ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.983.23

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ ЛИНЕЙНОГО ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В комплексном банаховом пространстве задан плотно определенный линейный инъективный оператор A, регулярное множество которого содержит отрицательную вещественную полуось. На ней известна степенная асимптотическая оценка нормы резольвенты этого оператора в нуле и в бесконечности. В работе изучаются некоторые классы функций данного оператора, построенных (с учетом интегральной формулы Коши) на базе соответствующих скалярных аналитических функций, имеющих степенные асимптотические оценки модуля в нуле и в бесконечности. Установлен ряд свойств операторных функций, в частности, мультипликативное свойство и свойство обратимости. Доказано, что линейная комбинация целых степеней произвольного линейного инъективного оператора с непустым резольвентным множеством (при естественных ограничениях на ее коэффициенты) — замкнутый оператор, а функции оператора A, построенные для линейной комбинации скалярных степенных функций с целыми показателями, совпадают с соответствующей линейной комбинацией степеней этого оператора.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, мультипликативное свойство, обратимость.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. On some functions of a linear closed operator.

A densely defined linear injective operator whose regular set contains the negative real semiaxis is given in a complex Banach space. A power asymptotic bound is known for the norm of the resolvent of this operator at zero and at infinity on the same semiaxis. We study some classes of functions of this operator constructed (in view of the Cauchy integral formula) on the basis of the corresponding scalar analytic functions that have power asymptotic bounds for their moduli at zero and at infinity. A number of properties of the operator functions are established, in particular, the multiplicative property and the invertibility. It is proved that a linear combination of integer powers of an arbitrary linear injective operator with nonempty resolvent set (under natural constraints on the coefficients) is a closed operator and that functions of an operator A constructed for a linear combination of scalar power functions with integer exponents coincide with the corresponding linear combination of powers of this operator.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, multiplicative property, invertibility.

MSC: 47A60

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-173-187

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X. При определенных ограничениях на оператор A рядом авторов по заданным скалярным функциям различными способами вводились операторные функции и исследовались их свойства. Так, например, в [1] функциональное исчисление строится на базе интегральной формулы Коши для скалярных функций, аналитических в некоторой окрестности спектра линейного неограниченного оператора и в бесконечности. В [2] развивается функциональное исчисление в банаховых алгебрах и в гильбертовых пространствах для ограниченного и неограниченного операторов. В [3–5] изучаются построенные на основе интегральной формулы Коши дробные степени замкнутых операторов с известной асимптотикой нормы резольвенты в нуле и в бесконечности. Другой подход к построению функции от оператора применяется, например, в работах [6] (там оператор предполагается многозначным) и [7] (в работе развивается операторное исчисление, которое по аналогии с одномерным случаем автор называет многомерным исчислением Бохнера — Филлипса).

Будем предполагать, что $A\colon D(A) \subset X \to X$ — плотно определенный линейный инъективный оператор. В [8] на основе интегральной формулы Коши введены два класса операторных функций на базе соответствующих скалярных функций, аналитических в областях, лежащих вне некоторого угла с вершиной в нуле и содержащих отрицательную вещественную полуось; скалярные функции имеют степенные оценки модуля в бесконечности и в нуле. В данной работе предполагается известным, что регулярное множество $\rho(A)$ оператора A содержит отрицательную вещественную полуось и на ней известна оценка нормы резольвенты $R = R_A$ оператора A (тогда подобная оценка справедлива и в некоторой области $\Delta \supset (-\infty, 0)$). Введены два класса операторных функций на базе соответствующих скалярных функций, и исследуются свойства этих операторных функций. В частности, показано, что функциям $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j \lambda^j$ $(k, l \in \mathbb{Z},\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ \alpha_k \alpha_l \neq 0)$ соответствуют операторные функции $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j$ и они — замкнутые операторы.

Вопросы, рассмотренные в данной работе, связаны с исследованиями, проведенными авторами в [8]. Однако там предполагалась известной оценка нормы резольвенты внутри некоторого угла с вершиной в нуле, содержащего $(-\infty, 0)$.

Переходим к изложению результатов работы. Будем предполагать (по аналогии с [8]), что для нормы резольвенты $R(\mu) = (A - \mu E)^{-1}$ оператора A (E — единичный оператор в X) справедлива при некоторых $C_0 > 0,\ \gamma \le 1,\ \rho \ge 1$ или $\rho = 0$ и любого $s > 0$ оценка

$$\|R(-s)\| \le \frac{C_0}{s^\rho (s+1)^{\gamma - \rho}}. \tag{1}$$

Введем ряд обозначений: $B(\mu_0, r)$ и $S(\mu_0, r)$ — открытый круг и окружность с центром в точке $\mu_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$, при $\rho \ge 1$ и $a > 0$

$$\Delta(a) = \bigl\{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = -s + it,\ s > 0,\ |t| < a\ \min\{s^\gamma, s^\rho\}\bigr\},$$

при $\rho = 0,\ a > 0$

$$\Delta(a) = \bigl\{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = -s + it,\ s \ge 0,\ |t| < a(s+1)^\gamma\bigr\} \bigcup \Bigl\{\mu \in \mathbb{C}\colon |\mu| < a,\ |\arg \mu| < \frac{\pi}{2}\Bigr\},$$

$\Lambda(a)$ — ориентированная граница области $\Delta(a)$, при обходе которой $\Delta(a)$ остается справа,

$$\overline{C} = \begin{cases} 2^{\rho - \gamma} C_0, & \rho \ge 1, \\ C_0, & \rho = 0, \end{cases} \quad \Delta_0 = \Delta(\overline{C}^{-1}).$$

Утверждение 1. *Пусть $\rho \ge 1$. Тогда справедливы следующие соотношения*:

$$\begin{aligned} &1) \quad \Delta_0 \subset \rho(A), \\ &2) \quad \|R(\mu)\| \le \frac{\overline{C}}{\min\{s^\rho, s^\gamma\} - \overline{C}|\mu + s|} \end{aligned} \tag{2}$$

для $\mu \in B(-s, \overline{C}^{-1} \min\{s^\gamma, s^\rho\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\mu \in \mathbb{C},\ s > 0$ справедливо соотношение

$$A - \mu E = (A + sE)[E - (\mu + s) R(-s)]. \tag{3}$$

Если $|\mu + s| \|R(-s)\| < 1$, то, переходя в (3) к обратным операторам, получаем, что $\mu \in \rho(A)$ и

$$\|R(\mu)\| \le \frac{\|R(-s)\|}{1 - |\mu + s| \|R(-s)\|}. \tag{4}$$

Пусть $s \ge 1$ и $\mu \in B(-s, \overline{C}^{-1} s^\gamma)$, т. е. $|\mu + s| < \overline{C}^{-1} s^\gamma$. Тогда согласно (1)

$$\|R(-s)\| \le \frac{C_0}{s^\gamma} \Bigl(\frac{s}{s+1}\Bigr)^{\gamma - \rho} \le \frac{\overline{C}}{s^\gamma}, \tag{5}$$

т. е. $|\mu + s| \|R(-s)\| < \Bigl(\frac{1}{\overline{C}} s^\gamma\Bigr) \frac{\overline{C}}{s^\gamma} = 1$. Из (4) и (5) следует (2). При $s \in (0, 1],\ \mu \in B(-s, \overline{C}^{-1} s^\rho)$ имеем $\|R(-s)\| \le \frac{\overline{C}}{s^\rho}$ и, аналогично рассуждая, также приходим к оценке (2). Таким образом, имеет место второе из соотношений утверждения 1. Из него вытекает первое из соотношений. □

Утверждение 2. *Пусть* $a \in (0, \overline{C}^{-1})$. *Тогда существует такое число* $K = K(a)$, *что при* $\rho \geq 1$ *для всех* $\mu \in \overline{\Delta(a)} \backslash \{0\}$, *а при* $\rho = 0$ *для всех* $\mu \in \overline{\Delta(a)}$

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{K(a)}{|\mu|^{\rho}(|\mu|+1)^{\gamma-\rho}}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $\rho = 0$ рассмотрен в [9]. Будем считать далее, что $\rho \geq 1$. Пусть $\mu \in \overline{\Delta(a)} \backslash \{0\}$ и $s = -\mathrm{Re}\,\mu$. Если $s \geq 1$, то $|\mu + s| = |\mathrm{Im}\,\mu| \leq as^{\gamma}$, т. е. по утверждению 1

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{\overline{C}}{s^{\gamma} - \overline{C}as^{\gamma}} \leq \frac{\overline{C}}{1 - a\overline{C}} \frac{k_1}{|\mu|^{\gamma}},$$

где $k_1 = \max\{1, (1+a^2)^{\gamma/2}\}$. Если $s \in (0, 1]$, то, аналогично рассуждая, получаем, что

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{\overline{C}}{1 - a\overline{C}} \frac{k_2}{|\mu|^{\rho}},$$

где $k_2 = (1+a^2)^{\rho/2}$. Из этих оценок вытекает неравенство

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{\overline{C}k_2}{1 - a\overline{C}} \frac{1}{\min\{|\mu|^{\rho}, |\mu|^{\gamma}\}},$$

а следовательно, оценка (6) с $K(a) = \dfrac{\overline{C}k_2}{1 - a\overline{C}}$. □

По аналогии с [8] введем следующие классы скалярных и операторных функций.

Для $a \in (0, \overline{C}^{-1})$, $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ через $F(a, \tau, \sigma)$ обозначаем множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C} \backslash (\Delta(a) \cup \{0\})$ и аналитических в $\mathbb{C} \backslash \overline{\Delta(a)}$, причем при некотором $C \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \notin \Delta(a) \cup \{0\}$ имеет место неравенство

$$|f(\lambda)| \leq C|\lambda|^{\tau}(|\lambda|+1)^{\sigma-\tau}.$$

Заметим, что при $\rho = 0$ множества $F(a, \tau, \sigma)$ при заданных a, σ не зависят от τ. Поэтому при $\rho = 0$ будем считать, что $\tau = 0$. Через $\mathcal{F}$ обозначим объединение всех таких классов $F(a, \tau, \sigma)$. Положим

$$g(\lambda; m, n, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^m \lambda^{-n}, \;\; g(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n}, \;\; \widehat{g}(A; m, n, \lambda_0) = A^{-n}(A - \lambda_0 E)^m.$$

Здесь $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq n$, $\lambda_0 \in \Delta(a)$ (m, n, λ_0 играют роль параметров). Заметим, что оператор $g(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут и $\overline{\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)} = g(A; m, n, \lambda_0)$. Возьмем произвольно $a_0, a, \tau, \sigma \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda_0 \in \Delta(a)$, предполагая, что

$$0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}, \quad m \geq n, \quad \rho - \tau - n < 1, \quad \gamma - \sigma + m - n > 1. \tag{7}$$

Для $f \in F(a, \tau, \sigma)$ определим операторы

$$f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\widehat{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda \; \widehat{g}(A; m, n, \lambda_0),$$

$$\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda \; g(A; m, n, \lambda_0).$$

Так же, как в [8] устанавливается, что оператор $f(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут и

$$\overline{\widehat{f}(A; m, n, \lambda_0)} = \overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)} \subset f(A; m, n, \lambda_0). \tag{8}$$

Для доказательства следующих далее утверждений нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $a_0 \in (0, 1/\overline{C})$, $a_1, a_2 \in (0, a_0)$, $a_1 \neq a_2$. *Тогда при* $\rho \geq 1$ *условия*

$$\alpha_1 > -1, \quad \alpha_2 > -1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 > -1, \tag{9}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 < 0, \quad \alpha_2 + \beta_2 < 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 < -1, \tag{10}$$

а при $\rho = 0$ *в предположении* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *условия* (10) *задают область сходимости интеграла*

$$I = \int\limits_{\Lambda(a_1)} |d\lambda_1| \int\limits_{\Lambda(a_2)} \frac{|\lambda_1|^{\alpha_1}(|\lambda_1|+1)^{\beta_1}|\lambda_2|^{\alpha_2}(|\lambda_2|+1)^{\beta_2}}{|\lambda_1 - \lambda_2|}|d\lambda_2|. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $a > 0$ $\Lambda^+(a)$ — дуга кривой $\Lambda(a)$, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, $\Lambda_1^+(a)$ и $\Lambda_2^+(a)$ — дуги кривой $\Lambda^+(a)$, лежащие в полуплоскостях $\operatorname{Re}\lambda \leq -b$ и $\operatorname{Re}\lambda \geq -b$ соответственно, где $b = \begin{cases} -1, & \rho \geq 1, \\ 0, & \rho = 0 \end{cases}$, $p(\lambda_1, \lambda_2)$ — подынтегральная функция в (11), $q(\lambda_1, \lambda_2)$ — числитель дроби в (11).

Заметим, что если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, то $|\lambda_1 - \overline{\lambda_2}| \leq |\lambda_1 - \lambda_2|$, а также, что кривые $\Lambda(a)$ $(a > 0)$ симметричны относительно вещественной оси. Поэтому, введя $I^+ = \int_{\Lambda^+(a_1)} |d\lambda_1| \int_{\Lambda^+(a_2)} p(\lambda_1, \lambda_2)|d\lambda_2|$, имеем

$$2I^+ \leq I \leq 4I^+.$$

Далее рассмотрим два случая: I. $\rho \geq 1$; II. $\rho = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

I. $\rho \geq 1$. Так как для любого $\lambda = -s + it \in \Lambda(a)$ справедливы неравенства $s \leq |\lambda| \leq \sqrt{1 + a^2}s$, то найдутся такие $M_1, M_2 \in (0, +\infty)$, что для всех $\lambda_j \in \Lambda(a_j)$ $(j = 1, 2)$

$$M_1\, q(s_1, s_2) \leq q(\lambda_1, \lambda_2) \leq M_2\, q(s_1, s_2),$$

где $s_j = \operatorname{Re}\lambda_j$ $(j = 1, 2)$. Поэтому интеграл I^+, а следовательно, и I, сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_{\Lambda^+(a_1)} |d\lambda_1| \int_{\Lambda^+(a_2)} \frac{q(|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|)}{|\lambda_1 - \lambda_2|}|d\lambda_2|$ или, что то же, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} ds_1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 \min\{s_1^\gamma, s_1^\rho\} - a_2 \min\{s_2^\gamma, s_2^\rho\})^2}},$$

сходимость которого эквивалентна одновременной сходимости интегралов

$$I_{1,1} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\gamma)^2}}, \quad I_{1,2} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_0^{1} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\rho)^2}},$$

$$I_{2,1} = \int\limits_0^{1} ds_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\rho - a_2 s_2^\gamma)^2}}, \quad I_{2,2} = \int\limits_0^{1} ds_1 \int\limits_0^{1} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\rho - a_2 s_2^\rho)^2}}.$$

Исследуем сходимость этих интегралов. Найдем такое $\delta \in (0, 1)$, что $m_1 = \min_{|\tau-1| \leq \delta} |a_1 - a_2\tau^\gamma| > 0$, $m_2 = \min_{|\tau-1| \leq \delta} |a_1 - a_2\tau^\rho| > 0$.

Перейдем теперь к определению области сходимости интеграла $I_{1,1}$. Он сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\widetilde{I}_{1,1} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2+\beta_2}\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\gamma)^2}}.$$

После замены переменной $s_2 = s_1\tau$ во внутреннем интеграле, входящем в $\widetilde{I}_{1,1}$, получаем

$$\widetilde{I}_{1,1} = \int\limits_{1}^{+\infty} ds_1 \int\limits_{1/s_1}^{+\infty} \frac{s_1^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\tau^{\alpha_2+\beta_2}\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)^2 + s_1^{2(\gamma-1)}(a_1 - a_2\tau^\gamma)^2}}, \tag{12}$$

т. е.

$$\widetilde{I}_{1,1} = \int\limits_{1/(1-\delta)}^{+\infty} ds_1 \int\limits_{1/s_1}^{+\infty} \frac{u(s_1,\tau)}{v(s_1,\tau)} d\tau + \int\limits_{1}^{1/(1-\delta)} ds_1 \int\limits_{1/s_1}^{+\infty} \frac{u(s_1,\tau)}{v(s_1,\tau)} d\tau, \tag{13}$$

где $u(s_1,\tau)$ и $v(s_1,\tau)$ — числитель и знаменатель дроби в (12) соответственно.

Пусть $s \geq 1/(1-\delta)$. Интеграл $\int_{1/s}^{+\infty} u(s,\tau)/v(s,\tau)\,d\tau$ представим в виде суммы интегралов $I_1(s),\ I_2(s),\ I_3(s)$ по промежуткам $[1/s, 1-\delta],\ [1-\delta, 1+\delta],\ [1+\delta, +\infty)$ соответственно.

Для $\tau \in [1/s, 1-\delta]$ справедливы неравенства

$$\delta \leq V(s,\tau) \leq \sqrt{1 + (a_1 s^{\gamma-1} - a_2 (s\tau)^{\gamma-1}\tau)^2} \leq \sqrt{1 + (a_1 + a_2)^2}.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_1(s)\,ds$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 < -1, \\ \alpha_1 + \beta_1 < 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_2(s)\,ds$. Для $s \geq 1,\ \tau \in [1-\delta, 1+\delta]$ при некоторых $M_1, M_2 \in (0, +\infty)$ имеют место неравенства

$$M_1 \leq \frac{\tau^{\alpha_2+\beta_2}}{V(1,\tau)} \leq \frac{\tau^{\alpha_2+\beta_2}}{V(s,\tau)} \leq \frac{M_2}{\sqrt{(1-\tau)^2 + m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}},$$

т. е.

$$2\delta M_1 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \leq I_2(s) \leq M_2 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \ln\left(\tau - 1 + \sqrt{(\tau-1)^2 + m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}\right)\Big|_{1-\delta}^{1+\delta}$$

$$= M_2 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \ln \frac{\left(\delta + \sqrt{\delta^2 + m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}\right)^2}{m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}$$

$$\leq 2M_2 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\left(\ln\frac{(\delta + \sqrt{\delta^2 + m_1^2}}{m_1} + (1-\gamma)\ln s\right) \leq M_3 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \begin{cases} \ln s, & \gamma < 1, \\ 1, & \gamma = 1 \end{cases}$$

при некотором $M_3 \in (0, +\infty)$. Поэтому интеграл $\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_2(s)\,ds$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 < -1$.

Исследуем сходимость интеграла $\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_3(s)\,ds$. Для $s \geq 1,\ \tau \geq 1+\delta$ имеют место неравенства

$$M_4 \leq \frac{\tau}{V(1,\tau)} \leq \frac{\tau}{V(s,\tau)} \leq \frac{\tau}{\tau - 1} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \tag{14}$$

при некотором $M_4 \in (0, +\infty)$ (использовано, что $\tau/V(1,\tau)$ — непрерывная функция при $\tau \geq 1$, имеющая конечный предел при $\tau \to +\infty$). Значит, интеграл $\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_3(s)\,ds$ сходится в том и только том случае, когда

$$\alpha_2 + \beta_2 < 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 < -1.$$

Таким образом, первый из повторных интегралов в правой части (13) сходится тогда и только тогда, когда выполнены условия (10).

Для сходимости второго из повторных интегралов справа в (13) необходима и достаточна сходимость интеграла $J_1 = \int_1^{1/(1-\delta)} ds \int_{1+\delta}^{+\infty} u(s,\tau)/v(s,\tau)\,d\tau$, так как на компактном множестве $\{(s,\tau) : s \in [1, 1/(1-\delta)], \tau \in [1/s, 1+\delta]\}$ подынтегральная функция непрерывна. Из неравенств (14) вытекает, что интеграл J_1 сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_2 + \beta_2 < 0$. Таким образом, интеграл $I_{1,1}$ сходится в том и только том случае, когда выполнены условия (10).

Аналогично предыдущему находится область сходимости интеграла $I_{2,2}$. Он сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\widetilde{I}_{2,2} = \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^{1/s} \frac{s^{\alpha_1+\alpha_2}\tau^{\alpha_2}\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)^2 + s^{2(\rho-1)}(a_1 - a_2\tau^\rho)^2}}. \tag{15}$$

Пусть $w(s,\tau)$ — знаменатель подынтегральной функции, тогда

$$\widetilde{I}_{2,2} = \int\limits_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2}\,ds \int\limits_0^{1/s} \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(s,\tau)}\,d\tau + \int\limits_{1/(1+\delta)}^{1} s^{\alpha_1+\alpha_2}\,ds \int\limits_0^{1/s} \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(s,\tau)}\,d\tau. \tag{16}$$

При $s \in (0, 1/(1+\delta)]$ интеграл $\int_0^{1/s} (\tau^{\alpha_2}\,d\tau)/w(s,\tau)$ представим в виде суммы интегралов $I_4(s), I_5(s), I_6(s)$ по промежуткам $[0, 1-\delta]$, $[1-\delta, 1+\delta]$, $[1+\delta, 1/s]$ соответственно. Для $s \in [0,1]$, $\tau \in [0, 1-\delta]$

$$\delta \le w(s,\tau) \le M_5 \tag{17}$$

при некотором $M_5 \in (0, +\infty)$. Поэтому $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_4(s)\,ds$ сходится в том и только том случае, когда $\alpha_2 > -1$, $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$.

Рассмотрим теперь интеграл $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_5(s)\,ds$. Для $s \in (0, 1/(1+\delta]$, $\tau \in [1-\delta, 1+\delta]$ справедливы неравенства

$$M_6 \le \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(1,\tau)} \le \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(s,\tau)} \le \frac{M_7}{\sqrt{(1-\tau)^2 + m_2^2 s^{2(\rho-1)}}}$$

при некоторых M_6, $M_7 \in (0, +\infty)$. Отсюда

$$2\delta M_6 \le I_5(s) \le M_8 \begin{cases} \ln\dfrac{1}{s}, & \rho > 1, \\ 1, & \rho = 1 \end{cases}$$

при некотором $M_8 \in (0, +\infty)$. Следовательно, для сходимости интеграла $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_5(s)\,ds$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$.

Перейдем к исследованию на сходимость интеграла $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_6(s)\,ds$. Для $s \in (0, 1/(1+\delta)]$, $\tau \in [1+\delta, 1/s]$ справедливы неравенства

$$\frac{\delta}{1+\delta}\tau \le w(s,\tau) \le \sqrt{1 + (a_1 + a_2)^2}\,\tau.$$

Отсюда видно, что рассматриваемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_1 > -1$, $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$.

Таким образом, первый из повторных интегралов справа в (16) сходится в том и только том случае, когда выполнены условия (9).

Второй из повторных интегралов в (16) сходится или расходится одновременно с интегралом $J_2 = \int_{1/(1+\delta)}^{1} s^{\alpha_1+\alpha_2}\,ds \int_0^{1-\delta} (\tau^{\alpha_2} d\tau)/w(s,\tau)$. Из неравенств (17), справедливых для $s \in [0,1],\ \tau \in [0, 1-\delta]$, следует, что интеграл J_2 сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_2 > -1$.

Таким образом, для сходимости интеграла (15), а следовательно, $I_{2,2}$ необходимо и достаточно выполнение условий (9).

Исследуем на сходимость интеграл $I_{1,2}$. Для его сходимости необходима и достаточна сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2}\,ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2+(a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\rho)^2}}$, равного сумме интегралов $\widetilde{I}'_{1,2} = \int_1^2 ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\alpha_2} s_2^{\alpha_2}\,ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2+(a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\rho)^2}}$ и $\widetilde{I}''_{1,2} = \int_2^{+\infty} ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2}\,ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2+(a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\rho)^2}}$. Интеграл $\widetilde{I}'_{1,2}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_2 > -1$. Интеграл $\widetilde{I}''_{1,2}$ сходится, если сходится интеграл $\int_2^{+\infty} ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2}\,ds_2}{s_1 - 1}$, а следовательно, и интеграл $\int_2^{+\infty} ds_1 \int_0^1 s_1^{\alpha_1+\beta_1-1} s_2^{\alpha_2}\,ds_2$, что возможно при $\alpha_1+\beta_1 < 0,\ \alpha - 2 > -1$. Таким образом, интеграл $I_{1,2}$ сходится, если $\alpha_1+\beta_1<0,\ \alpha_2 > -1$. Аналогично, интеграл $I_{2,1}$ сходится, если $\alpha_2+\beta_2 < 0,\ \alpha_1 > -1$. Итак, интеграл (11) сходится в том и только том случае, когда выполнены условия (9), (10).

II. $\rho = 0,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы

$$I_1^0 = \int\limits_{\Lambda_1^+(a_1)} |d\lambda_1| \int\limits_{\Lambda_1^+(a_2)} p(\lambda_1,\lambda_2)\,|d\lambda_2|, \quad I_2^0 = \int\limits_{\Lambda_2^+(a_2)} |d\lambda_2| \int\limits_{\Lambda_1^+(a_1)} p(\lambda_1,\lambda_2)\,|d\lambda_1|,$$

$$I_3^0 = \int\limits_{\Lambda_2^+(a_1)} |d\lambda_1| \int\limits_{\Lambda_1^+(a_2)} p(\lambda_1,\lambda_2)\,|d\lambda_2|.$$

Так как для любого $\lambda = -s+it \in \Lambda_1^+(a)$ справедливы неравенства $s+1 \le |\lambda|+1 \le (\sqrt{1+a^2}+1)(s+1)$, то для сходимости интеграла I_1^0 необходима и достаточна сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} ds_1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{(s_1+1)^{\beta_1}(s_2+1)^{\beta_2}\,ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2+(a_1(s_1+1)^\gamma - a_2(s_2+1)^\gamma)^2}}$$

$$= \int\limits_1^{+\infty} dt_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2}\,dt_2}{\sqrt{(t_1-t_2)^2+(a_1 t_1^\gamma - a_2 t_2^\gamma)^2}} = I_{1,1}.$$

Интеграл $I_{1,1}$, как установлено, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ сходится в том и только том случае, когда выполнено условие (10).

Исследуем сходимость интеграла I_2^0. Функция $|1-\lambda_2\mu_1|$ непрерывна на компактном множестве $T = \{(\mu_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \colon \mu \in \{1/\lambda_1 \in \Lambda_1^+(a_1)\} \cup \{0\},\ \lambda_2 \in \Lambda_2^+(a_2)\}$ и не обращается на нем в ноль. Поэтому найдутся $C_1, C_2 \in (0,+\infty)$ такие, что при всех $(\mu_1,\lambda_2) \in T$ $C_1 \le |1-\lambda_2\mu_1| \le C_2$, откуда следует, что при всех $\lambda_1 \in \Lambda_1^+(a_1),\ \lambda_2 \in \Lambda_2^+(a_2)$ $C_1|\lambda_1| \le |\lambda_1 - \lambda_2| \le C_2|\lambda_1|$. Из последних неравенств получаем, что для сходимости интеграла I_2^0 необходима и достаточна сходимость интеграла $\int_{\Lambda_1^+(a_1)} |\lambda_1|^{\beta_1-1}|d\lambda_1|$, которая имеет место при $\beta_1 < 0$.

Аналогично, интеграл I_3^0 сходится тогда и только тогда, когда $\beta_2 < 0$. Таким образом, интеграл I сходится в том и только том случае, когда выполняется (10). □

Доказательство лемм 2–4 проводится аналогично доказательству соответствующих лемм из [10].

Лемма 2. *Пусть* $0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}$, $\tau - \rho > -1$, $\sigma - \gamma < -1$, $h \in F_0(a,\tau,\sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Lambda(a)} h(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\Lambda(a_0)} h(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda.$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}$, $\tau > -1$, $\sigma < -1$, $h \in F_0(a,\tau,\sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Lambda(a)} h(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}$, $\tau > -1$, $\sigma < 0$, $\mu \notin \overline{\Delta(a)}$, $h \in F_0(a,\tau,\sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Lambda(a)} \frac{h(\lambda)}{\lambda - \mu}\,d\lambda = 2\pi i h(\mu).$$

Утверждение 3. *Пусть* $f_j \in F(a,\tau_j,\sigma_j)$ $(a \in (0,\overline{C}^{-1}),\ j = 1,2)$, *числа* $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$m_j \geq n_j, \quad \rho - \tau_j - n_j < 1, \quad \gamma - \sigma_j + m_j - n_j > 1 \quad (j = 1,2),$$

$\lambda_0 \in \Delta(a)$. *Тогда*

$$f_1(A;m_1,n_1,\lambda_0)f_2(A;m_2,n_2,\lambda_0) \subset (f_1f_2)(A;m_1+m_2,n_1+n_2,\lambda_0),$$

$$\widetilde{f}(A;m_1,n_1,\lambda_0)\widetilde{f}_2(A;m_2,n_2,\lambda_0) \supset (\widetilde{f_1f_2})(A;m_1+m_2,n_1+n_2,\lambda_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 из [8]. Сначала рассматривается частный случай $mj = nj = 0$ $(j = 1,2)$, когда в устанавливаемых включениях в действительности имеют место равенства (при этом используются лемма 1 для обоснования сходимости соответствующих интегралов и леммы 2–4). После этого рассматривается общий случай. □

Доказательства утверждений 4–7, 9 мы не приводим, так как они проводятся аналогично доказательствам теорем 3–6, 8 из [8] соответственно.

Утверждение 4. *Пусть* $\lambda_0 \in \Delta(a)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$, $m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n-\rho > -1$, $n-m-\gamma < -1$. *Тогда*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda(a)} \frac{R(\lambda)}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)}\,d\lambda = A^nR^m(\lambda_0).$$

Утверждение 5. *Пусть* $\lambda_0 \in \Delta(a)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$, $k,l \in \mathbb{Z}$, $k \leq l$, $f_j(\lambda) = \lambda^j$, $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j f_j(\lambda)$ $(\alpha_j \in \mathbb{C},\ \alpha_k,\ \alpha_l \neq 0)$, $m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $m \geq n$, $n+k-\rho > -1$, $n+l-m-\gamma < -1$. *Тогда*

$$f_j(A;m,n,\lambda_0) = A^j = \overline{\widetilde{f}_j(A;m,n,\lambda_0)} \quad (k \leq j \leq l),$$

причем второе из равенств имеет место при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$;

$$f(A;m,n,\lambda_0) \supset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j \supset \widetilde{f}(A;m,n,\lambda_0). \tag{18}$$

Утверждение 6. *Пусть* $m_0, n_0, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq n$, $m_0 \geq n_0$,

$$n - n_0 - \rho > -1, \quad m_0 - n_0 - m + n - \gamma < -1,$$

$\lambda_0, \lambda \in \Delta(a)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$. *Тогда*

$$-\frac{g(A; m, n, \lambda)}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{g(\mu; m_0, n_0, \lambda_0)}{g(\mu; m, n, \lambda)} R(\mu)\, d\mu = g(A; m_0, n_0, \lambda_0),$$

а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то*

$$-\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Lambda(a)} \frac{g(\mu; m_0, n_0, \lambda_0)}{g(\mu; m, n, \lambda)} R(\mu)\, d\mu \; g(A; m, n, \lambda)} = g(A; m_0, n_0, \lambda_0).$$

Утверждение 7. *Пусть* $f \in F(a, \tau, \sigma)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$, *числа* $m_j, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *таковы, что* $m_j \geq n_j$

$$\tau + n_j - \rho > -1, \quad \sigma - m_j + n_j - \gamma < -1,$$

$\lambda_j \in \Delta(a)$ $(j = 1, 2)$. *Тогда*

$$f(A; m_1, n_1, \lambda_1) = f(A; m_2, n_2, \lambda_2),$$

а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то* $\overline{\widetilde{f}(A; m_1, n_1, \lambda_1)} = \overline{\widetilde{f}(A; m_2, n_2, \lambda_2)}$.

Следствие 1. *Если в условиях утверждения* 7 $n_1 \leq n_2$, $m_1 - n_1 \leq m_2 - n_2$, *то*

$$\widetilde{f}(A; m_1, n_1, \lambda_1) \supset \widetilde{f}(A; m_2, n_2, \lambda_2).$$

До сих пор предполагалось, что ρ и γ фиксированы. Но они определяются неоднозначно, как и τ и σ для заданной функции $f \in \mathcal{F}$ при известных ρ и γ. Поэтому возникает вопрос о зависимости оператора $f(A)$ от этих и ряда других параметров. Ответ на этот вопрос дает утверждение 8, в пределах которого и в следующем за ним определении мы будем использовать обозначения $\overline{C}(\rho, \gamma)$, $\Delta(\rho, \gamma, a)$, $\Lambda(\rho, \gamma, a)$, $F(\rho, \gamma, a, \tau, \sigma)$, $f(A; \rho, \gamma, a_0, a, \tau, \sigma, m, n, \lambda)$, $\widetilde{f}(A; \rho, \gamma, a_0, a, \tau, \sigma, m, n, \lambda)$ вместо $\overline{C}$, $\Delta(a)$, $\Lambda(a)$, $F(a, \tau, \sigma)$, $f(A; m, n, \lambda)$, $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda)$ соответственно.

Утверждение 8. *Пусть при некоторых* $C_{0,j}$ $(j = 1, 2)$ *и всех* $s > 0$ *выполнены неравенства*

$$\|R(-s)\| \leq \frac{C_{0,j}}{s^{\rho_j}(s+1)^{\gamma_j - \rho_j}} \quad \Big(\rho_j \in [1, +\infty) \cup \{0\},\ \gamma_j \leq 1\Big),$$

$$0 < a_j < a_{0,j} < \overline{C}_j^{-1} \left(\overline{C}_j = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{\rho_j - \gamma_j} C_{0,j}, & \rho_j \geq 1, \\ C_{0,j}, & \rho_j = 0 \end{array} \right. \right), \quad f \in F(\rho_j, \gamma_j, a_j, \tau_j, \sigma_j),$$

$$\lambda_j \in \Delta(\rho_j, \gamma_j, a_j), \quad m_j, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m_j \geq n_j, \quad \rho_j - \tau_j - n_j < 1, \quad \gamma_j - \sigma_j + m_j - n_j > 1$$

при $j = 1, 2$. *Тогда*

$$f(A; \rho_1, \gamma_1, a_{0,1}, a_1, \tau_1, \sigma_1, m_1, n_1, \lambda_1) = f(A; \rho_2, \gamma_2, a_{0,2}, a_2, \tau_2, \sigma_2, m_2, n_2, \lambda_2), \tag{19}$$

а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то*

$$\overline{\widetilde{f}(A; \rho_1, \gamma_1, a_{0,1}, a_1, \tau_1, \sigma_1, m_1, n_1, \lambda_1)} = \overline{\widetilde{f}(A; \rho_2, \gamma_2, a_{0,2}, a_2, \tau_2, \sigma_2, m_2, n_2, \lambda_2)}. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq m_j$, $n \geq n_j$, $m \geq n$, $\gamma_j - \sigma_j + m - n > 1$, $\lambda_0 \in \Delta(a_1) \cap \Delta(a_2)$. Как и при доказательстве леммы 1 из [10], получаем

$$\int\limits_{\Lambda(\rho_1,\gamma_1,a_{0,1})} \frac{f(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)} = \int\limits_{\Lambda(\rho_2,\gamma_2,a_{0,2})} \frac{f(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)},$$

т. е. с учетом утверждения 7

$$f(A;\rho_1,\gamma_1,a_{0,1},a_1,\tau_1,\sigma_1,m_1,n_1,\lambda_1) = f(A;\rho_1,\gamma_1,a_{0,1},a_1,\tau_1,\sigma_1,m,n,\lambda_0)$$

$$= f(A;\rho_2,\gamma_2,a_{0,2},a_2,\tau_2,\sigma_2,m,n,\lambda_0) = f(A;\rho_2,\gamma_2,a_{0,2},a_2,\tau_2,\sigma_2,m_2,n_2,\lambda_2),$$

т. е. выполнено (19). Аналогично, если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то выполнено (20). $\square$

Утверждение 8 позволяет ввести следующее определение операторных функций.

О п р е д е л е н и е. Пусть $f \in F(\rho,\gamma,a,\tau,\sigma)$ и выполнены условия (7) $(m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda \in \Delta(\rho,\gamma,a))$. Тогда положим $f(A) = f(A;\rho,\gamma,a_0,a,\tau,\sigma,m,n,\lambda)$, а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то $\widetilde{f}(A) = \overline{\widetilde{f}(A;\rho,\gamma,a_0,a,\tau,\sigma,m,n,\lambda)}$.

Утверждение 9. *Пусть* $f \in F(a,\tau,\sigma)$, $h \in F(a,\tau_1,\sigma_1)$, $1/h \in F(a,æ,\nu)$, $\tau + æ - \rho > -1$, $\sigma + \nu - \gamma < -1$. *Тогда*

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} h(A) \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} R(\lambda)\,d\lambda;$$

если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то*

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} R(\lambda)\,d\lambda\ \widetilde{h}(A)}.$$

Анализ доказательства леммы 10 из [8] показывает, что для оператора $B = A^{-1}$ при некотором $C_0^B \in \mathbb{R}$ и всех $\mu = -s \in (-\infty, 0) \subset \rho(B)$ выполняется неравенство

$$\|R_B(-s)\| \leq \frac{C_0^B}{s^{\rho_1}(s+1)^{\gamma_1-\rho_1}}$$

с

$$\rho_1 = 2 - \gamma, \quad \gamma_1 = \min\{2-\rho, 1\}. \tag{21}$$

Тогда с учетом утверждения 2 имеет место

Лемма 5. *Пусть* $B = A^{-1}$. *Тогда при некотором* $d > 0$, $\Delta(d) \subset \rho(B)$, *и для каждого* $b \in (0,d)$ *найдется такое* $K_B = K_B(b) > 0$, *что при всех* $\mu \in \overline{\Delta(b)} \setminus \{0\}$

$$\|R_B(\mu)\| \leq \frac{K_B(b)}{|\mu|^{\rho_1}(|\mu|+1)^{\gamma_1-\rho_1}},$$

где ρ_1 *и* γ_1 *определяются формулами* (21).

Далее всюду считаем, что $B^0 = E$ для любого оператора $B\colon D(B) \subset X \to X$.

Лемма 6. *Пусть* $k, l, n \in \mathbb{Z}$, $k \leq l$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = k, k+1, \ldots, l)$, $\alpha_k \neq 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_l \neq 0$ *при* $-n \in \mathbb{N}$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ *— линейный инъективный оператор. Тогда*

$$B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} \subset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j. \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = l$ (22) имеет место. Поэтому считаем, что $k < l$. В этом предположении при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (22) устанавливаем индукцией по n. При $n = 0$ (22) имеет место. Предположим, что (22) справедливо при $n = p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и докажем (22) для $n = p+1$.

Пусть $y \in D\Big(B^{-(p+1)} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{(p+1)+j}\Big)$ и

$$u = B^{-(p+1)} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{(p+1)+j} y = B^{-p} B^{-1} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{p+1+j} y.$$

Для $j = k+1, \dots, l$ $B^{p+1+j} y \in D(B^{-1})$, поэтому $\sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j B^{p+1+j} y \in D(B^{-1})$, и, следовательно, поскольку $\alpha_k \neq 0$, $B^{p+1+k} y \in D(B^{-1})$, т. е. $u = B^{-p} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{p+j} y$, и в силу предложения индукции $u = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j y$. Поэтому (22) имеет место при $n = p+1$, а значит, и для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $-n \in \mathbb{N}$ и $C = B^{-1}$. Тогда по доказанному $C^n \sum_{j=k}^{l} \alpha_j C^{-n-j} \subset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j C^{-j}$, так как $\alpha_l \neq 0$. Заменяя C на B^{-1}, получаем (22). □

Следствие 2. *Пусть $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор, $S(B) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s B^s$, $T(B) = \sum_{t=0}^{n} \beta_t B^{-t} (\alpha_s, \beta_t \in \mathbb{C})$. Тогда при $\beta_0 \neq 0$*

$$S(B)T(B) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \alpha_s \beta_t B^{s-t}, \tag{23}$$

а при $\alpha_0 \neq 0$

$$T(B)S(B) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \alpha_s \beta_t B^{s-t}. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 6 при $\beta_0 \neq 0$

$$S(B)T(B) \subset \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \alpha_s \beta_t B^{s-t}. \tag{25}$$

С другой стороны, область определения правой части (25) равна $D(B^m) \cap D(B^{-n})$, и на ней левая часть (25) имеет смысл, т. е. при $\beta_0 \neq 0$ справедливо равенство (23). Аналогично, при $\alpha_0 \neq 0$ имеет место (24). □

Следствие 3. *Пусть $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор с $\rho(B) \neq \varnothing$, $\lambda \in \rho(B)$, $\mu \in \rho(B^{-1})$. Тогда*

$$R_B(\lambda) R_{B^{-1}}(\mu) = R_{B^{-1}}(\mu) R_B(\lambda). \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda\mu \neq 0$ следствие вытекает из равенства обратных операторов к обеим частям (26), имеющему место по следствию 2. При $\lambda\mu = 0$ равенство обратных операторов проверяется непосредственно. □

Лемма 7. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $m \geq n+j$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор с $\rho(B) \neq \varnothing$, $\lambda_0 \in \rho(B)$. Тогда*

$$B^j R_B^m(\lambda_0) = B^{-n} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0). \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $n + j < 0$, (27) выполняется. Если $n + j \geq 0$, $j \geq 0$, то равенство (27) справедливо в силу непрерывности оператора $B^{n+j} R^m(\lambda_0)$ на X. Пусть теперь $n + j \geq 0$, $j < 0$. Тогда $B^{-n} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = B^j B^{-n-j} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = B^j R_B^m(\lambda_0)$, поскольку $B^{n+j} R_B^m(\lambda_0)$ — непрерывный оператор на X. □

Лемма 8. *Пусть* $k,l \in \mathbb{Z}$, $k \le l$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = k,k+1,\dots,l)$, *при* $k < 0$ $\alpha_k \ne 0$, *при* $l > 0, \alpha_l \ne 0$. *Пусть также* $m,n \in \mathbb{N}$, $n+k \ge 0$, $m \ge n$, $m \ge n+l$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — *линейный инъективный оператор с* $\rho(B) \ne \varnothing$, $\lambda_0 \in \rho(B)$. *Тогда*

$$(B-\lambda_0E)^m B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j. \tag{28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим оператор в левой части (28) через W. Рассмотрим два случая.

1. $k \ge 0$. В этом случае с учетом того, что $n+l \le m$, $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0)$ — непрерывный на X оператор. Поэтому

$$W = (B-\lambda_0E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j (B-\lambda_0E)^m R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j.$$

2. $k < 0$. Используя леммы 6 и 7, имеем

$$B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) \subset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{-n} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) \subset B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0).$$

Отсюда

$$B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0).$$

Далее рассмотрим два подслучая.

2.1. $l \le 0$.

$$W = (B-\lambda_0E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = (B-\lambda_0E)^m R_B^m(\lambda_0) \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j.$$

2.2. $k < 0 < l$.

$$W = (B-\lambda_0E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = (B-\lambda_0E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{j-k} B^k R_B^m(\lambda_0)$$

$$= \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{j-k} (B-\lambda_0E)^m R_B^m(\lambda_0) B^k = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{j-k} B^k = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j. \qquad \square$$

Утверждение 10. *Пусть* $k \le l$, $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \ne 0$ *при* $k < 0$, $\alpha_l \ne 0$ *при* $l > 0$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — *линейный оператор с* $\rho(B) \ne \varnothing$, *инъективный при* $k < 0$. *Тогда оператор* $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j$ *замкнут.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем m, n, λ_0 такие, как в лемме 8. При $k < 0$ в силу ограничений на параметры оператор $(B-\lambda_0E)^m B^{-n}$ замкнут как обратный к непрерывному, а оператор $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0)$ непрерывен. Поэтому в силу (28) оператор $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j$ замкнут. При $k \ge 0$ замкнутость оператора $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j$ следует из представления

$$\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j = (B-\lambda_0E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0)$$

(справа стоит произведение замкнутого оператора на непрерывный). $\square$

З а м е ч а н и е 1. В случае $\rho(B) \ne \varnothing$ вывод о замкнутости оператора $\sum_{j=0}^{l} \alpha_j B^j$ $(\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 0,1,\dots,l$, $\alpha_l \ne 0)$ имеется в [1].

Утверждение 11. *Пусть* $B\colon D(B)\subset X\to X$ *— линейный инъективный оператор,* $\overline{D(B)}=\overline{\operatorname{Im}B}=X$, $\rho(B)\neq\varnothing$, $P(B)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_jB^j$ $(k,l\in\mathbb{Z},\ k\le l,\ \alpha_k,\dots,\alpha_l\in\mathbb{C})$, $\alpha_k\neq0$ *при* $k<0$, $\alpha_l\neq0$ *при* $l>0$, $n\in\mathbb{N}$. *Тогда* $\overline{D(B^n)\cap D(B^{-n})}=X$ *и*

$$\overline{P(B)\Big|_{D(B^n)\bigcap D(B^{-n})}}=P(B). \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что $n\ge\max\{|k|,l\}$. При $k\ge0$ равенство (29) установлено в теореме 1 из [8]. Согласно этой теореме

$$\overline{B\Big|_{D(B^n)\bigcap D(B^{-n})}}=B,$$

т. е. $D(B^n)\cap D(B^{-n})$ плотно в X.

Переходя от оператора B к оператору B^{-1}, получаем, что согласно [8] (29) имеет место при $l\le0$. Будем считать поэтому, что $k<0<l$.

В силу замкнутости оператора $P(B)$ достаточно установить, что

$$P(B)\subset\overline{P(B)\Big|_{D(B^n)\bigcap D(B^{-n})}}. \tag{30}$$

Пусть $x\in D(P(B))=D(B^k)\cap D(B^l)$, $\lambda_0\in\rho(B)\backslash\{0\}$, $z=(B^{-1}-(1/\lambda_0)E)^{|k|}(B-\lambda_0E)^lx$. В этом случае $1/\lambda_0\in\rho(B^{-1})$ и $x=R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}(1/\lambda_0)z$. Так как $\overline{D(B^n)\cap D(B^{-n})}=X$, то найдется последовательность $\{z_m\}\subset D(B^n)\cap D(B^{-n})$, сходящаяся к z. Положим $x_m=R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}(1/\lambda_0)z_m$. Поскольку

$$B^nR_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)\supset R_B^l(\lambda_0)B^nR_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)=R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)B^n$$

и $\{z_m\}\subset D(B^n)$, то $\{x_m\}\subset D(B^n)$. Аналогично, $\{x_m\}\subset D(B^{-n})$, т. е. $\{x_m\}\subset D(B^n)\cap D(B^{-n})$. Кроме того, по определению x_m и x из сходимости $\{z_m\}$ к z следует сходимость $\{x_m\}$ к x. Положим $Q_{|k|}(B^{-1})=\sum_{j=k}^{-1}\alpha_jB^j$, $S_l(B)=\sum_{j=0}^{l}\alpha_jB^j$. Тогда в силу непрерывности операторов $Q_{|k|}(B^{-1})R_{B^{-1}}^{|k|}(1/\lambda_0)$ и $S_l(B)R_B^l(\lambda_0)$ получаем

$$Q_{|k|}(B^{-1})x_m=Q_{|k|}(B^{-1})R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)z_m=R_B^l(\lambda_0)Q_{|k|}(B^{-1})R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)z_m$$

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}R_B^l(\lambda_0)Q_{|k|}(B^{-1})R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)z=Q_{|k|}(B^{-1})x,$$

$$S_l(B)x_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}S_l(B)x.$$

Таким образом, $x\in D(P(B))$ и $P(B)x_m\to P(B)x$. Поэтому (30) имеет место. □

Утверждение 12. *Пусть* $f(\lambda)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_j\lambda^j$ $(k,l\in\mathbb{Z},\ \alpha_j\in\mathbb{C})$, $\alpha_k\neq0$ *при* $k<0$, $\alpha_l\neq0$ *при* $l>0$. *Тогда*

$$f(A)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_jA^j, \tag{31}$$

а при $\overline{\operatorname{Im}A}=X$

$$\widetilde{f}(A)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_jA^j. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим (31). Пусть $a \in (0, \overline{C}^{-1})$, $\lambda_0 \in \Delta(a)$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq n$, $n + \min\{k, 0\} - \rho > -1$, $n + \max\{l, 0\} - m - \gamma < -1$. Тогда с учетом утверждения 4 и леммы 8 имеем

$$f(A) = f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{f(\mu)R(\mu)}{g(\mu; m, n, \lambda_0)} \, d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \sum_{j=k}^{l} \alpha_j \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m, n+j, \lambda_0)} = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{n+j} R^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j,$$

т. е. равенство (31) выполнено.

Пусть теперь $\overline{\operatorname{Im} A} = X$. Учитывая второе из соотношений (18) и равенство

$$D(\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)) = D(A^{m-n}) \cap D(A^{-n}),$$

получаем, что $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j \Big|_{D(A^{m-n}) \bigcap D(A^{-n})}$, откуда в силу утверждения 11 следует (32). □

Утверждение 13. *Для $f \in \mathcal{F}$ операторные функции $f(A)$ и при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$ $\widetilde{f}(A)$ плотно определены, причем*

$$\widetilde{f}(A) \subset f(A). \tag{33}$$

Если хотя бы одна из этих функций непрерывна на X, то непрерывна и другая, и они равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о (33) вытекает из (8) при соответствующих значениях параметров и определений операторных функций $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$. Поскольку по утверждению 11 обе они плотно определены при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то имеет место оставшаяся часть утверждения. □

Доказательства утверждений 14, 15 мы не приводим, так как они проводятся аналогично доказательству теорем 10, 11 из [8] соответственно.

Утверждение 14. *Пусть $f, 1/f \in \mathcal{F}$. Тогда существуют операторы $[f(A)]^{-1}$ и $[\widetilde{f}(A)]^{-1}$, причем $[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A)$, и при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$ $[\widetilde{f}(A)]^{-1} = \widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}(A)$.*

Утверждение 15. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Тогда*

$$f_1(A) f_2(A) \subset (f_1 f_2)(A), \tag{34}$$

а при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$

$$\overline{\widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A)} \supset (\widetilde{f_1 f_2})(A). \tag{35}$$

Если оператор $f_2(A)$ непрерывен, то

$$f_1(A) f_2(A) = (f_1 f_2)(A), \tag{36}$$

а если $\widetilde{f}_1(A)$ непрерывен и $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то

$$\overline{\widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A)} = (\widetilde{f_1 f_2})(A). \tag{37}$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть f_j, $1/f_j \in \mathcal{F}$ $(j = 1, 2)$. Тогда если оператор $(1/f_1)(A)$ непрерывен на X, то имеет место (36), а если $(1/f_2)(A)$ непрерывен и $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то справедливо (37).

Для доказательства достаточно в (36), (37) перейти к обратным операторам с помощью утверждения 14.

З а м е ч а н и е 3. Для $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ аналогично включениям (34), (35) устанавливаются соотношения $f_1(A) f_2(A) \ldots f_n(A) \subset (f_1 f_2 \ldots f_n)(A)$, и при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$

$$\overline{\widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A) \ldots \widetilde{f}_n(A)} \supset (\widetilde{f_1 f_2 \ldots f_n})(A).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
2. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
3. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 275 с.
4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 499 с.
5. **Соболевский П.Е., Чеботарева Л.М.** О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. мат. фак-та Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып. 3. С. 112–118.
6. **Martinez C., Miguel S., Javier P.** A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators // Osaka J. Math. 2000. Vol. 37, no. 3. P. 551–576.
7. **Миротин А.Р.** О многомерном функциональном исчислении Бохнера — Филлипса // Проблемы физики, математики и техники. 2009. Т. 1, № 1. С. 60–63.
8. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Некоторые классы функций линейного замкнутого оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 186–200.
9. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 81–83.
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Расширение класса степенных операторных функций // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 38. С. 80–90 (Математика и механика; вып. 8.)

Поступила 22.04.2016

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: Mark.Rekant@urfu.ru

REFERENCES

1. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. I. General yheory.* New York: Interscience Publishers, 1958, Ser. Pure and Appl. Math., vol. 7, 858 p.
2. Rudin W. *Functional analysis.* New York: McGraw-Hill Companies, 1973, McGraw-Hill Ser. in Higher Math., 397 p.
3. Krein S.G. *Linejnye differencialnye uravneniya v banahovyh prostranstvah* (Linear differential equations in Banach spaces). Providence: Amer. Math. Soc., 1972, Transl. Math. Monographs, vol. 29, 390 p.
4. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E. *Integralnye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij* (Integral operators in spaces of summable functions). Leyden: Noordhoff Internat. Publ., 1976, 520 p.
5. Sobolewski P.E., Chebotareva L. M. On fractional degrees of weakly positive operators. *Tr. mat. fac. Voronezh. Univ.*, Voronezh, 1971, iss. 3. pp. 112–118 (in Russian).
6. Martinez C., Miguel S., Javier P. A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators. *Osaka J. Math.*, 2000, vol. 37, no. 3, pp. 551–576.
7. Mirotin A.R. On multidimensional Bochner–Phillips functional calculus. *Probl. Phys. Mat. Techn.*, 2009, no. 1 (1), pp. 60–63 (in Russian).
8. Korkina L.F., Rekant, M.A. Some classes of functions of a linear closed operator. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. S121–S135.
9. Korkina L.F., Rekant, M.A. Fractional powers of a class of operators. *Soviet Math.* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1991, vol. 35, no. 9, pp. 79–81.
10. Korkina L.F., Rekant, M.A. The extension of the class of power operator functions. *Izv. Ural. Gos. Univ.*, 2005, no. 38, Ser. Matematika i Mekhanika, iss. 8, pp. 80–90 (in Russian).

L. F Korkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,

M. A. Rekant, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: e-mail: Mark.Rekant@urfu.ru .