Лебега $\mathcal{L}$-сплайн интерполяции* $\|S_n\| = \sup\limits_{\|y\|\le 1} \|S_n y\|$.

Исследование констант Лебега интерполяционных процессов является одной из важных задач теории интерполяции. В численном анализе константы Лебега позволяют оценить устойчивость интерполяционного процесса относительно погрешности интерполируемых данных, поскольку для любых $y,\ \widetilde{y} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ имеет место оценка $\|S_n y - S_n\widetilde{y}\| = \|S_n(y-\widetilde{y})\| \le \|S_n\|\,\|y-\widetilde{y}\|$.

Отметим известные результаты нахождения точных значений констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов.

Сначала обратимся к случаю $\mathcal{L}_n(D) = D^n$, т. е. к интерполяции полиномиальными сплайнами. Здесь сдвиг сетки узлов интерполяции выбирался следующим образом: $a = 0$, если n четно и $a = 1/2$, если n нечетно, поскольку при таком выборе параметра a интерполяционные сплайны существуют, однозначно определяются интерполируемыми данными (см. [1], а также [2, Теорема 1, лекция 4]) и приближают стандартные соболевские классы функций с точностью наилучшей аппроксимации (этот факт является частным случаем результата [3, теорема 4]). Значения констант Лебега найдены в работах [4; 5] при всех $n \ge 3$, где в частности было установлено, что

$$\|S_3\| = \sqrt{2}, \quad \|S_4\| = \frac{1+3\sqrt{3}}{4}\ . \tag{0.1}$$

Для линейных дифференциальных операторов вида $\mathcal{L}_{2k+1}(D) = D(D^2-t_1^2)\dots(D^2-t_k^2)$, где $t_1, t_2, \dots, t_k$ — вещественные числа (это формально самосопряженные операторы нечетного порядка, все корни характеристических полиномов которых вещественны) в работах [6; 7] исследовано поведение последовательности констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов $\{S_{2k+1}\}_{k=1}^{+\infty}$ в зависимости от свойств последовательности чисел $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$, определяющих семейство дифференциальных операторов. Также в [7, p. 238] получено представление констант Лебега в виде контурных интегралов по единичной окружности комплексной плоскости. Сдвиг интерполяционной сетки a был выбран таким же, как и в случае полиномиальных сплайнов нечетного порядка. Для линейных дифференциальных операторов третьего порядка вида $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2),\ \beta \in \mathbb{R}$, явные выражения констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов получены в [8, теорема 3], где установлено, что

$$\|S_3\| = \sqrt{2}\ \frac{\operatorname{ch}\beta \mathrm{h}/4}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta h/2}}\ . \tag{0.2}$$

Для линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_3(D) = D(D-\beta)(D-\gamma)$ (т. е. дифференциальных операторов третьего порядка, не являющихся формально самосопряженными) при выполнении условия $\beta\gamma < 0$ константы Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов найдены в [9]. Сдвиг интерполяционной сетки a в этом случае определялся первым положительным нулем соответствующего $\mathcal{L}$-сплайна Эйлера (более подробно о сдвиге сетки см., например, [10]).

Для всех указанных выше классов дифференциальных операторов были также вычислены константы Лебега периодических интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [8; 9; 11] и ссылки в этих работах).

Настоящая работа посвящена нахождению точных значений констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих дифференциальному оператору третьего порядка вида $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2),\ \alpha > 0$. Характерной особенностью этого дифференциального оператора является наличие пары комплексно сопряженных корней его характеристического полинома. Этот факт делает невозможным в полной мере использовать подходы, развитые в отмеченных выше работах [6–9]. Он же приводит к необходимости налагать ограничение на шаг h сетки узлов интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна, которое обеспечивает неосцилляцию решений однородного дифференциального уравнения $u''(t) + \alpha^2 u(t) = 0$ (см., например, [12, Теорема 1]) на каждом отрезке между любыми двумя последовательными узлами сетки Δ_h.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть $a = 1/2,\ 0 < h < \pi/\alpha,\ \alpha > 0$. Тогда константы Лебега $\|S_3\|$ интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, с узлами на сетке $\Delta_h = \{jh\colon j \in \mathbb{Z}\}$ и интерполяцией в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h = \{(j + a)h\colon j \in \mathbb{Z}\}$ имеют следующее явное выражение:

$$\|S_3\| = \sqrt{2}\,\frac{\cos\dfrac{\alpha h}{4}}{\sqrt{\cos\dfrac{\alpha h}{2}}}\ .$$

Прежде чем доказывать основной результат, получим представление фундаментального $\mathcal{L}$-сплайна в виде контурного интеграла по единичной окружности комплексной плоскости, аналогичное [7, p. 238], а затем изучим некоторые свойства этой функции.

1. Фундаментальный $\mathcal{L}$-сплайн и его свойства

Как известно, фундаментальный $\mathcal{L}$-сплайн L_3 есть элемент пространства $\mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$, который удовлетворяет интерполяционным условиям $L_3(\nu h + h/2) = \delta_{0,\nu},\ \nu \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{0,\nu}$ — символ Кронекера. Если $0 < h < \tau/\alpha$, то L_3 существует и единствен. Для любой последовательности интерполируемых данных $y = \{y_\nu\}$ интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн записывается в виде

$$s_n(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu L_3(x - \nu h). \tag{1.1}$$

Теперь при $0 \le x \le h,\ 0 < h < \tau/\alpha$, и любом $z \in \mathbb{C}$ определяем функцию двух переменных

$$W(x, z) = z^2\ (1 - \cos\alpha x) + z(\cos\alpha x - 2\cos\alpha h + \cos\alpha(h - x)) + 1 - \cos\alpha(h - x).$$

Лемма 1. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то функция $W(h/2, z)$ имеет два вещественных нуля, которые являются простыми, отрицательными, и только один из них по модулю меньше единицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нули функции $W(h/2, z)$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2\Big(1 - \cos\frac{\alpha h}{2}\Big) + 2z\ \Big(\cos\frac{\alpha h}{2} - \cos\alpha h\Big) + \Big(1 - \cos\frac{\alpha h}{2}\Big) = 0$$

с дискриминантом, равным $32\sin^2(\alpha h/4)\sin^2(\alpha h/2)\cos(\alpha h/2)$. Поскольку при $0 < h < \pi/\alpha$ дискриминант положителен, то оба корня вещественные. Так как старший коэффициент равен свободному члену, корни имеют одинаковые знаки, а поскольку $W(h/2, 0) > 0,\ W(h/2, -1) < 0$, то они отрицательные и расположены на вещественной оси по разные стороны от точки -1. Лемма 1 доказана.

Следующее утверждение легко проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 2. *При любом $z \in \mathbb{C}$ имеют место равенства*

$$W(h,z) = zW(0,z), \quad \frac{\partial W(x,z)}{\partial x}\Big|_{x=h} = z\,\frac{\partial W(x,z)}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

Лемма 3. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то при любом фиксированном $z < 0$ функция $W(x,z)$ имеет на полуинтервале $[0,h)$ единственный нуль, и этот нуль простой.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $z < 0$, $z \neq -1$. Из леммы 2 видно, что непрерывно дифференцируемая функция $W(x,z)$ и ее производная по x принимают в точках $x = 0$, $x = h$ значения разных знаков. Следовательно, как $W(x,z)$, так и $W'_x(x,z)$ имеют на интервале $(0,h)$ один или несколько нулей. Однако, $W'_x(x,z) = \alpha(z-1)g(x)$, где $g(x) = (z - \cos\alpha h)\sin\alpha x + \sin\alpha h\cos\alpha x$. Поскольку нули функции $g(x)$ простые и расстояние между любыми двумя соседними нулями равно π/α, а $0 < h < \pi/\alpha$, то на $(0,h)$ функция $W'_x(x,z)$ имеет в точности один нуль, и этот нуль простой. Поэтому на $[0,h)$ функция $W(x,z)$ только один раз меняет характер монотонности (сначала возрастает, потом убывает или наоборот). Учитывая, что значения функции $W(x,z)$ в точках $x = 0$ и $x = h$ имеют разные знаки, заключаем, что на интервале $(0,h)$ есть только одна точка, в которой $W(x,z)$ обращается в нуль.

Пусть теперь $z = -1$. В этом случае $W(0,-1) = W(h,-1) = 0$ и $W'_x(x,-1) = 0$ на $(0,h)$ только при $x = h/2$. Следовательно, точка $x = 0$ является единственным нулем функции $W(x,-1)$ на полуинтервале $[0,h)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то для всех $0 \le t \le h$ при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ справедливо представление*

$$L_3(t - \mu h) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{W(t,z)}{z^{\mu+1}\,W(h/2,z)}\,dz, \tag{1.2}$$

где i — мнимая единица, а обход контура интегрирования происходит в положительном направлении.

Доказательство. Сначала проверяем выполнение условий интерполяции

$$L_3(\nu h + h/2) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} z^{\nu-1}dz = \delta_{0,\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Теперь покажем, что $L_3 \in C^1(\mathbb{R})$. Воспользовавшись первым из равенств леммы 2, при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ получаем

$$L_3(\mu h + 0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{W(h,z)}{z^{-\mu+2}\,W(h/2,z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{z^{-\mu+1}\,W(h/2,z)}\,dz = L_3(\mu h - 0);$$

для производной с помощью второго равенства леммы 2 имеем $L'_3(\mu h + 0) = L'_3(\mu h - 0)$.

Равенство $\mathcal{L}_3(D)L_3(x) = 0$ при любом $x \in (\mu h, (\mu+1)h)$, $j \in \mathbb{Z}$ легко следует из явного вида функции $W(x,z)$ с помощью дифференцирования под знаком интеграла.

Убедимся, что функция $L_3(x)$ вещественная. Действительно, подынтегральное выражение в (1.2) имеет два вида особенностей: $z = 0$ при $\mu = 0, 1, \ldots$ и нули функции $W(h/2,z)$. Остается применить теорему Коши о вычетах к интегралу в правой части (1.2) и воспользоваться леммой 1. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $L_3(\tau) = L_3(h-\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(\tau) = L_3(h-\tau) - L_3(\tau)$. Очевидно, что $\varphi(h/2) = 0$. Кроме того, при всех целых $\nu \neq 0$ согласно определению фундаментального $\mathcal{L}$-сплайна имеем $\varphi(\nu h + h/2) = L_3(h/2 - \nu h) - L_3(h/2 + \nu h) = 0$. Таким образом, функция $\varphi(\tau)$ интерполирует на сетке $\widetilde{\Delta}_h$ нулевые значения. Поскольку дифференциальный оператор $\mathcal{L}_3(D)$ является формально самосопряженным, то $\varphi \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$, и в силу единственности интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна получаем, что $\varphi(\tau) \equiv 0$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $0 < h < \pi/\alpha$. *Тогда*
1) *если* $\mu = -1, -2, \ldots$, *то* $\operatorname{sign} L_3(t-\mu h) = (-1)^\mu \operatorname{sign}(t - h/2)$, *где* $0 \le t < h$,
2) *если* $\mu = 1, 2, \ldots$, *то* $\operatorname{sign} L_3(t-\mu h) = (-1)^\mu \operatorname{sign}(h/2 - t)$, *где* $0 < t \le h$,
3) $\operatorname{sign} L_3(t) = 1$, *где* $0 \le t \le h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mu = -1, -2, \ldots$. В этом случае особыми точками подынтегральной функции в (1.2) являются только нули функции $W(h/2, z)$. Согласно лемме 1 внутри единичного круга с центром в начале координат расположен только один из двух ее нулей, который мы обозначаем $\lambda(h/2)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\lambda\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\cos\alpha h - \cos\dfrac{\alpha h}{2} + 2\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\alpha h}{4}\sin\dfrac{\alpha h}{2}\sqrt{\cos\dfrac{\alpha h}{2}}}{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{4}}\,.$$

Применяя теорему Коши о вычетах к интегралу в правой части (1.2) и учитывая, что точка $\lambda(h/2)$ является полюсом первого порядка, получаем

$$L_3(t-\mu h) = \frac{W(t, \lambda(h/2))}{(\lambda(h/2))^{\mu+1}\, W'_z(h/2, z)\,|_{z=\lambda(h/2)}}\,. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что при $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место

$$W'_z\left(\frac{h}{2}, z\right)\Big|_{z=\lambda(h/2)} = 4\sqrt{2}\,\sin\frac{\alpha h}{4}\sin\frac{\alpha h}{2}\sqrt{\cos\frac{\alpha h}{2}} > 0, \tag{1.4}$$

а функция $W(t, \lambda(h/2))$ обращается в нуль в точке $t = h/2$. Так как $\lambda(h/2) < 0$, то согласно лемме 3 функция $W(t, \lambda(h/2))$ не имеет других нулей на полуинтервале $[0, h)$. Нетрудно видеть, что при переходе через точку $h/2$ она меняет знак с плюса на минус, и поскольку $\lambda(h/2) < 0$, то из (1.3) следует доказываемое утверждение.

2) Пусть $\mu = 1, 2, \ldots$. В утверждении леммы 5 полагаем $\tau = t - \mu h$ и берем sign от обеих его частей. В результате имеем $\operatorname{sign} L_3(t-\mu h) = \operatorname{sign} L_3((h-t) - \mu_1 h)$, где $\mu_1 = -\mu$. Поскольку $\mu_1 = -1, -2\ldots$, то, используя п. 1), получаем

$$\operatorname{sign} L_3(t-\mu h) = (-1)^{\mu_1}\operatorname{sign}(h - t - h/2) = (-1)^\mu \operatorname{sign}(h/2 - t).$$

3) Пусть $\mu = 0$. В этом случае подынтегральная функция в (1.2) имеет в области $|z| < 1$ две особые точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \lambda(h/2)$, каждая из которых является полюсом первого порядка. Вновь применяя теорему Коши о вычетах к правой части (1.2), получаем

$$L_3(t) = \frac{W(t, 0)}{W(h/2, 0)} + \frac{W(t, \lambda(h/2))}{(\lambda(h/2))\, W'_z(h/2, \lambda(h/2))}\,. \tag{1.5}$$

Поскольку $W(t, 0) = 1 - \cos\alpha(h-t) > 0$ и $W(h/2, 0) = 1 - \cos(\alpha h/2) > 0$, то первое слагаемое в правой части (1.5) положительно при всех $t \in [0, h)$ и равно нулю при $t = h$. Как отмечено в п. 1), функция $W(t, \lambda(h/2))$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $h/2$, поэтому $W(t, \lambda(h/2)) < 0$ на $(h/2, h]$. Этот факт наряду с отрицательностью $\lambda(h/2)$ и неравенством (1.4) позволяет сделать вывод, что второе слагаемое в (1.5) положительно при всех $t \in (h/2, h]$. Таким образом, $\operatorname{sign} L_3(t) = 1$ для $h/2 < t \le h$.

Если $0 \le t < h/2$, то $h - t \in (h/2, h]$, и в силу доказанного выше результата для $(h/2, h]$ и леммы 5 получаем, что $\operatorname{sign} L_3(t) = 1$ $\forall t \in [0, h/2)$. Остается учесть, что $L_3(h/2) = 1$. Таким образом, п. 3), а вместе с ним и лемма 6 доказаны.

З а м е ч а н и е. Для $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых произвольным формально самосопряженным дифференциальным оператором нечетного порядка, все корни характеристического полинома которого являются вещественными, лемма 6 была доказана в работе [7, § 3] без ограничения на шаг сетки узлов интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна. Наше доказательство в целом основано на той же идее. Можно показать, что для $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых дифференциальным оператором $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, $\alpha > 0$, отказ от ограничения $0 < h < \pi/\alpha$ может привести к ситуации, когда интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны даже могут не существовать.

2. Доказательство основного результата и комментарии

Прежде всего отметим, что при выбранном значении сдвига сетки точек интерполяции относительно сетки узлов $\mathcal{L}$-сплайна $a = h/2$ и наложенном в теореме ограничении на шаг $0 < h < \pi/\alpha$ существование и единственность $\mathcal{L}$-сплайн интерполянта для каждого набора интерполируемых данных $y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ следуют из результата В. Т. Шевалдина [10, §2], и, как показано в работе автора [13, Теорема 2], ограниченные интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны приближают стандартные соболевские классы дифференцируемых функций с точностью наилучшей аппроксимации. Теперь переходим непосредственно к доказательству теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $s_3(x)$ обозначаем $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка, соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, $\alpha > 0$, который интерполирует в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h = \{(j + 1/2)h \colon j \in \mathbb{Z}\}$ последовательность $y = \{y_\nu\}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ с $\|y\| \le 1$.

Из представления (1.1) получаем

$$|s_3(x)| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |y_\nu|\ |L_3(x - \nu h)| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x - \nu h)|. \tag{2.1}$$

Пусть

$$\Phi(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x - \nu h)|.$$

Легко видеть, что функция $\Phi(x)$ является периодической с периодом h. Кроме того, она четная, поскольку, применяя лемму 5 при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\Phi(-x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(-x - \nu h)| = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(\nu h - x)| = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(h - (x - (\nu - 1)h)|$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x - (\nu - 1)h)| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |L_3(x - mh)| = \Phi(x).$$

Покажем, что на отрезке $[-h/2, h/2]$ функция $\Phi(x)$ совпадает с некоторым интерполяционным $\mathcal{L}$-сплайном.

Пусть $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_\nu \colon \nu \in \mathbb{Z}\}$, где

$$\widetilde{y}_\nu = \begin{cases} (-1)^\nu, & \nu = 0, 1, \dots, \\ (-1)^{\nu+1}, & \nu = -1, -2 \dots \end{cases} \tag{2.2}$$

Из (2.2) имеем

$$\widetilde{y}_\nu = \widetilde{y}_{-\nu-1} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Полагаем

$$\sigma(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widetilde{y}_\nu L_3(x - \nu h). \tag{2.4}$$

Ясно, что $\sigma \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$. Убедимся, что $\sigma(x)$ также является четной функцией. Рассмотрим $\sigma(-x)$. Поскольку дифференциальный оператор $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2+\alpha^2)$ формально самосопряжен, то $\sigma(-x) \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$ и нетрудно видеть, что $\sigma(-x)$ интерполирует в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h = \{(j+1/2)h : j \in \mathbb{Z}\}$ последовательность $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_\nu\}$. Поэтому $\varphi(x) = \sigma(x) - \sigma(-x) \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$, и в силу (2.3) при всех $j \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$\varphi((j+1/2)h) = \sigma((j+1/2)h) - \sigma((-j-1/2)h) = \widetilde{y}_\nu - \widetilde{y}_{-\nu-1} = 0.$$

Поскольку $0 < h < \pi/\alpha$, то в силу единственности интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна получаем $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. $\sigma(x) = \sigma(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Воспользовавшись леммой 6, четностью функций Φ и σ и соотношениями (2.2), (2.4) для $x \in [-h/2, h/2]$ получаем

$$\Phi(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x-\nu h)| = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} L_3(x-\nu h)\ \mathrm{sign}\ L_3(t-\nu h)$$

$$= L_3(x) + \sum_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^\nu L_3(x-\nu h) + \sum_{\nu=-\infty}^{-1}(-1)^{\nu+1}L_3(x-\nu h) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widetilde{y}_\nu L_3(x-\nu h) = \sigma(x).$$

Поскольку неравенства (2.1) обращаются в равенства при $y = \widetilde{y}$, то для константы Лебега имеем $\|S_3\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \Phi(x)$. В силу свойств функций Φ и σ (h-периодичности и четности функции Φ, четности σ и совпадению $\Phi(x)$ с $\sigma(x)$ для $x \in [-h/2, h/2]$) это равенство переписывается в виде

$$\|S_3\| = \max_{x\in[0,h/2]} \sigma(x). \tag{2.5}$$

Поскольку $\sigma(x)$ — четная непрерывно дифференцируемая функция, то $\sigma'(0) = 0$. Убедимся, что $\sigma'(x)$ не имеет других нулей на $(0, h/2]$. Действительно, $\sigma'(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x$, где a и b — некоторые вещественные константы. Так как нули функции $\sigma'(x)$ простые и расстояние между любыми двумя соседними нулями равно π/α, а $0 < h < \pi/\alpha$, то на $(0, h/2]$ функция $\sigma'(x)$ не имеет нулей. Это обстоятельство и тот факт, что $\sigma(h/2) = 1$, позволяют переписать (2.5) в виде

$$\|S_3\| = \max\{1, \sigma(0)\}. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (1.2) имеем

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg\{ \sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{z^{\nu+1}\ W(h/2,z)}\ dz + \sum_{\nu=-\infty}^{-1}(-1)^{\nu+1} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{z^{\nu+1}\ W(h/2,z)}\ dz \Bigg\}.$$

Согласно лемме 1 функция $W(h/2, z)$ не имеет нулей на окружности $|z| = 1$. В силу непрерывности она не обращается в нуль и в некотором кольце $1-2\varepsilon < |z| < 1+2\varepsilon$ при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$. В частности, $W(h/2, z) \neq 0$ на каждой из двух окружностей $|z| = 1-\varepsilon$ и $|z| = 1+\varepsilon$. Поэтому применяя интегральную теорему Коши для составного контура к каждому из двух интегралов предыдущего равенства и затем меняя местами знаки сумм и интегралов, получаем

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg\{ \oint\limits_{|z|=1-\varepsilon} \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu}{z^{\nu+1}}\right)\frac{W(0,z)}{W(h/2,z)}\ dz + \oint\limits_{|z|=1+\varepsilon} \Big(\sum_{\nu=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{z^{\nu+1}}\Big)\frac{W(0,z)}{W(h/2,z)}\ dz \Bigg\}.$$

Поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{1+z}$$

при $|z| > 1$ (в частности, на окружности $|z| = 1 + \varepsilon$), а

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j z^j = \frac{1}{1+z}$$

при $|z| < 1$ (в частности, на окружности $|z| = 1 - \varepsilon$), то

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i} \Bigg\{ \oint\limits_{|z|=1-\varepsilon} \frac{W(0,z)}{(z+1)W(h/2,z)}\, dz + \oint\limits_{|z|=1+\varepsilon} \frac{W(0,z)}{(z+1)W(h/2,z)}\, dz \Bigg\}. \tag{2.7}$$

Убедимся, что в точке $z = -1$ особенности подынтегральных функций можно устранить. Действительно, так как $W(0,-1) = 0$, то

$$\lim_{z \to -1} \frac{W(0,z)}{z+1} = W'_z(0,-1) = 2\sin^2 \frac{\alpha h}{2},$$

и остается доопределить $W(0,z)/(z+1)$ в точке $z = -1$ найденным значением предела.

Теперь применяем интегральную теорему Коши для составного контура к интегралам в правой части (2.7) и получаем

$$\sigma(0) = \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{(z+1)W(h/2,z)}\, dz.$$

Внутри контура $|z| = 1$ содержится только одна особая точка подынтегральной функции — нуль функции $W(h/2,z)$, который обозначаем $\lambda(h/2)$. В доказательстве леммы 6 приведено явное выражение $\lambda(h/2)$. Эта особая точка является полюсом первого порядка. Вычислив интеграл с помощью теоремы Коши о вычетах, после выполнения элементарных преобразований имеем

$$\sigma(0) = \sqrt{2}\, \frac{\cos \dfrac{\alpha h}{4}}{\sqrt{\cos \dfrac{\alpha h}{2}}}.$$

Легко убедиться в том, что правая часть последнего равенства при $0 < h < \pi/\alpha$ больше единицы. (2.6) и последнее равенство завершают доказательство. Теорема доказана.

Сделаем некоторые замечания, которые позволяют понять, как связана теорема с другими результатами, относящимися к константам Лебега сплайн-аппроксимации.

Прежде всего отметим, что переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в утверждении теоремы и в неравенстве, ограничивающем шаг сетки, получаем известный результат (0.1) для констант Лебега параболических интерполяционных сплайнов.

Кроме того, если положить $\alpha = i\beta$ (i — мнимая единица, $\beta \in \mathbb{R}$), то результат теоремы переходит в соотношение (0.2), полученное для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых дифференциальным оператором $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$. Разумеется, такая замена не может являться доказательством соотношения (0.2).

Наряду с интерполяционными в теории сплайнов изучаются также локальные (неинтерполяционные) сплайны, которые характеризуются тем, что являются точными на ядре порождающего их дифференциального оператора или на некотором подпространстве этого ядра. Для дифференциального оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, $\alpha > 0$, В. Т. Шевалдин и Е. В. Стрелкова в 2016 г. нашли константы Лебега $\|S_{3,loc}\|$ локальных $\mathcal{L}$-сплайнов, точных на двух функциях $\sin \alpha x, \cos \alpha x$ из ядра этого оператора. Они доказали, что если $0 < h < \pi/\alpha$, то

$$\|S_{3,loc}\| = \Big(\cos \frac{\alpha h}{2}\Big)^{-1}.$$

Сравнение этого результата с теоремой показывает, что при выполнении неравенства $0 < h < 2\Theta_0/\alpha$, где $\Theta_0 = \arccos((\sqrt{5}-1)/2) \approx 0.90456$, константы Лебега локальных $\mathcal{L}$-сплайнов оказываются меньше констант Лебега интерполяционных, в то время как при $2\Theta_0/\alpha < h < \pi/\alpha$, наоборот, константы Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов меньше констант Лебега локальных; если же $2\Theta_0/\alpha = h$, то эти величины совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. **Schoenberg I.J.** Cardinal spline interpolation. Philadelphia: SIAM, 1973. 125 p.
3. **Новиков С.И.** Приближение одного класса дифференцируемых функций $\mathcal{L}$-сплайнами // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 3. С. 393–408.
4. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
5. **Richards F.** The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, no. 2. P. 83–92.
6. **Tzimbalario J.** Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Canad. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
7. **Morsche H.G.** On the Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no 3. P. 232–246.
8. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 81, № 1. С. 59–68.
9. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
10. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
11. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
12. **Troch I.** On the interval of disconjugacy of linear autonomous differential equation // SIAM J. Math. Analysis. 1981. Vol. 12, no. 1. P. 78–89.
13. **Novikov S.I.** On $\mathcal{L}$-spline interpolation and approximation on the whole real line // Approximation and function spaces. (Warsaw, 1986). Warsaw: PWN, 1989. P. 293–300. (Banach Center Publ.; vol. 22.)

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 09.09.2016

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Tr. Mat. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78, p. 24–42 (in Russian).
2. Schoenberg I.J. *Cardinal spline interpolation.* Philadelphia: SIAM, 1973, 125 p.
3. Novikov S.I. Approximation of a class of differentiable functions by $\mathcal{L}$-splines. *Math. Notes*, 1983, vol. 33, no. 3, pp. 200–208.
4. Richards F. Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator. *J. Approx. Theory*, 1973, vol. 7, no. 3, pp. 302–317.
5. Richards F. The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation. *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 14, no. 2, pp. 83–92.
6. Tzimbalario J. Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation. *Canad. J. Math.*, 1977, vol. 29, no. 2, pp. 441–448.
7. Morsche H.G. On the Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation. *J. Approx. Theory*, 1985, vol. 45, no. 3, pp. 232–246.

8. Kim V.A. Exact Lebesgue constants for interpolatory $\mathcal{L}$-splines of third order. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, no. 1, pp. 55–63.
9. Kim V.A. Sharp Lebesgue constants for bounded cubic interpolation $\mathcal{L}$-splines. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 2, pp. 267–276.
10. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320.
11. Subbotin Yu.N., Telyakovskii S.A. Asymptotic behaviour of the Lebesgue constants of periodic interpolation splines with equidistant nodes. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 8, pp. 1233–1242.
12. Troch I. On the interval of disconjugacy of linear autonomous differential equation. *SIAM J. Math. Analysis*, 1981, vol. 12, no. 1, pp. 78–89.
13. Novikov S.I. On $\mathcal{L}$-spline interpolation and approximation on the whole real line. *Approximation and function spaces* (*Warsaw, 1986*). Warsaw: PWN, 1989, Ser. Banach Center Publ., vol. 22, pp. 293–300.

S. I. Novikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .