ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.17

ГРАФЫ, В КОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫЕ ПОДГРАФЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫ СО ВТОРЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 5[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t. Ранее задача Кулена была решена для $t = 4$. В данной работе завершена классификация дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются сильно регулярными графами со вторым собственным значением r, $4 < r \leq 5$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, собственное значение, дистанционно регулярный граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Graphs in which local subgraphs are strongly regular with second eigenvalue 5.

J. Koolen proposed the problem of studying distance-regular graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with second eigenvalue $\leq t$ for a given positive integer t. Earlier Koolen's problem was solved for $t = 4$. We complete the classification of distance-regular graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with second eigenvalue r, where $4 < r \leq 5$.

Keywords: strongly regular graph, eigenvalue, distance-regular graph.

MSC: 05B25, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-188-200

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Окрестности вершин называются также *локальными подграфами.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом. Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$. Дистанционно регулярный граф диаметра d имеет $d + 1$ собственных значений: $k = \theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$, и θ_i называется $(i + 1)$-м *собственным значением.*

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае (имеет параметры $(4\mu + 1, 2\mu, \mu - 1, \mu)$),

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теоремы 1 и 4) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теоремы 2 и 3).

а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с $k' = 2\mu'$, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора [1]. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, \ldots$ ..

Ранее задача Кулена была решена для $t = 3$ (окончательный результат см. в [2]) и для $t = 4$ [3]. В данной работе решается задача Кулена для $t = 5$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a,l) \in (P,\mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P, и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Сильно регулярный граф Γ со вторым собственным значением $m-1$ назовем *исключительным*, если он не принадлежит следующему списку:

(1) объединение изолированных m-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t+m-1,t)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s,m-1)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, $(-1+\sqrt{4\mu+1})/2 = m-1$.

В данной работе доказаны четыре теоремы, дающие список массивов пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим 5. В доказательствах были использованы компьютерные вычисления (см. алгоритмы 1 и 2).

Сначала приведем теорему редукции к графам, в которых окрестности вершин — исключительные графы со вторым собственным значением 5 (анонсировано в [4]).

Теорема 1 (Теорема редукции). *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением* t, $4 < t \le 5$, *и — вершина графа* Γ. *Тогда* $[u]$ *— исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением* 5, *или верно одно из утверждений*:

(1) $[u]$ *— объединение изолированных* 6*-клик*;

(2) $[u]$ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-5}(s,s-5)$, *и либо*

(i) $s = 6$ *и* Γ *— граф Джонсона* $J(14,7)$, *его стандартное частное или граф с массивом пересечений* $\{49,36,1;1,12,49\}$, *либо*

(ii) $s = 7$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{64,42,1;1,21,64\}$, *либо*

(iii) $s = 10$ *и* Γ *— граф Тэйлора*;

(3) $[u]$ *— дополнение псевдогеометрического графа для* $pG_6(s,5)$, $s = 12$ *и* Γ *— граф Тэйлора*;

(4) $[u]$ *— граф в половинном случае с параметрами* $(4l+1, 2l, l-1, l)$, $l \in \{21,22,24,25,27,28,29,30\}$ *и* Γ *— граф Тэйлора.*

В следующих двух теоремах найдены параметры исключительных графов со вторым собственным значением 5. Всего имеется 842 набора (набор $(3263897, 3220950, 3178475, 3185550)$ отвечает графу с наибольшим числом вершин). Из них 378 наборов отвечают псевдогеометрическим графам ($pG_{445}(450,4094)$ отвечает максимальному s, $pG_{408}(413,5304)$ — максимальному t). В теоремах 2 (133 набора, отвечающих непсевдогеометрическим графам) и 3 (65 наборов, отвечающих псевдогеометрическим графам) перечислены наборы параметров графов, которые могут быть окрестностями вершин во вполне регулярном графе диаметра, большего 2 (для которых число w из леммы 1.1 не больше $v-k-1$).

Теорема 2. *Пусть Γ — исключительный непсевдогеометрический сильно регулярный граф с неглавным собственным значением 5. Тогда его параметры приведены в табл. 1.*

Теорема 3. *Пусть Γ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s,t)$. Если Γ вкладывается в качестве окрестности вершины в дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, то его параметры (s,t) приведены в табл. 2.*

С помощью теоремы 3 в [5] анонсирован список массивов пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$.

Предложение 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$, в котором окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) *$s = 10$, и Γ — граф Тэйлора*;

(2) *$s = 7$, и либо $t = 1$ и Γ — локально $T(9)$-граф с массивом пересечений $\{36, 21, 10, 3; 1, 6, 15, 28\}$ (половинный 9-куб), либо $t = 18$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{512, 378, 1; 1, 189, 512\}$*;

(3) *$s = 6$, и либо $t = 4$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{175, 144, 22; 1, 24, 154\}$ или $\{175, 144, 1; 1, 12, 175\}$, либо $t = 8$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{343, 288, 1; 1, 96, 343\}$.*

Ввиду теорем 1, 2 и предложения 1 завершает решение задачи Кулена для $t = 5$ следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин имеют параметры из заключения теоремы 2. Тогда параметры окрестности и массив пересечений Γ приведены в табл. 3.*

1. Предварительные результаты

Лемма 1.1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями $\theta_1 = 5$, θ_2, Δ — регулярный подграф из Γ степени μ на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu - 5)v/(k - 5) \leq w \leq (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$;

(2) *если X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$, то $x_0 \cdot w \leq (v - x_0)(v - w)(5 - \theta_2)^2/(2k - 5 - \theta_2)^2$*;

(3) *если $x_0 = w$, то $w \leq v(5 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [6, предложение 4.6.1] имеем $\theta_2 \leq \mu - (k - \mu)w/(v - w) \leq 5$, поэтому $(\mu - 5)(v - w) \leq (k - \mu)w \leq (\mu - \theta_2)(v - w)$. Отсюда $(\mu - 5)v/(k - 5) \leq w \leq (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда $x_0 \cdot w \leq (v - x_0)(v - w)(5 - \theta_2)^2/(2k - 5 - \theta_2)^2$.

Если $\mu = w$, то $\mu(2k - 5 - \theta_2) \leq (v - \mu)(5 - \theta_2)$ и $\mu \leq v(5 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d и окрестность некоторой вершины в Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями $5, \eta_2$. Если $\mu' > 5$, то диаметр Γ не больше 3.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $d(\Gamma) \geq 4$, то в окрестности вершины содержится объединение двух изолированных μ-подграфов, т. е. подграф с собственным значением μ' кратности не меньше 2. Значит, из переплетения спектров [6, предложение 3.2.1] следует, что для всех наборов параметров с $\mu' > 5$ диаметр Γ не больше 3. Лемма доказана.

Таблица 1

Параметры сильно регулярных графов из теоремы 2

$(144,65,28,30)$	$(529,120,17,30)$	$(961,160,9,30)$	$(1521,200,1,30)$
$(162,23,4,3)$	$(540,77,4,12)$	$(969,176,13,36)$	$(1534,525,140,200)$
$(169,70,27,30)$	$(540,245,100,120)$	$(981,392,133,172)$	$(1587,488,109,168)$
$(171,50,13,15)$	$(576,125,16,30)$	$(1003,300,65,100)$	$(1600,205,0,30)$
$(196,75,26,30)$	$(606,275,112,135)$	$(1024,165,8,30)$	$(1625,580,165,230)$
$(208,45,8,10)$	$(616,75,2,10)$	$(1036,375,110,150)$	$(1681,784,327,399)$
$(210,95,40,45)$	$(625,130,15,30)$	$(1080,221,22,51)$	$(1922,904,381,464)$
$(235,52,9,12)$	$(630,68,1,8)$	$(1086,155,4,25)$	$(1936,645,164,240)$
$(238,75,20,25)$	$(630,185,40,60)$	$(1089,170,7,30)$	$(1944,725,220,300)$
$(256,85,24,30)$	$(638,49,0,4)$	$(1089,320,67,105)$	$(2048,805,264,350)$
$(273,80,19,25)$	$(650,55,0,5)$	$(1090,495,200,245)$	$(2185,936,347,441)$
$(288,41,4,6)$	$(676,135,14,30)$	$(1122,209,16,44)$	$(2205,950,355,450)$
$(289,90,23,30)$	$(686,250,75,100)$	$(1128,245,28,60)$	$(2262,875,280,375)$
$(300,65,10,15)$	$(696,125,10,25)$	$(1134,275,40,75)$	$(2300,1045,420,520)$
$(320,145,60,70)$	$(704,37,0,2)$	$(1156,175,6,30)$	$(2420,885,260,360)$
$(324,95,22,30)$	$(722,309,116,144)$	$(1156,345,74,115)$	$(2484,1040,373,480)$
$(329,40,3,5)$	$(726,203,40,63)$	$(1190,145,0,20)$	$(2523,962,301,407)$
$(336,125,40,50)$	$(729,140,13,30)$	$(1200,545,220,270)$	$(2646,1265,544,660)$
$(351,140,49,60)$	$(742,285,92,120)$	$(1210,390,95,140)$	$(2668,1155,434,550)$
$(361,100,21,30)$	$(755,130,9,25)$	$(1221,500,175,225)$	$(2668,1270,543,660)$
$(364,33,2,3)$	$(760,165,20,40)$	$(1296,185,4,30)$	$(2784,1265,508,630)$
$(364,165,68,80)$	$(768,325,120,150)$	$(1296,518,175,228)$	$(3186,1274,427,564)$
$(375,110,25,35)$	$(780,369,158,189)$	$(1332,605,244,300)$	$(3249,1392,515,657)$
$(400,21,2,1)$	$(783,230,49,75)$	$(1334,465,128,180)$	$(3393,1484,565,714)$
$(437,100,15,25)$	$(784,145,12,30)$	$(1344,425,100,150)$	$(3393,1600,675,825)$
$(441,110,19,30)$	$(800,85,0,10)$	$(1350,380,73,120)$	$(3510,1595,640,795)$
$(456,195,74,90)$	$(841,150,11,30)$	$(1352,525,170,225)$	$(3888,1625,580,750)$
$(477,140,31,45)$	$(848,385,156,190)$	$(1369,190,3,30)$	$(4602,2033,784,988)$
$(484,105,14,25)$	$(885,260,55,85)$	$(1394,175,0,25)$	$(4602,2150,895,1100)$
$(484,115,18,30)$	$(889,222,35,62)$	$(1395,410,85,135)$	$(4720,2145,860,1070)$
$(486,194,67,84)$	$(900,155,10,30)$	$(1444,195,2,30)$	$(7021,3250,1335,1650)$
$(495,38,1,3)$	$(904,301,78,111)$	$(1445,532,159,217)$	
$(505,180,53,70)$	$(925,330,95,130)$	$(1458,329,40,84)$	
$(507,44,1,4)$	$(936,187,18,42)$	$(1470,565,180,240)$	

Таблица 2

Параметры (s,t) псевдогеометрических графов из теоремы 3

$s=6$	$t=3,4,6,8,9,12,14,15,22,24,29,30,36$
$s=7$	$t=1,4,6,8,9,14,15,18,22,24,29,34,36,50,54$
$s=8$	$t=2,4,6,9,10,12,14,18,24,30,34,39,42,54,66,74,84$
$s=9$	$t=12,24,44,48,84,144$
$s=10$	$t=4,16,24,27,38,49,54,60,104,126,159,214$

Т а б л и ц а 3

Параметры графа Γ из теоремы 4

$\Gamma(a)$	Γ
$(256, 85, 24, 30)$	$\{256, 170, 1; 1, 85, 256\}$
$(288, 41, 4, 6)$	$\{288, 246, 1; 1, 41, 288\}$
$(329, 40, 3, 5)$	$\{329, 288, 1; 1, 42, 329\}$
	$\{329, 288, 56, 1; 1, 28, 288, 329\}$
	$\{329, 288, 48; 1, 16, 282\}$
	$\{329, 288, 70, 1; 1, 14, 288, 329\}$
$(441, 110, 19, 30)$	$\{441, 330, 1; 1, 110, 441\}$
$(495, 38, 1, 3)$	$\{495, 456, 1; 1, 38, 495\}$
$(540, 77, 4, 12)$	$\{540, 462, 1; 1, 77, 540\}$
$(638, 49, 0, 4)$	$\{638, 588, 1; 1, 49, 638\}$
	$\{638, 588, 71; 1, 21, 568\}$
$(650, 55, 0, 5)$	$\{650, 594, 1; 1, 18, 650\}$
$(676, 135, 14, 30)$	$\{676, 540, 1; 1, 135, 676\}$
$(704, 37, 0, 2)$	$\{704, 666, 1; 1, 37, 704\}$
	$\{704, 666, 1; 1, 9, 704\}$
$(961, 160, 9, 30)$	$\{961, 800, 1; 1, 160, 961\}$
$(1296, 185, 4, 30)$	$\{1296, 1110, 1; 1, 185, 1296\}$

2. Теорема редукции

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями η_1, η_2, $4 < \eta_1 \le 5$. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и допустим, что $[u]$ не является исключительным графом. Тогда $[u]$ — один из следующих графов:

(1) объединение изолированных 6-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s, s-5)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_6(s, 5)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, $(-1+\sqrt{4\mu+1})/2 = 5$.

Лемма 2.1. *Если $[u]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s, s-5)$, то верно одно из утверждений:*

(1) $s = 6$ *и* Γ *является графом Джонсона* $J(12, 6)$*, его стандартным частным или имеет массив пересечений* $\{49, 36, 1; 1, 12, 49\}$;

(2) $s = 7$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$;

(3) $s = 10$ *и* Γ *— граф Тэйлора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[u]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s, s-5)$. Тогда $v' = k = (s+1)^2$, $k' = \lambda = s^2 - 4s$, $\mu' = (s-5)(s-4) = s^2 - 9s + 20$, $b_1 = k - \lambda - 1 = 6s$ и μ делит $6s(s+1)^2$. По [7, теорема 20] либо Γ — граф Тэйлора и $s = 10$, либо $(s^2 - 9s + 15)(s+1)^2/(s^2 - 4s - 5) \le \mu \le 4s$, поэтому $s \le 9$.

Если $s = 6$, то $[u]$ является 7×7-решеткой и $\mu \in \{4, 6, 12, 14\}$. В случае $\mu = 14$ диаметр Γ равен 2. В случае $\mu = 4$ ввиду [9, теорема 1] Γ является графом Джонсона $J(14, 7)$ или его стандартным частным. В случае $\mu = 12$ имеем $b_2 = 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{49, 36, 1; 1, 12, 49\}$. В случае $\mu = 6$ имеем $k_2 = 6 \cdot 49$ и $b_2 = 1, 2, 3, 6$. Поэтому диаметр Γ не больше 4. Если диаметр Γ равен 3, то Γ имеет массив пересечений $\{49, 36, b_2; 1, 6, c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть диаметр Γ равен 4. Тогда $k_3 = 36\cdot 49/c_3$, Γ имеет массив пересечений $\{49, 36, 6, b_3; 1, 6, c_3, c_4\}$ и $c_3 - b_3 \geq c_2 - b_2 + a_1 + 2$, поэтому $c_3 \geq b_3 + 14$. Отсюда $c_3 \in \{18, 21, 28, 36\}$. По [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $s \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $r \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Так как $r = 5, s = -2, b_1 = 36$, то $\theta_1 \leq 35$ и $\theta_d \geq -7$. Если $c_3 = 18$, то $b_3 \leq 4$, $k_3 = 98$ и c_4 делит $98b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $c_3 = 21$, то $k_3 = 84$, c_4 четно и делит $84b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $c_3 = 28$, то $k_3 = 63$, c_4 делится на 3 и делит $63b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $c_3 = 36$, то $k_3 = 49$, c_4 делит $49b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $s = 7$, то $7 \leq \mu \leq 24$, μ делит $64 \cdot 42$, поэтому $\mu \in \{7, 8, 12, 14, 16, 21, 24\}$. В случае $\mu = 7$ имеем противоречие с тем, что $[u]$ является графом Тервиллигера. По [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $s \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $r \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Так как $r = 5, s = -3, b_1 = 42$, то $\theta_1 \leq 20$ и $\theta_d \geq -8$. Если $d(\Gamma) \geq 4$, то $\mu \leq 64/6$.

В случае $\mu = 12$ граф Γ имеет массив пересечений $\{64, 42, b_2; 1, 12, c_3\}$, а в случае $\mu = 14$ — массив пересечений $\{64, 42, b_2; 1, 14, c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. В случае $\mu = 16$ имеем $k_2 = 168$, число b_2 делится на 8. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{64, 42, 8t; 1, 16, c_3\}$. В случае $\mu = 24$ имеем $k_2 = 112$, b_2 делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{64, 42, 4t; 1, 24, c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. В случае $\mu = 21$ имеем $k_2 = 128$ и Γ имеет массив пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$.

Пусть $\mu = 8$. Тогда $k_2 = 8 \cdot 42 = 336$ и b_2 делится на 4. По лемме 1.1 имеем $8b_2 \leq 56(64 - b_2)64/40^2$, поэтому $25b_2 \leq 7(64 - b_2)$ и $b_2 \leq 14$. Если $d(\Gamma) = 3$, то Γ имеет массив пересечений $\{64, 42, 4t; 1, 8, c_3\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. Значит, $d(\Gamma) = 4$, и по [8, теорема 5.2.1] имеем $c_3 - b_3 \geq c_2 - b_2 + a_1 + 2$, поэтому $42 \geq c_3 \geq b_3 + 31 - b_2$. В случае $b_2 = 8$ имеем $c_3 = 24, 28, 32, 42$, а в случае $b_2 = 12$ имеем $c_3 = 21, 24, 28, 32, 36, 42$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $s = 8$, то $21 \leq \mu \leq 36$, μ делит $81 \cdot 48$ и $\mu \in \{24, 27, 36\}$. По [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $s \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $r \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Так как $r = 5, s = -4, b_1 = 48$, то $\theta_1 \leq 15$ и $\theta_d \geq -9$.

В случае $\mu = 24$ имеем $k_2 = 81 \cdot 2 = 162$ и Γ имеет массив пересечений $\{81, 48, b_2; 1, 24, c_3\}$. В случае $\mu = 27$ имеем $k_2 = 3 \cdot 48 = 144$ и b_2 делится на 9. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{81, 48, 9t; 1, 27, c_3\}$. В случае $\mu = 36$ имеем $k_2 = 9 \cdot 12 = 108$ и b_2 делится на 3. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{81, 48, 3t; 1, 36, c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Если $s = 9$, то $38 \leq \mu \leq 50$, μ делит $100 \cdot 55$ и $\mu \in \{44, 50\}$. В случае $\mu = 44$ имеем $k_2 = 25 \cdot 5 = 125$, b_2 делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{100, 55, 4t; 1, 44, c_3\}$. В случае $\mu = 50$ имеем $k_2 = 2 \cdot 55 = 110$, b_2 делится на 10 и Γ имеет массив пересечений $\{100, 55, 10t; 1, 50, c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если $[u]$ — дополнение псевдогеометрического графа для $pG_6(s, 5)$, то Γ — граф Тэйлора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $[u]$ является дополнением псевдогеометрического графа для $pG_6(s, 5)$, то $v' = k = (s+1)(5s+6)/6 = (5s^2+11s+6)/6$, $\bar{k}' = 6s$, $\bar{\lambda}' = s+24$ и $k-\lambda-1 = 6s$. Далее, $\mu' = v' - 2\bar{k}' - 2 + \bar{\lambda}' = (5s^2 - 55s + 138)/6$ и $(5s^2 - 55s + 144)/6 = \mu' + 1 \leq \mu < 4s$, поэтому $s \leq 13$. Так как $s(s - 11)$ делится на 6, то $s = 5, 6, 12$, $k = 31, 42, 143$, $\lambda = 0, 5, 70$,

$b_1 = 30, 36, 72$ и $\mu' = -2, -2, 33$. По [7, теорема 20] либо Γ — граф Тэйлора, либо $36 \le \mu \le 48$. С другой стороны, по [7, теорема 20] имеем $296143/68 \le \mu$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если $[u]$ — граф в половинном случае с параметрами $(4l+1, 2l, l-1, l)$, то $l \in \{21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}$ и Γ — граф Тэйлора.*

Доказательство. Пусть $[u]$ — граф в половинном случае с параметрами $(4l+1, 2l, l-1, l)$. Тогда $4 < (-1+\sqrt{4l+1})/2 \le 5$, поэтому $20 < l \le 30$. Так как $4l+1$ — сумма двух квадратов, то $l \in \{21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}$. По [1] Γ — граф Тэйлора. Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.3 следует теорема 1.

3. Доказательство теорем 2 и 3

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и спектром $k^1, n-m^f, -m^{v-f-1}$. Параметры назовем *исключительными*, если выполнены ограничения из [10]:

(1) условие Крейна $\mu(n-m(m-1)) \le (m-1)(n-m)(n+m(m-1))$;

(2) абсолютная граница $v \le f(f+3)/2$ ($v \le f(f+1)/2$, если $\mu(n-m(m-1)) \ne (m-1)(n-m)(n+m(m-1))$);

(3) μ-граница $\mu \le m^3(2m-3)$ (в случае равенства имеем $n = m(m-1)(2m-1)$);

(4) граница для числа 3-лап $n \le m(m-1)(\mu+1)/2 + m - 1$ (если $\mu \ne m(m-1), m^2$).

Теоремы 2 и 3 доказываются с помощью компьютерных вычислений, выполненных с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 1

1. Мы ищем параметры графа $\bar{\Gamma}$ с наименьшим собственным значением -6. Задается максимальное значение $\mu = 1458$. Ему отвечает $n = 330$. Проверяется допустимость полученных параметров.
2. Если $\mu = 1$, то переходим к шагу 4, в противном случае уменьшаем значение μ на 1. Находим максимальное $n = 15(\mu+1)+5$.
3. Ищем допустимые параметры. По допустимым параметрам графа $\bar{\Gamma}$ находим параметры графа Γ. Если $\mu + n - 12 > 0$, то уменьшаем n на 1 и повторяем шаг 3, в противном случае переходим к шагу 2.
4. Среди допустимых параметров графа Γ ищем те, для которых m делит μ. Им отвечают псевдогеометрические графы. Соответствующую пару (s, t) помещаем в заключение теоремы 3. Оставшиеся параметры помещаем в заключение теоремы 2.

4. Новая граница для диаметра графа

В этом разделе мы получим границу для диаметра дистанционно регулярного графа, в котором окрестности вершин сильно регулярны.

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d, в котором окрестности вершин сильно регулярны с собственными значениями λ, η_1, η_2, $\eta_2 < 0$. Если r — наименьшее натуральное число такое, что в шаре радиуса r средняя степень вершины не меньше $-b_1/(\eta_2+1)-1$, то $d \le 2r+1$.*

При выборе очередного значения b_i среднюю степень в шаре радиуса i можно посчитать точно: $\bar{k} = k - b_i k_i / v_i$, где v_i — число вершин в шаре.

Доказательство. По [8, лемма 3.2.1] средняя степень графа не превосходит его наибольшее собственное значение, причем равенство достигается только в случае регулярного графа. Поэтому мы ищем шар наименьшего радиуса r, в котором средняя степень не меньше $-b_1/(\eta_2+1)-1$, где $\eta_1 > \eta_2$ — неглавные собственные значения окрестности вершины.

По [8, теорема 4.4.3] в графе Γ не может быть двух изолированных шаров радиуса r, значит, $d \le 2r+1$. Более того, средняя степень в объединении слоев, изолированных от шара радиуса r, не превосходит $-b_1/(\eta_2+1)-1$, и равенство возможно только в сфере радиуса d. Предложение доказано.

Применение предложения 2 проиллюстрируем на примере.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Тервиллигера диаметра d, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона с собственными значениями $7, \eta_1 = 2, \eta_2 = -3$. Тогда $b_1 = 42$, $-b_1/(\eta_2+1)-1 = 20$ и для шара радиуса 2 получим $\bar{k} = 50 - 50 \cdot 21 b_2/1101$. (Известно [11], что диаметр вполне регулярного графа Тервиллигера, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, не больше 7). Если $d > 5$, то $50(1101-21b_2)/1101 < 20$ и $b_2 > 31$.

5. Доказательство теоремы 4

Теорема 4 следует из приведенных ниже лемм 5.1–5.6.

До конца работы предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') из заключения теоремы 2 (см. табл. 1) и неглавными собственными значениями $\eta_1 = 5, \eta_2$. Так как $k' \ne 2\mu'$, то ввиду [7, теорема 20] можно считать, что $\mu < 2b_1/3$. Для вершин $u, w \in \Gamma$ с $d(u,w) = 2$ через x_0 обозначим число вершин из $[w]-[u]$, не смежных с вершинами из $[u]\cap[w]$. Тогда $b_2 \le x_0$.

Лемма 5.1. *$v' \le 1444$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры (2646, 1265,544,660). Ввиду леммы 1.1 имеем $1376 \le \mu \le 1491, b_1 = 1380$, противоречие с тем, что $\mu > 2b_1/3$.

Аналогичное противоречие получим и для наборов параметров с $v' > 2646$.

Допустим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры (1445,532,159,217). Ввиду леммы 1.1 имеем $582 \le \mu \le 680, b_1 = 912$. Далее, $\mu < 608$, и μ делит $1445 \cdot 912$, противоречие.

Аналогичное противоречие получим в случаях (1470,565,180,240), (1681,784,327,399), (1922, 904,381,464), (2048,805,264,350), (2185,936,347,441), (2205,950,355,450), (2262,875,280,375), (2300, 1045,420,520), (2484,1040,373,480), (2523,962,301,407).

С помощью компьютерных вычислений с использованием алгоритма 2 (см. ниже) получим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры

(1) (1458,329,40,84) (и Γ имеет массив пересечений $\{1458, 1128, 1; 1, 376, 1458\}$);

(2) (1521,200,1,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1521, 1320, 1; 1, 330, 1521\}$, $\{1521, 1320, 1; 1, 264, 1521\}$ или $\{1521, 1320, 1; 1, 220, 1521\}$);

(3) (1587,488,109,168) (и Γ имеет массив пересечений $\{1587, 1098, 1; 1, 549, 1587\}$).

В любом случае диаметр графа Γ равен 3, и у Γ нет отличных от k целых собственных значений, противоречие с [8, с. 130]. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Если $v' \ge 1122$, то окрестности вершин имеют параметры* $(1296, 185, 4, 30)$ *и Γ имеет массив пересечений* $\{1296, 1110, 1; 1, 185, 1296\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры (1200, 545,220,270). Ввиду леммы 1.1 имеем $589 \le \mu \le 650, b_1 = 654$, противоречие с тем, что $\mu \ge 2b_1/3$.

Аналогичное противоречие получим в случаях (1221,500,175,225), (1296,518,175,228), (1332, 605,244,300), (1352,525,170,225).

С помощью компьютерных вычислений (см. алгоритм 2) получим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры

(1) (1122,209,16,44 (и Γ имеет массив пересечений $\{1122, 912, 1; 1, 304, 1122\}$ или $\{1122, 912, 1; 1, 228, 1122\}$);

(2) (1128,245,28,60) (и Γ имеет массив пересечений $\{1128, 882, 1; 1, 294, 1128\}$);

(3) (1156,175,6,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1156, 980, 1; 1, 245, 1156\}$ или $\{1156, 980, 1; 1, 196, 1156\}$);

(4) (1190,145,0,20) (и Γ имеет массив пересечений $\{1190, 1044, 1; 1, 261, 1190\}$ или $\{1190, 1044, 1; 1, 174, 1190\}$);

(5) (1296,185,4,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1296, 1110, 1; 1, 222, 1296\}$ или $\{1296, 1110, 1; 1, 185, 1296\}$);

(6) (1394,175,0,25) (и Γ имеет массив пересечений $\{1394, 1218, 1; 1, 174, 1394\}$);

(7) (1395,410,85,135) (и Γ имеет массив пересечений $\{1395, 984, 1; 1, 492, 1395\}$);

(8) (1444,195,2,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1444, 1248, 1; 1, 312, 1444\}$ или $\{1444, 1248, 1; 1, 208, 1444\}$).

Только в случае (5) и $\mu = 185$ граф Γ имеет отличное от k целое собственное значение. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Если* $800 \le v' \le 1090$*, то окрестности вершин имеют параметры* $(961, 160, 9, 30)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{961, 800, 1; 1, 160, 961\}$.

Доказательство. Заметим, что средняя степень вершины в шаре радиуса 1 больше λ. Если $\lambda \ge -b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, то по предложению 2 имеем $d(\Gamma) = 3$.

Указанное выше неравенство выполняется для любых параметров с $800 \le v' \le 1090$, перечисленных в табл. 1. Компьютерные вычисления с использованием алгоритма 2 показывают, что только массив пересечений $\{961, 800, 1; 1, 160, 961\}$ является допустимым. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Если* $616 \le v' \le 784$*, то окрестности вершин имеют параметры* $(638, 49, 0, 4)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{638, 588, 1; 1, 49, 638\}$ *или* $\{638, 588, 71; 1, 21, 568\}$*), или* $(650, 55, 0, 5)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{650, 594, 1; 1, 18, 650\}$*), или* $(676, 135, 14, 30)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{676, 540, 1; 1, 135, 676\}$*), или параметры* $(704, 37, 0, 2)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{704, 666, 1; 1, 37, 704\}$ *или* $\{704, 666, 1; 1, 9, 704\}$*).*

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 3$, то возникают только массивы пересечений из заключения леммы. Пусть $d(\Gamma) \ge 4$. Ввиду 1.2 возникают лишь параметры $(638, 49, 0, 4)$, $(650, 55, 0, 5)$, $(704, 37, 0, 2)$.

В случае параметров $(638, 49, 0, 4)$ имеем $\eta_1 = 5, \eta_2 = -9$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 72.5$. С помощью компьютерных вычислений, использующих результаты леммы 1.2, получены возможные значения μ и b_2:

$\mu = 8,\ b_2 = 2, 4, \ldots, 270$; $\mu = 11,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 198$; $\mu = 12,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 182$;
$\mu = 14,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 162$; $\mu = 21,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 169$; $\mu = 22,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 154$;
$\mu = 24,\ b_2 = 2, 4, \ldots, 150$; $\mu = 28,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 143$; $\mu = 29,\ b_2 = 29, 58, 87, 116, 145$;
$\mu = 33,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 132$; $\mu = 42,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 125$; $\mu = 44,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 110$;
$\mu = 49,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 108$; $\mu = 56,\ b_2 = 2, 4, \ldots, 100$; $\mu = 58,\ b_2 = 29, 58, 87$;
$\mu = 66,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 88$; $\mu = 77,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 66$; $\mu = 84,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 65$;
$\mu = 87,\ b_2 = 29, 58$; $\mu = 88,\ b_2 = 22, 44$; $\mu = 98,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 50$;
$\mu = 132,\ b_2 = 11$.

В случае $\mu = 8$, если $\bar{k} = k - b_i k_i / v_i = 638 - 4683 b_2/5322 < 72.5$, то $4683 b_2 \ge 567.5 \cdot 5322$, противоречие. Значит, по предложению 2 имеем $d \le 5$. Для оставшихся значений μ оценка $d \le 5$ получается еще проще.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(650, 55, 0, 5)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -10$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 65$.

В случае $\mu = 10$, если $\bar{k} = k - b_i k_i / v_i = 650 - 4683 b_2/5322 < 65$, то $4683 b_2 \geq 567.5 \cdot 5322$, противоречие. Значит, по по предложению 2 имеем $d \leq 5$. Для оставшихся значений μ оценка $d \leq 5$ получается еще проще.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(704, 37, 0, 2)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -7$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 110$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 560. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $144 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в любом случае новых допустимых массивов пересечений нет. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если* $361 \leq v' \leq 606$*, то окрестности вершин имеют параметры* $(441, 110, 19, 30)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{441, 330, 1; 1, 110, 441\}$) *или* $(495, 38, 1, 3)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{495, 456, 1; 1, 38, 495\}$)*, или* $(540, 77, 4, 12)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{540, 462, 1; 1, 77, 540\}$).

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 3$, то возникают только массивы пересечений из заключения леммы.

Если $\lambda < -b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, то возникают лишь параметры $(364, 33, 2, 3)$, $(400, 21, 2, 1)$, $(495, 38, 1, 3)$, $(507, 44, 1, 4)$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(364, 33, 2, 3)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -6$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 330 : 5 - 1 = 65$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 240. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $124 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(495, 38, 1, 3)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -7$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 456 : 6 - 1 = 75$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 288. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $307 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(507, 44, 1, 4)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -8$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 462 : 7 - 1 = 65$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 220. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $287 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(400, 21, 2, 1)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -4$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 378 : 3 - 1 = 125$. Если $b_2 \leq 275$, то для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше 125, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$. В случае $d > 5$ имеем либо $\mu = 2$, $b_2 = 276, 277, \ldots, 360$, либо $\mu = 4$, $b_2 = 276, 278, \ldots, 324$, либо $\mu = 6$, $b_2 = 276, 277, \ldots, 292$.

Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в случае $4 \leq d \leq 5$ допустимых массивов пересечений нет.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(400, 21, 2, 1)$ и $d > 5$. Если Γ содержит четырехугольник, то по [8, следствие 5.2.2] имеем $d \leq 2k/(\lambda + 2)$ и $d \leq 34$. Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Значит, $\mu = 2$ и Γ — граф Тервиллигера. По [8, замечание (iii) после теоремы 5.4.1] имеем $c_3 \geq 4$. Покажем, что в случае $c_3 = 4$ имеем $b_2 \leq 36$. Пусть $c_3 = 4$, $a \in \Gamma$, $b \in \Gamma_3(a)$ и $\Delta = \Gamma_2(a) \cap [b]$. На Δ введем отношение μ-смежности, считая вершины x, y μ-смежными, если x и y смежны, и найдется вершина $u \in [a]$ такая, что $\{x, y\} \subset [u] \cap [b]$. Возьмем вершину $x \in \Delta$. По строению $[x]$ имеется не больше двух вершин, μ-смежных с x. Причем если вершин две, то они не смежны друг с другом, и каждая из них μ-смежна с двумя вершинами. Но тогда мы получаем четырехугольник в Δ, что невозможно. Таким образом, вершина x μ-смежна ровно с одной вершиной y, и μ-подграфы $[a] \cap [x]$, $[a] \cap [y]$ совпадают. Таким образом, если вершина $b \in \Gamma_3(a)$ смежна с вершиной $x \in \Gamma_2(a)$, то b смежна с ребром xy, лежащим в единственной максимальной 5-клике C, содержащей треугольник $\{x\} \cup ([a] \cap [x])$. В C есть ровно два ребра, которые инцидентны с x и лежат в $\Gamma_2(a)$. С каждым из них может быть смежно не более 18 вершин из $\Gamma_3(a)$. Следовательно, $b_2 \le 36$, и по предложению 2 имеем $d \le 5$.

Если $d > 5$, то для шара радиуса 3 среднее значение степени вершины в этом шаре меньше 125, но больше $k - b_3$, поэтому $b_3 > 275$. Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет (при этом вычисления заканчивались при $d \le 21$). Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если* $144 \le v' \le 351$, *то окрестности вершин имеют параметры* $(256, 85, 24, 30)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{256, 170, 1; 1, 85, 256\}$) *или* $(288, 41, 4, 6)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{288, 246, 1; 1, 41, 288\}$), *или* $(329, 40, 3, 5)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{329, 288, 1; 1, 42, 329\}$, $\{329, 288, 56, 1; 1, 28, 288, 329\}$, $\{329, 288, 48; 1, 16, 282\}$ *или* $\{329, 288, 70, 1; 1, 14, 288, 329\}$).

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 3$, то возникают только массивы пересечений из заключения леммы.

Если $\lambda < -b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, то возникают лишь параметры $(162, 23, 4, 3)$, $(329, 40, 3, 5)$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(162, 23, 4, 3)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -4$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 138 : 3 - 1 = 45$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 90. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $72 \le \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \le 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(329, 40, 3, 5)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -7$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 288 : 6 - 1 = 47$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 70. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $259 \le \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \le 5$.

Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в случае $4 \le d \le 5$ возникают только массивы пересечений из заключения леммы. Лемма доказана.

Вычисление возможных массивов пересечений графа Γ осуществлялось посредством алгоритма поиска с возвратом.

Алгоритм 2. Вычисление возможных массивов пересечений графа Γ

Строим последовательность $b_0, c_1, b_1, \ldots, c_i, b_i$. Составляем последовательность из известных значений параметров: $b_0 = v', c_1 = 1, b_1 = v' - k' - 1$. После этого переходим к выполнению шага 1.

1. Добавляем к последовательности новый элемент с начальным значением 0 в случае b_i или v' в случае c_i.
2. Проверяем частичную последовательность на выполнение необходимых условий существования графа. Если все условия выполняются, переходим к следующему шагу. Иначе переходим к шагу 4.
3. Если последний элемент не b_i или $b_i \neq 0$, то переходим к шагу 1. Иначе проверяем построенную последовательность на выполнение условий допустимости массива пересечений [8, предложение 4.1.6]. Проверка того, что все числа пересечений p^m_{jl} — неотрицательные целые, выполняется по формулам из [8, лемма 4.1.7]. Для проверки целочисленности кратностей собственных значений Γ используется многочлен из [8, лемма 2.2.6], для которого кратности являются корнями. Если последовательность проходит проверку, то выводим ее в качестве очередного допустимого массива пересечений. Далее переходим к шагу 4.
4. Присваиваем следующее значение последнему элементу (b_i или c_i): b_i увеличиваем, c_i уменьшаем. Если новое значение выходит за допустимые пределы (больше b_{i-1} для b_i, меньше c_{i-1} для c_i), то последовательность укорачивается на один элемент, и, если $i = 1$, то вычисление закончено, в противном случае ($i > 1$) повторяем шаг 4. Если новое значение укладывается в пределы, переходим к шагу 2.

Теперь перечислим *необходимые условия*, использованные в алгоритме. Через d будем обозначать диаметр графа Γ.

Поскольку окрестности вершин в Γ сильно регулярны с одними и теми же параметрами (v', k', λ', μ'), нетрудно понять, что μ-подграфы в Γ регулярны степени μ'. Поэтому $c_2 > \mu'$ и $c_2\mu'$ четно.

С помощью формул из [8, лемма 4.1.7] некоторые числа p^m_{jl} можно вычислить и в случае неполного массива пересечений. Если граф существует, то p^m_{jl} — неотрицательные целые числа.

Поскольку окрестности вершин в графе Γ сильно регулярны, то при помощи границы Хоффмана [8, предложение 1.3.2] можно оценить сверху максимальный размер клики в Γ. По теореме Турана в графе Δ на n вершинах без $r+1$-клик число ребер не превосходит $\dfrac{r-1}{2r}n^2$. Применяя теорему Турана к регулярному подграфу $\Gamma_i(a)$ степени $a_i = b_0 - c_i - b_i$, получаем $a_i \le (r-1)k_i/r$, где $k_i := |\Gamma_i(a)|$, a — любая вершина из Γ. Ввиду того, что число связности сильно регулярного графа равно его степени, $a_i \ge k'$, $0 < i < d$.

Неравенство Тервиллигера из [8, теорема 5.2.1] позволяет оценить сверху b_i с помощью $c_i - c_{i-1} + b_{i-1} - a_1 - 2$ в случае, когда известно, что Γ содержит четырехугольник. Из [8, следствие 5.2.2] явствует, что применение этого неравенства автоматически ограничивает диаметр Γ: $d \le 2k/(a_1+2)$, где $k = b_0$. Кроме того, диаметр Γ можно оценить с помощью леммы 1.2 и предложения 2. Из [8, следствие 5.9.7] получаем, что $k_{i+1} > k_i$ для всех $i < d/3$.

Еще одно неравенство следует из [8, теорема 5.2.5]. Если $\lambda \le 2\mu - 2$, то $c_i - b_{i-1} \ge c_{i-1} - b_{i-2} + 2$ для $2 \le i \le d$. Если сверх того $\lambda \le \mu$, то $c_i \ge c_{i-1} + 1$ для $2 \le i \le d$.

Из [8, теорема 5.4.1] и последующего замечания следует, что *выполняется* одно из утверждений:

1. $c_3 \ge \dfrac{3}{2}\mu$; 2. $c_3 \ge \mu + b_2,\ d = 3$.

Причем, если Γ не содержит четырехугольников, то $c_3 \ge 2\mu$.

Из предложения 5.5.1 и следствия 5.5.3 [8] получаем, что $b_i + c_{i+1} > \lambda + 2$ для всех i, $2 \le i \le d-1$.

Из [8, лемма 5.5.5] получаем неравенство $a_2 \ge \mu - \lambda + 1$.

Из еще одного неравенства Тервиллигера [8, предложение 5.5.6] получаем следующее неравенство. Для $0 < i < d$ имеем $b_i \le \max(k - 2c_i, (k - c_i)/2)$ и, если достигается равенство, то $b_i = c_i = k/3$.

Предложение 5.6.1 [8] можно использовать, исключая случай (iii), потому что $a_d = \lambda + 1$ и $b_{d-1} = 1$ влекут несвязность окрестности, тогда как по определению исключительный граф связен.

Из [8, теорема 4.4.3] получаем неравенства $\theta_1 \le -1 - b_1/(\eta_2 + 1)$, $\theta_d \ge -1 - b_1/(\eta_1 + 1)$. В [8, предложение 4.1.1] дается последовательность Штурма $(w_j(x))_j$, корнями которой служат собственные значения Γ. Вычисляя значения $w_j(x)$ для правых частей неравенств и подсчитывая число смен знаков, можно определить, выполняются ли неравенства на очередном шаге алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы с сильно регулярными локальными подграфами, имеющими собственное значение 4 // Мальцевские чтения: тез. докл. Новосибирск, 2016. С. 72.
4. **Makhnev A.A.** Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions // Intern. Conf. “Groups and Graphs, Algorithms and Automata”: Abstr. Yekaterinburg, 2015. P. 68.

5. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-5}(s,t)$. Владикавказ. мат. журн. 2016. Т. 18, № 3. С. 35–42.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs N. Y.: Springer, 2012. 250 p.
7. **Koolen J.H., Park J.** Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory. Ser. A 2012. Vol. 119, no. 3. P. 546–555.
8. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
9. **Blokhuis A., Brouwer A.E.** Locally 4-by-4 grid graphs // J. Graph Theory. 1989. Vol. 13, no. 3. P. 229–244.
10. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33, no. 1. P. 392–400.
11. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О дистанционно регулярных графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 18.08.2016

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Makhnev A.A. On graphs the neighbourhoods of whose vertices are strongly regular with $k = 2\mu$. *Math. Sb.*, 2000, vol. 191, no. 7, pp. 1033–1048.
2. Makhnev A. A., Paduchikh D.V. Distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular with nonprincipal eigenvalue not greater than 3. *Dokl. Akad. Nauk.*, 2015, vol. 464, no. 4, pp. 396–400 (in Russian).
3. Makhnev A. A., Paduchikh D.V. Distance-regular graphs with strongly regular local subgraphs having eigenvalue 4. *Mal'tsev Readings: Abstr.*, Novosibirsk, 2016, p. 72 (in Russian).
4. Makhnev A.A. Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions. *Intern. Conf. "Groups and Graphs, Algorithms and Automata": Abstr.*, Yekaterinburg, 2015, p. 68.
5. Gutnova A.K., Makhnev A.A. Extensions of pseudo-geometric graphs for $pG_{s-5}(s,t)$. *Vladikavkaz. Mat. Zhurn.*, 2016, vol. 18, no. 3, pp. 35–42 (in Russian).
6. Brouwer A.E., Haemers W.H. *Spectra of graphs.* New York: Springer, 2012, 250 p.
7. Koolen J.H., Park J. Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency. *J. Comb. Theory.*, Ser. A, 2012, vol. 119, no. 3, pp. 546–555.
8. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin: Springer-Verlag, 1989, 495 p.
9. Blokhuis A., Brouwer A.E. Locally 4-by-4 grid graphs. *J. Graph Theory*, 1989, vol. 13, no. 3. P. 229–244.
10. Neumaier A. Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$. *Arch. Math.*, 1979, vol. 33, no. 1, pp. 392–400.
11. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On distance-regular graphs Graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Hoffman–Singleton graph. *Dokl. Akad. Nauk.*, 2009, vol. 428, no. 2, pp. 157–160 . (in Russian).

A.Ȧ. Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

D. V. Paduchikh, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: dpaduchikh@gmail.com .