ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 512.542+519.175

СТАБИЛИЗАТОРЫ ВЕРШИН ГРАФОВ С ПРИМИТИВНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ И УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА. III[1]

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Это статья — третья из цикла статей, результаты которого влекут справедливость усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок. Она посвящена рассмотрению случая примитивных групп подстановок с простым цоколем классического неортогонального лиева типа и непараболическим стабилизатором точки.

Ключевые слова: конечная примитивная группа подстановок, почти простая группа, группа классического лиева типа, стабилизатор точки, гипотеза Симса.

A. S. Kondrat'ev, V. I. Trofimov. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. III.

This is the third in a series of papers whose results imply the validity of a strengthened version of the Sims conjecture on finite primitive permutation groups. In this paper, the case of primitive groups with simple socle of classical non-orthogonal Lie type and non-parabolic point stabilizer is considered.

Keywords: finite primitive permutation group, almost simple group, group of classical Lie type, stabilizer of a point, Sims conjecture.

MSC: 20B15, 20D06, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-163-172

1. Введение

Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G. Следуя [3], для каждого $i \in \mathbb{N}$ индуктивно определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i-ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1},\ (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}.$$

Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1},\ (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}.$$

Нас интересует случай, когда $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \le |(M_2, M_1)^2|$ (соответствующую мотивировку, связанную с усиленной версией гипотезы Симса, см. в [2; 3]). Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначается через Π. Мы рассматриваем тройки из Π с точностью до следующей эквивалентности: тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π эквивалентны, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Отметим, что согласно [3, ч. I, предложение 1.1(a)] вторые взаимные ядра $(M_1, M_2)^2$ и $(M_2, M_1)^2$ являются p-группами для некоторого простого числа p.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061).

Цель нашего цикла статей — описать множество Π. В [3] рассмотрены случаи, когда группа G не является почти простой группой, когда группа G имеет простой знакопеременный цоколь и когда G — группа с простым цоколем $\mathrm{Soc}(G)$ исключительного лиева типа и $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$. Данная статья цикла посвящена рассмотрению случая, когда G — группа с простым цоколем $\mathrm{Soc}(G)$ классического неортогонального лиева типа и $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\mathrm{Soc}(G)$ *— простая линейная, унитарная или симплектическая группа и* $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ *— непараболическая подгруппа в* $\mathrm{Soc}(G)$. *Тогда* $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ *и справедливо одно из следующих утверждений*:

(a) $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 2, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$, $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 2*-подгруппа в* M_1;

(b) $G \cong U_3(8) : 3_1$ *или* $U_3(8) : 6$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 3, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3))$ *или* $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : GL_2(3))$ *соответственно,* $(M_1, M_2)^1 = O_3(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_3(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 3*-подгруппа или ее нормализатор в* M_1 *соответственно*;

(c) $G \cong L_4(3) : 2_2$ *или* $\mathrm{Aut}(L_4(3))$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 2, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times S_4$ *или* $\mathbb{Z}_2 \times (S_4 \wr \mathbb{Z}_2)$ *соответственно,* $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 2*-подгруппа в* M_1.

В каждом случае из пп. (a), (b) *и* (c) *тройки* (G, M_1, M_2) *из* Π *существуют и образуют один класс эквивалентности.*

Используемые в статье терминология и обозначения в основном стандартны (см., например, [5–7; 9]). Через $L_n^{\varepsilon}(q)$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ обозначается $L_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и $U_n(q)$ при $\varepsilon = -$, а через $S_n(q)$ — группа $PSp_n(q)$ (для четного n).

Укажем на опечатки в [3, ч. II]: на с. 184, строка 2 сверху, вместо L должно быть G; строка 11 сверху, вместо “$G = L$” должно быть “$G = L$, кроме случая (ii)”; строка 23 сверху, вместо t должно быть Z.

2. Доказательство теоремы

Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\mathrm{Soc}(G)$ — простая группа $L_n(q)$ $(n \geq 2)$, $U_n(q)$ $(n \geq 3)$ или $S_n(q)$ $(n \geq 4$ четно), где q — степень простого числа r, $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$ и $M_2 = M_1^g = gM_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Положим для краткости $L = \mathrm{Soc}(G)$ (мы считаем, отождествляя L с $\mathrm{Inn}(L)$, что $\mathrm{Inn}(L) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(L)$), $M = M_1$, $M_0 = M \cap L$, $K_1 = (M_1, M_2)^2$, $K_2 = (M_2, M_1)^2$, $T_1 = K_1 \cap L$, $T_2 = K_2 \cap L$, $R_1 = O_p((M_1, M_2)^1)$ и $R_2 = O_p((M_2, M_1)^1)$. Ввиду [3, ч. I, предложение 1.1; ч. II, предложение 1.1] подгруппа M есть p-локальная максимальная подгруппа в G с $F^*(M) = O_p(M)$ для некоторого простого числа p (отличного от r), $F^*(M_0) = O_p(M_0)$, $G = ML$, $K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$ и $K_1 \neq K_2$. Поскольку $G = ML$, будем считать, что $g \in L$. Ввиду [3, ч. I, теорема 4] можно считать, что L не изоморфна группам $L_2(q)$, $q \in \{4, 5, 9\}$, $L_4(2)$, $S_4(2)'$.

Лемма 2.1. *Выполняется одно из следующих утверждений*:
(i) *подгруппы* K_1 *и* K_2 *имеют нетривиальные пересечения с* L;
(ii) $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$;
(iii) $G \cong L_4(3) : 2$, *или* $\mathrm{Aut}(L_4(3))$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times S_4$, *или* $\mathbb{Z}_2 \times (S_4 \wr \mathbb{Z}_2)$ *соответственно*;
(iv) $G \cong U_3(8) : 3_1$, *или* $U_3(8) : 6$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3))$, *или* $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : GL_2(3))$ *соответственно.*

Доказательство. Предположим, что п. (i) неверен, и пусть $K_1 \cap L = 1$ (случай $K_2 \cap L = 1$ рассматривается аналогично). Поскольку K_1 — неединичная нормальная p-подгруппа в M, существует минимальная неединичная нормальная в M подгруппа E, содержащаяся в K_1. Ясно, что $M_0 = C_L(E)$.

Ввиду минимальности E, равенства $G = ML$ и [11, 2.5.12] подгруппа E порождается некоторым элементом e, следовательно, $M_0 = C_L(e)$ и $M = N_G(\langle e \rangle)$. Элемент e индуцирует на L внешний автоморфизм порядка p. Согласно [11, 2.5.12] этот автоморфизм внутреннедиагональный, графовый, полевой или графово-полевой. Ввиду [11, 4.5.1, 4.8.2, 4.9.1; 5], равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и максимальности в G подгруппы M заключаем, что выполняется один из пп. (ii)–(iv). □

Предположим сначала, что $L \cong S_4(q)$, где q четно и $q \geq 4$. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.14] группа G содержит нетривиальный графовый автоморфизм группы L, а подгруппа M_0 изоморфна $\mathbb{Z}_{q-1}^2 : D_8$, где $q > 4$, $\mathbb{Z}_{q+1}^2 : D_8$ или $\mathbb{Z}_{q^2+1} : \mathbb{Z}_4$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ подгруппа M_0 является нормализатором в L абелевой силовской p-подгруппы $O_p(M_0)$ из L. Теперь с учетом леммы 2.1 и включения $T_2 \leq O_p(M_0)$ ясно, что подгруппа $O_p(M_0)$ содержится в $N_{M_0}(T_2) = M_1 \cap M_2 \cap L$ и, следовательно, нормальна в M_1 и M_2, что невозможно.

В дальнейшем доказательстве теоремы будем предполагать, что L не изоморфна $S_4(q)$ для четного q. Согласно теореме 2.2.19 из [6], являющейся уточненной версией теоремы Ашбахера [4], группа M принадлежит какому-нибудь из классов Ашбахера $C_i(G)$, $1 \leq i \leq 8$, геометрических подгрупп группы G, которые определены в [6, разд. 2.2], причем возможное строение подгруппы M_0 приведено в [6, табл. 2.3, 2.5–2.11].

Далее, в леммах 2.2–2.8, мы рассмотрим возможность включения подгруппы M в каждый класс $C_i(G)$, $1 \leq i \leq 8$, в отдельности. При этом, говоря о выполнении какого-либо из пп. (a), (b) или (c) теоремы, мы подразумеваем справедливость для него и последнего утверждения теоремы.

Лемма 2.2. *$M \notin C_1(G)$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.2, 2.3; 12, разд. 2.9, 4.1; 11, теорема 4.5.1; 5] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_3(2)$, $M_0 \cong S_3$;

(ii) $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$, $M_0 \cong GL_2(3)$;

(iii) $L \cong U_3(3)$, $M_0 \cong (\mathbb{Z}_4 \circ SL_2(3)).2 \cong SL_2(3).4 \cong 4{\cdot}S_4$;

(iv) $L \cong U_5(2)$, $M_0 \cong S_3 \times (3_+^{1+2} : SL_2(3))$.

Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны.

В случаях (i) и (ii) ввиду $T_1T_2 \leq O_p(M_0)$ имеем $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. Поэтому выполняется один из случаев (iii), (iv).

Положим $Z_i = Z(O_p(M_i \cap L))$ и $\langle z_i \rangle = (O_p(M_i \cap L))'$ для $i \in \{1, 2\}$. Можно считать, что $z_1^g = z_2$. Поскольку $T_1T_2 \leq R_1 \cap R_2$, имеем $(T_i)' \leq \langle z_1 \rangle \cap \langle z_2 \rangle = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому подгруппы T_1 и T_2 абелевы, а значит, подгруппы Z_1T_1 и Z_2T_2 абелевы.

Покажем, что $T_i \leq Z_i$ для $i \in \{1, 2\}$. Предположим противное, т. е. что $T_i \nleq Z_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Подгруппа $M_i \cap L$ действует неприводимо на $O_p(M_i \cap L)/Z_i$, следовательно, $Z_iT_i = O_p(M_i \cap L)$, что противоречит неабелевости подгруппы $O_p(M_i \cap L)$. Поэтому наше утверждение доказано.

Подгруппа M_0 содержит некоторую силовскую p-подгруппу S группы L. С учетом [1, теорема 1] легко видеть, что $N_L(S) < M_0$. Теорема Бернсайда [9, теорема 7.1.1] влечет, что подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(S)$ относительно L. Отсюда следует, что подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(S)$ относительно L, а значит подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(O_p(M_0))$ относительно L.

Предположим, что T_2 не лежит в Z_1. Тогда $C_{O_p(M_0}(T_2) = Z_1T_2 \leq M_1 \cap M_2$ и, следовательно, $Z_1 < Z_1T_2 \leq R_1$. Подгруппа $M_1 \cap L$ действует неприводимо на $O_p(M_0)/Z_1$, поэтому $R_1 \cap L = O_p(M_0)$ и, следовательно, коммутант и центр подгруппы $R_1 \cap L$ равны $\langle z_1 \rangle$ и Z_1 соответственно. Подгруппа T_2 нормальна в R_1 и не содержится в Z_1, следовательно, $\langle z_1 \rangle \leq [T_2, R_1 \cap L] \leq T_2$. Но тогда по предыдущему абзацу имеем $\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle$, что невозможно.

Итак, T_2 лежит в Z_1. Ясно, что $T_2 < Z_1$. Аналогично получаем, что $T_1 < Z_2$. В случае (iii) это невозможно. Поэтому выполняется случай (iv). Тогда $|T_1| = |T_2| = 3$. Подгруппа T_2 не является нормальной в M_0, поэтому $|M_0 : N_{M_0}(T_2)| = 2$. Но $M_0 \cap M_2 = N_{M_0}(T_2)$, следовательно, подгруппа $M_0 \cap M_2$ нормальна в L, что невозможно. □

Лемма 2.3. *$M \notin C_3(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна. Тогда на основании равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.6; 12, разд. 2.9, 4.3] заключаем, что $L \cong L_n^{\varepsilon}(q)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, n — простое число, $n \geq 3$ при $\varepsilon = -$, и $M_0 \cong \mathbb{Z}_{(q^n-\varepsilon 1)/(q-\varepsilon 1)(q-\varepsilon 1,n)}.\mathbb{Z}_n$.

Пусть $n = 2$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Ввиду [6, табл. 8.1] имеем $M_0 \cong D_{2(q+1)/(2,q-1)}$. Отсюда следует, что $q+1 = (2, q-1)p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Если $p > 2$, то $T_1T_2 \leq O_p(M_0) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, откуда $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. Поэтому $p = 2$ и $M_0 \cong D_{2^{k+1}}$. Ясно, что $k \geq 2$. Поскольку $T_1T_2 \leq M_1 \cap M_2$, имеем $\Phi(T_i) \leq \Phi(M_1 \cap L) \cap \Phi(M_2 \cap L) = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому T_1 и T_2 — элементарные абелевы 2-группы порядка, не превосходящего 4. Предположим, что $|T_2| = 4$. Поскольку подгруппа T_2 нормальна в M_2, имеем $k = 2$, откуда $q = 7$, и, следовательно, $M_2 \cap L = N_L(T_2) \cong S_4$, что не так. Таким образом, $|T_1| = |T_2| = 2$ и, следовательно, $T_i = Z(M_i \cap L)$ для $i \in \{1, 2\}$. Но тогда $N_{M_0}(T_2) = M_1 \cap M_2 \cap L = T_1 \times T_2 = R_1 \cap L = R_2 \cap L$, что невозможно.

Итак, $n > 2$. По теореме Жигмонди [14] существует отличное от n простое число s, делящее $|M_0|$. С учетом строения подгруппы M_0 имеем $s = p$ и $M_0 \cong \mathbb{Z}_{p^k}.\mathbb{Z}_n$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Но тогда $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. □

Лемма 2.4. *$M \notin C_4(G) \cup C_7(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма следует из равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.7, 2.10, 8.26, 8.28, 8.48; 12, разд. 2.9, 4.4, 4.7]. □

Лемма 2.5. *Если $M \in C_5(G)$, то выполняется п.* (b) *теоремы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.8, 8.5, 8.10; 12, разд. 2.9, 4.5; 5] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_2(q)$, $q = q_0^m$, $q_0 \leq 3$, m — простое число, M_0 изоморфна S_3 при $q_0 = 2$, S_4 при $q = 9$ и A_4 при $q = 3^m > 9$;

(ii) $L \cong U_3(8)$, $M_0 \cong \mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3)$.

Предположим, что $T_i \neq 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда T_i является неединичной нормальной в $M_i \cap L$ подгруппой из $O_p(M_i \cap L)$. Поскольку M_i неприводимо действует на $O_p(M_i \cap L)$, подгруппа T_i совпадает с $O_p(M_i \cap L)$. Пусть $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Так как $K_i \leq O_p(M_j)$, имеем $T_i \leq O_p(M_j \cap L)$, а поскольку порядки подгрупп T_i и $O_p(M_j \cap L)$ совпадают, то совпадают сами эти подгруппы. Но тогда $O_p(M_i \cap L) = O_p(M_j \cap L)$, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, $T_i = 1$ для каждого $i \in \{1, 2\}$. Ввиду леммы 2.1 выполняется п. (iv) этой леммы, т. е. $G \cong U_3(8) : 3_1$ или $U_3(8) : 6$ и $M \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3))$ или $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : GL_2(3))$ соответственно. Учитывая, что в группе G имеется точно три класса сопряженности подгрупп, изоморфных M, и они сопряжены в $\mathrm{Aut}(L)$ (см. [5]), и рассуждая, как при рассмотрении подслучая (2b(i)) доказательства теоремы из [3, ч. II], получим, что выполняется п. (b) доказываемой теоремы. □

Лемма 2.6. $M \notin C_6(G)$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда согласно [6, табл. 2.9] имеем, что $O_p(M_0)$ — (нетривиальная) элементарная абелева группа, на которой группа $M_0/O_p(M_0)$ действует неприводимо. Так как согласно лемме 2.1 для каждого $i \in \{1,2\}$ нормальная p-подгруппа T_i группы M_i неединична, то отсюда следует, что $T_i = O_p(M_i \cap L)$ для каждого $i \in \{1,2\}$ и, в частности, $|T_1| = |T_2|$. Но $T_2 \leq O_p(M_1) \cap L = O_p(M_1 \cap L)$. Следовательно, $T_1 = T_2$, что невозможно. $\square$

Лемма 2.7. *Если $M \in C_8(G)$, то выполняется один из пп.* (a) *или* (c) *теоремы.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.11, 8.1, 8.3, 8.8; 12, разд. 2.9, 4.8; 5] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_3(3)$, $M_0 \cong PSO_3(3) \cong S_4$;

(ii) $L \cong L_3(4)$, $M_0 \cong U_3(2) \cong \mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3)$;

(iii) $L \cong L_4(3)$, $M_0 \cong PSO_4^+(3).2 \cong S_4 \times S_4$.

Пусть выполняется случай (i). Так же, как при доказательстве леммы 2.5, показываем, что $T_i = 1$ для каждого $i \in \{1,2\}$. Ввиду леммы 2.1 выполняется п. (ii) этой леммы, т.е. $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$ и $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$. Тогда $p = 2$ и $O_2(M_1)$ — элементарная абелева группа порядка 8. Положим $W = O_2(M_1)$. Тогда $W^g = O_2(M_2)$ и $K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq W \cap W^g$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = N_{M_2}(K_1) = N_{M_1}(K_2)$, и, следовательно, W и W^g — нормальные подгруппы в $M_1 \cap M_2$. Поскольку $W \neq W^g$ и $|M_1|_2 = 16$, имеем $|WW^g| = 16$, что влечет $|W \cap W^g| = 4$ и $W \cap W^g = Z(WW^g) = K_1 \times K_2$.

Поскольку $|G|_2 = 2^5$, подгруппа $WW^g \cong \mathbb{Z}_2 \times D_8$ является собственной нормальной подгруппой в некоторой силовской 2-подгруппе P из G. Возьмем элемент $x \in (P \cap L) \setminus WW^g$. Ввиду [5] можно считать, что подгруппа $\langle x^2 \rangle$ совпадает с коммутантом подгруппы WW^g, лежащим в M. Ясно, что элемент x переставляет подгруппы K_1 и K_2. Поэтому можно считать, что $\langle g \rangle = \langle x \rangle$. Отсюда следует, что тройки (G, M_1, M_2) и (G, M_2, M_1) эквивалентны и $M_1 \cap M_2 = WW^g$, так что выполняется п. (a) теоремы.

Пусть выполняется случай (ii). Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Рассуждая, как при доказательстве леммы 2.5, приходим к противоречию.

Пусть выполняется случай (iii). Тогда $M_0 = L_1 \times L_2$, где $L_1 \cong L_2 \cong S_4$. Пусть $S_i \in Syl_2(L_i)$ и $E_i = O_2(L_i)$ для $i \in \{1,2\}$. Силовская 3-подгруппа из M_0 действует регулярно на множестве $O_2(M_0) \setminus (E_1 \cup E_2)$, поэтому элементы этого множества попарно сопряжены в M_0. Пусть $S \in Syl_2(M_0)$ и $S \leq T \in Syl_2(L)$. Ввиду [10, разд. 6] имеем $T \cong D_8 \wr \mathbb{Z}_2$, причем S — единственная максимальная подгруппа в T, изоморфная $D_8 \times D_8$. Поэтому в $T \setminus S$ найдется инволюция u. Можно считать, что $S = S_1 \times S_1^u$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда $S_1 \cap S_1^u$ — неединичная нормальная подгруппа в T и, следовательно, центр группы T, имеющий порядок 2, содержится в этой подгруппе. Если при этом $S_2 \cap S_2^u \neq 1$, то $Z(T) \leq S_2 \cap S_2^u$, что противоречит равенству $S = S_1 \times S_2$. Поэтому $S = S_2 \times S_2^u$ и, заменяя без потери общности S_2 на S_1, получаем требуемое. Подгруппа T порождается инволюциями a_1, a_2, b_1, b_2 и u, где $S_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$, $a_2 = a_1^u$ и $b_2 = b_1^u$. Положим $z_1 = [a_1, b_1]$ и $z_2 = [a_2, b_2]$, $z = z_1z_2$, $A = \langle z_1, z_2, a_1, a_2 \rangle$ и $B = \langle z_1, z_2, b_1, b_2 \rangle$. Ввиду [10, разд. 6] группа L имеет точно два класса сопряженных инволюций с представителями z и z_1, причем инволюции z и a_1z сопряжены. Легко видеть, что элементарные абелевы подгруппы порядка 16 из S исчерпываются подгруппами A, B, $\langle z_1, z_2, a_1, b_2 \rangle$ и $\langle z_1, z_2, a_2, b_1 \rangle$, причем подгруппы A и B нормальны в T, а последние две подгруппы переставляются инволюцией u. Поскольку $N_T(O_2(M_0)) = S$, то подгруппа $O_2(M_0)$ равна $\langle z_1, z_2, a_1, b_2 \rangle$ или $\langle z_1, z_2, a_2, b_1 \rangle$.

Четверная подгруппа E_2 нормальна в S, поэтому она нетривиально пересекается с $Z(S)$, и значит, $E_2 \cap Z(S) = \langle z_2 \rangle$ или $\langle z \rangle$. Предположим, что выполняется вторая возможность. Тогда инволюции z_2 и a_1z принадлежат $O_2(M_0) \setminus (E_1 \cup E_2)$ и, следовательно, сопряжены, что не так. Поэтому выполняется первая возможность, и, следовательно, E_1 и E_2 — единственные четверные подгруппы из $O_2(M_0)$, все неединичные элементы которых сопряжены с z_1.

Предположим, что $T_i \neq 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда T_i является неединичной нормальной в $M_i \cap L$ подгруппой из $O_2(M_i \cap L)$. Ясно, что подгруппа T_i либо четверная, либо совпадает с $O_2(M_i \cap L)$. Пусть $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Поскольку $T_i \leq O_2(M_j)$, имеем $T_i \leq O_2(M_j \cap L)$. Если T_i совпадает с $O_2(M_i \cap L)$, то $O_2(M_i \cap L) = O_2(M_j \cap L)$, что противоречит условию теоремы. Поэтому T_i — четверная подгруппа. Тогда $T_i < O_2(M_j \cap L)$. Из доказанного в предыдущем абзаце следует, что подгруппа T_i нормальна в $M_j \cap L$, а это противоречит условию теоремы.

Таким образом, $T_i = 1$ для каждого $i \in \{1, 2\}$. Ввиду леммы 2.1 выполняется п. (iii) этой леммы, т. е. $G \cong L_4(3) : 2$ или $\mathrm{Aut}(L_4(3))$ и $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times S_4$ или $\mathbb{Z}_2 \times (S_4 \wr \mathbb{Z}_2)$ соответственно. Тогда $p = 2$ и $O_2(M_1)$ — элементарная абелева группа порядка 32. Положим $W = O_2(M_1)$. Тогда $W^g = O_2(M_2)$ и $K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq W \cap W^g$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = N_{M_2}(K_1) = N_{M_1}(K_2)$, и, следовательно, W и W^g — нормальные подгруппы в $M_1 \cap M_2$. Поскольку $W \cap L \neq W^g \cap L$, из доказанного выше следует, что $|(W \cap L)(W^g \cap L)| = 2^6$ и $|WW^g| = 2^7$, откуда $|W \cap W^g| = 8$ и $W \cap W^g = Z(WW^g) = (Z(WW^g) \cap L) \times K_1$.

Поскольку $|LK_1|_2 = 2^8$, подгруппа $WW^g \cong \mathbb{Z}_2 \times D_8 \times D_8$ является собственной нормальной подгруппой в некоторой силовской 2-подгруппе P из LK_1. В $(P \cap L) \setminus WW^g$ существует инволюция v, переставляющая подгруппы $W \cap L$ и $W^g \cap L$, и, следовательно, переставляющая подгруппы W и W^g. Поэтому можно считать, что $g = v$. Отсюда следует, что тройки (G, M_1, M_2) и (G, M_2, M_1) эквивалентны и пересечение $M_1 \cap M_2$ равно WW^g при $G \cong L_4(3) : 2$ и $N_M(WW^g)$ при $G \cong \mathrm{Aut}(L_4(3))$, так что выполняется п. (c) теоремы. $\square$

Лемма 2.8. $M \notin C_2(G)$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной формой, ассоциированное с группой L, где $F = \mathbb{F}_q$, если L — линейная или симплектическая группа, и $F = \mathbb{F}_{q^2}$, если L — унитарная группа. Положим $\widetilde{L} = SL(V)$ в случае $L \cong L_n(q)$, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$, $\widetilde{L} = SU(V)$ в случае $L \cong U_n(q)$, $n \geq 3$ и $(n, q) \neq (3, 2)$, $\widetilde{L} = Sp(V)$ в случае $L \cong S_n(q)$, $n \geq 4$ четно и q нечетно при $n = 4$. Будем отождествлять L с $\widetilde{L}/Z(\widetilde{L})$. Для произвольной подгруппы H группы L через $\widetilde{H}$ будем обозначать полный прообраз H при естественном гомоморфизме $\widetilde{L} \to L$. Кроме того, для произвольного элемента $h \in L$ через $\widetilde{h}$ будем обозначать (некоторый) его прообраз при этом гомоморфизме.

Согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b)] подгруппа $\widetilde{M_0}$ есть стабилизатор в $\widetilde{L}$ разложения $V = V_1 \times \ldots \times V_t$ пространства V, где $t \geq 2$ и $\dim V_i = m = n/t$ для всех $1 \leq i \leq t$, какого-то из указанных в [6, табл. 2.4] типов, соответствующих случаю данной L. При этом соответствующее каждой из этих возможностей строение группы $\widetilde{M_0}$ приведено в [6, табл. 2.5]. Заметим, что при каждой из этих возможностей группа M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ симметрическую группу подстановок. В силу леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Кроме того, ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, теорема 2.2.19.(i).(b), табл. 2.5] имеем $m \leq 3$.

Предположим сначала, что либо $t \geq 5$, либо $t = 4$ и $p \neq 2$, либо $t = 3$ и $p \neq 3$. Так как группа M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ симметрическую группу подстановок, то при этом предположении группа $O_p(M_0)$ стабилизирует каждое из подпространств $V_1, \ldots, V_t$ векторного пространства V. Поскольку $T_1 \leq O_p(M_0) \cap O_p(M_0^g)$, то отсюда следует, что T_1 стабилизирует каждое из подпространств $V_1, \ldots, V_t, g(V_1), \ldots, g(V_t)$ векторного пространства V.

Далее, так как $\{V_1, \ldots, V_t\} \neq \{\widetilde{g}(V_1), \ldots, \widetilde{g}(V_t)\}$ (поскольку $M_1 \neq M_2$), то будем, не теряя общности, предполагать, что $\widetilde{g}(V_1) \notin \{V_1, \ldots, V_t\}$. Тогда найдется вектор $w \in \widetilde{g}(V_1)$ такой, что $w = w_1 + \ldots + w_t$, где $w_i \in V_i$ для каждого $1 \leq i \leq t$, причем $w_k \neq 0 \neq w_l$ для некоторых $1 \leq k < l \leq t$.

В зависимости от значения m имеем три случая.

Случай $m = 1$. Поскольку $1 \neq T_1 \trianglelefteq M_0$, причем T_1 стабилизирует каждое из подпространств $V_1, \ldots, V_t$ векторного пространства V, то согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b), табл. 2.5] некоторый элемент $h \in T_1$ не стабилизирует подпространство $\langle w_k + w_l\rangle$ векторного пространства V. Но тогда (учитывая, что h стабилизирует V_i для каждого $1 \le i \le t$) элемент h не стабилизирует и подпространство $\langle w_1 + \ldots + w_t\rangle = \langle w\rangle = \widetilde{g}(V_1)$ векторного пространства V. Противоречие с тем, что T_1 стабилизирует $\widetilde{g}(V_1)$.

С л у ч а й $m = 2$. Согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b)] для L и M_0 имеет место одна из следующих возможностей из [6, табл. 2.5]:

(i) $L \cong L_{2t}(q)$, $\widetilde{M_0} \cong SL_2(q)^t.(q-1)^{t-1}.S_t$;

(ii) $L \cong U_{2t}(q)$, $\widetilde{M_0} \cong SU_2(q)^t.(q+1)^{t-1}.S_t$;

(iii) $L \cong S_{2t}(q)$, $\widetilde{M_0} \cong Sp_2(q)^t.(q+1)^t : S_t$.

С учетом равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, предложение 2.3.6] заключаем, что в (i)–(iii) имеем $q = 3$ и $p = 2$. Отсюда вытекает существование для произвольных различных $1 \le i_1, i_2 \le t$ такого элемента $h_{i_1,i_2} \in T_1$, что некоторый его прообраз $\widetilde{h}_{i_1,i_2}$ действует тождественно на каждом из подпространств V_i, $1 \le i \le t$, $i_1 \ne i \ne i_2$, векторного пространства V и инвертирует подпространства V_{i_1} и V_{i_2}. Заметим, что (в силу $h_{i_1,i_2} \in T_1$) элемент h_{i_1,i_2} стабилизирует каждое из подпространств $g(V_1), \ldots, g(V_t)$ векторного пространства V.

Так как $w \in \widetilde{g}(V_1)$, то $w - \widetilde{h}_{k,l}(w) = 2w_k + 2w_l \in \widetilde{g}(V_1)$, и, следовательно, $w_k + w_l \in \widetilde{g}(V_1)$. Выбирая $1 \le j \le t$, отличное от k и l, получаем теперь $w_k + w_l - \widetilde{h}_{k,j}(w_k + w_l) = 2w_k \in \widetilde{g}(V_1)$ и $w_k + w_l - \widetilde{h}_{l,j}(w_k + w_l) = 2w_l \in \widetilde{g}(V_1)$, откуда $w_k \in \widetilde{g}(V_1)$, $w_l \in \widetilde{g}(V_1)$, и, следовательно, $\widetilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l\rangle$ (что, отметим, уже исключает возможность (iii), поскольку $\widetilde{g}(V_1)$ оказывается вполне изотропным, а V_1 невырождено). Но тогда $\langle w_k\rangle = V_k \cap \widetilde{g}(V_1)$ является T_1-инвариантным подпространством V_k, что с учетом того, что стабилизатор V_k в группе M_0 индуцирует на множестве одномерных подпространств V_k группу, содержащую $PSL(V_k)$, а группа T_1 нормальна в M_0, влечет тривиальность действия T_1 на множестве одномерных подпространств V_k. В силу транзитивности действия M_0 на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ и $T_1 \trianglelefteq M_0$ отсюда следует, что T_1 стабилизирует каждое одномерное подпространство любого из векторных пространств V_i, $1 \le i \le t$. Таким образом, для любого $\widetilde{h}$, где $h \in T_1$, и любого $1 \le i \le t$ действие $\widetilde{h}$ на V_i есть умножение на некоторый элемент поля F. Предположим, что для некоторого $\widetilde{h}$, где $h \in T_1$, и некоторых $1 \le k' < l' \le t$ действие $\widetilde{h}$ на $V_{k'}$ и на $V_{l'}$ есть умножение на различные элементы поля F. Поскольку $T_1 \trianglelefteq M_0$ и M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ симметрическую группу подстановок, будем, не теряя общности, предполагать, что $k' = k$ и $l' = l$. Кроме того, будем, не теряя общности, предполагать, что $\widetilde{h}$ действует на V_k тождественно и действует на V_l как умножение на элемент $c \ne 1$ поля F. Рассмотрим действие $\widetilde{h}$ на $\widetilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l\rangle$. Элемент $\widetilde{h}$ стабилизирует вектор $w_k \in V_k$ и отображает вектор $w_l \in V_l$ в вектор cw_l, где $c \ne 1$. Учитывая, что стабилизатор подпространства $\widetilde{g}(V_1)$ в группе M_0^g индуцирует на множестве одномерных подпространств $\widetilde{g}(V_1)$ группу, содержащую $PSL(V_k)$, заключаем отсюда, что $h \notin O_p(M_0^g)$. Противоречие с тем, что $h \in T_1 \le O_p(M_0^g)$.

С л у ч а й $m = 3$. Согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b), табл. 2.5] $L \cong U_{3t}(q)$ и $\widetilde{M_0} \cong SU_3(q)^t.(q+1)^{t-1}.S_t$. С учетом равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ заключаем дополнительно, что $q = 2$ и $p = 3$. Но тогда из $1 \ne T_1 \le O_3(M_0)$ и $T_1 \trianglelefteq M_0$ следует существование для произвольного $1 \le i \le t$ такой подгруппы $L_i \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ группы T_1, что она действует тождественно на множестве прямых каждого из подпространств V_j, $1 \le j \le t$, $j \ne i$, векторного пространства V и не стабилизирует прямых подпространства V_i. Рассматривая проекции векторов вида $\widetilde{h}(w)$, где $h \in L_k \cup L_l$, на $V_k + V_l$ при разложении $V = V_1 + \ldots + V_t$, заключаем, что натянутое на них подпространство векторного пространства V имеет размерность ≥ 4. Противоречие с тем, что в силу $w \in \widetilde{g}(V_1)$, $L_k \le T_1$ и $L_l \le T_1$ эти векторы содержатся в $\widetilde{g}(V_1)$, причем $\dim(\widetilde{g}(V_1)) = 3$.

Предположим, что $t = 2$. Тогда с учетом равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и максимальности подгруппы M в G согласно [6, табл. 2.4, 2.5, 8.1, 8.8, 8.10, 8.12, 8.26] и [12, разд. 2.9, 4.2; 5; 3, ч. I, теорема 4] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_2(q)$, $3 < q \ne 9$, $m = 1$, $M_0 \cong D_{2(q-1)/(2,q-1)}$;

(ii) $L \cong L_4(3)$, $m = 2$, $M_0 \cong \Omega_4^+(3).2^2 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2^2$, $G \not\le L_4(3).2_2$;

(iii) $L \cong U_4(3)$, $m = 2$, $M_0 \cong \Omega_4^+(3).4 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).4$;

(iv) $L \cong U_6(2)$, $m = 3$, $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2)).3.2 \cong 3^{1+4}.[2^7 \cdot 3]$;

(v) $L \cong S_4(3)$, $m = 2$, $M_0 \cong \Omega_4^+(3).2 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2 \cong 2.(A_4 \wr S_2)$.

Пусть выполняется случай (i). Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ имеем $q-1 = (2, q-1)p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Предположим, что $p > 2$. Тогда $O_p(M_0) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$. Поэтому $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(O_p(M_0)) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. Таким образом, $p = 2$. Ввиду [8] $q = r \geq 17$. Поэтому M_0 — диэдральная силовская 2-подгруппа порядка ≥ 16 в L. Поскольку $T_1T_2 \leq M_1 \cap M_2$, имеем $\Phi(T_i) \leq \Phi(M_1 \cap L) \cap \Phi(M_2 \cap L) = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому T_1 и T_2 — элементарные абелевы 2-группы порядка, не превосходящего 4. Но подгруппа T_i нормальна в $M_i \cap L$ для $i \in \{1, 2\}$, следовательно, $T_i = Z(M_i \cap L)$ для $i \in \{1, 2\}$. Но тогда $N_{M_0}(T_2) = M_1 \cap M_2 \cap L = T_1 \times T_2 = R_1 \cap L = R_2 \cap L$, что невозможно.

Пусть выполняется один из оставшихся случаев (ii)–(v). Тогда $O_p(M_0)$ — экстраспециальная p-группа. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Подгруппа $M_i \cap L$, где $i \in \{1, 2\}$, действует неприводимо на $O_p(M_i \cap L)/Z(O_p(M_i \cap L))$ и $T_1 < T_1T_2 \leq R_1 \cap L \leq O_p(M_0)$, следовательно, $T_i = Z(O_p(M_i \cap L))$ и $R_1 \cap L = O_p(M_0)$. Но тогда подгруппа T_2 нормальна в $O_p(M_0)$, откуда $T_1 = T_2$, что невозможно.

Предположим, что $t = p = 3$. В зависимости от значения m имеем три случая.

С л у ч а й $m = 1$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_3(M_0)$ и [6, табл. 8.3, 8.5] имеем $L \cong L_3^{\varepsilon}(q)$ и $M_0 \cong (q - \varepsilon 1)^2/(3, q - \varepsilon 1) : S_3$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $q - \varepsilon 1 = 3^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, причем $k > 1$ при $\varepsilon = +$. В силу [8] отсюда следует, что $\varepsilon = -$ и $q = 8$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Согласно [5] имеем $M_0 = A \leftthreetimes (\langle x \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle)$, где $A \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $|x| = 3$, $|y| = 2$, $\langle x, y \rangle \cong S_3$, $T := A\langle x \rangle \in Syl_3(L)$, $Z(T) = \Phi(A)$, $T' = \Phi(T) = \Omega_1(A)$. Поэтому подгруппа A слабо замкнута в T относительно L и, следовательно, подгруппы порядка 3 из A, отличные от $Z(T)$, попарно сопряжены в M, но не сопряжены с $Z(T)$ в L. Ясно, что $|M_1 \cap M_2 \cap L|_3 \leq 3^3$ и $(R_1 \cap L)(R_2 \cap L) < T$. Поскольку $K_1 < K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2$, отсюда следует, что $|T_1T_2| = 9$ и $|(R_1 \cap L)(R_2 \cap L)| = 27$.

Предположим, что $T_1T_2 = R_1 \cap L$. Тогда $T_1T_2 = \Omega_1(A)$ и, следовательно, $T_1T_2 = T_1 \times T_2$. Поэтому $T_1 = Z(T)$ и ввиду [5] $N_L(T_2) \cong \mathbb{Z}_3 \times L_2(8)$; противоречие с тем, что $N_L(T_2) = M_2 \cap L$. Таким образом, $T_1T_2 = R_2 \cap L < R_1 \cap L$. Но тогда $T_1T_2 = \Omega_1(A)^g$ и мы, как выше при $T_1T_2 = \Omega_1(A)$, приходим к противоречию.

С л у ч а й $m = 2$ невозможен ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.24, 8.26, 8.28].

С л у ч а й $m = 3$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.54, 8.56] имеем $L \cong U_9(2)$ и $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2)) : 3^2.S_3$. Рассуждения, аналогичные используемым при рассмотрении возможностей (ii)–(v) случая $t = 2$, приводят к противоречию.

Предположим, что $t = 4$ *и* $p = 2$. В зависимости от значения m имеем три случая.

С л у ч а й $m = 1$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.8, 8.10, 8.12] имеем $L \cong L_4^{\varepsilon}(q)$ и $M_0 \cong (q - \varepsilon 1)^3/(4, q - \varepsilon 1) : S_4$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, q нечетно, причем $q > 3$ для $\varepsilon = +$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_3(M_0)$ имеем $q - \varepsilon 1 = 2^k \geq 4$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны.

Имеем $M_0 = A \leftthreetimes B$, где A — абелева 2-группа порядка $(q - \varepsilon 1)^3/(4, q - \varepsilon 1)$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ и $B \cong S_4$. Согласно [13] индекс $|L : M_0|$ нечетен, $A = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle w \rangle$ и $B = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes (\langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $|x| = |y| = 2^k$, $|w| = 2^{k-2}$, $|a| = |b| = |d| = 2$, $|c| = 3$, $c^d = c^{-1}$, $a^d = b$, $\langle a, b, c \rangle \cong A_4$, $x^d = y$, $y^d = x$, $w^c = w^d = w$, $x^a = x^{-1}$, $y^a = w^{-1}x^{-2}y^{-1}$, $w^a = wx^4$, $\langle x, y \rangle = [A, \langle c \rangle]$. Положим $x_1 = x^{2^{n-1}}$, $y_1 = y^{2^{n-1}}$, $w_1 = w^{2^{n-2}}$, $T = A\langle a, b, d \rangle$. Тогда $O_2(M_0) = A\langle a, b \rangle$, $Z(O_2(M_0)) = C_A(\langle a, b \rangle) = \langle x_1, y_1 \rangle$, $C_{M_0}(\langle x_1, y_1 \rangle) = O_2(M)$ и $C_L(A) = A$.

Если $k > 2$, то четверная подгруппа $\langle a, b \rangle$ действует регулярно на $\Omega_1(A) \setminus \langle x_1, y_1 \rangle$, а ввиду [13, лемма 3.1] подгруппа A слабо замкнута в T относительно L, и, следовательно, подгруппа $\langle x_1, y_1 \rangle$ сильно замкнута в A относительно L.

Пусть L_i— минимальная неединичная нормальная подгруппа в $M_i \cap L$, содержащаяся в T_i $(i = 1, 2)$. Если L_1 не лежит в A, то $[A, L_1] \leq A \cap L_1 = 1$, и, следовательно, L_1 централизует A, что не так ввиду доказанного выше равенства $C_L(A) = A$. Поэтому $L_1 \le A$ и, следовательно, $L_1 = \langle x_1, y_1\rangle = Z(O_2(M_0))$. Аналогично $L_2 = Z(O_2(M_2 \cap L))$, и, следовательно, $L_1^g = L_2$. Заметим также, что $L_1 < L_1L_2 \le R_1 \cap R_2 \cap L$.

Далее, L_1 не принадлежит A, так как в противном случае ввиду вышеизложенного $L_2 = L_1$, что невозможно. Поскольку M_0/A действует неприводимо на $O_2(M_0)/A$, то $O_2(M_0) = A(R_1 \cap L)$. Предположим, что $L_2 \cap A = 1$. Тогда $N_{O_2(M_0)}(L_2) = L_2 \times C_A(L_2) = L_1 \times L_2 = R_1 \cap L$. Аналогично получаем, что $L_1 \times L_2 = R_2 \cap L$, и, следовательно, $R_1 \cap L = R_2 \cap L$; противоречие.

Таким образом, $L_2 \cap A \ne 1$. Из вышеизложенного следует, что $L_2 \cap A = L_2 \cap L_1$, поэтому можно считать, что $L_2 = \langle a\rangle \times (L_2 \cap L_1)$.

Предположим, что $A \cap R_1$ содержит элемент порядка 4. Имеем $A \cap R_1 = C_{A\cap R_1}(c)) \times [A \cap R_1, \langle c\rangle]$, $C_{A\cap R_1}(c) \le \langle w\rangle$ и $[A \cap R_1, \langle c\rangle] \le [A, \langle c\rangle] = \langle x, y\rangle$. Если $1 \ne \Phi(A \cap R_1) \le \langle w^2\rangle$, то M_0 централизует w_1, что не так. Поэтому $[A \cap R_1, \langle c\rangle]$ содержит элемент порядка 4 и, следовательно, подгруппа $S := \langle x^{2^{k-2}}\rangle \times \langle y^{2^{k-2}}\rangle$ содержится в R_1. Но $C_S(L_2) = C_S(t) = L_1$ и $|N_S(L_2) : C_S(L_2)| \le 2$; противоречие с тем, что подгруппа L_2 нормальна в R_1.

Таким образом, подгруппа $A\cap R_1$ элементарная абелева. Если $k > 2$, то 2-элемент $[t, x] = x^2$ имеет порядок не меньше 4 и содержится в $A \cap R_1$; противоречие. Поэтому $k = 2$, $R_1 \cap L \cong \mathbb{Z}_2^4$ и $O_2(M_0)' \le L_1$. Как выше показываем, что $R_2 \cap L \cong \mathbb{Z}_2^4$. Поскольку подгруппа $R_2 \cap L$ содержит L_1, она является нормальной подгруппой в $O_2(M_0)$, и, следовательно, $O_2(M_0) = R_1 \cap L$; противоречие.

С л у ч а й $m = 2$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.44, 8.46, 8.48] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_8^{\varepsilon}(3)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, и $M_0 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3)) : (3 - \varepsilon 1)^3.S_4$;

(ii) $L \cong PSp_8(3)$, $M_0 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3)) : S_4$.

Рассуждения, аналогичные используемым при рассмотрении возможностей (ii)–(v) случая $t = 2$, приводят к противоречию.

С л у ч а й $m = 3$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.76, 8.78, 8.80] имеем $L \cong U_{12}(3)$ и $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2)) : 4^3.S_4$. Рассуждения, аналогичные используемым при рассмотрении возможностей (ii)–(v) случая $t = 2$, приводят к противоречию. □

Из лемм 2.2–2.8 следует справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
2. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.
3. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I, II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 143–152; 2016. Т. 22, № 2. С. 177–187.
4. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
7. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p.
8. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
9. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
10. **Gorenstein D., Harada R.** On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$ // Math. Z. 1970. Vol. 117, no. 1-4. P. 207–238.

11. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr.; vol. 40, no. 3).
12. **Kleidman P.B., Liebeck M.W.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 304 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 129).
13. **Mason D.** Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type PSL(4, q) // J. Algebra. 1973. Vol. 26, no. 1. P. 75–97.
14. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd. 3. S. 265–284.

Поступила 20.08.2016

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kondrat'ev A.S. Normalizers of the Sylow 2-subgroups in finite simple groups. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 338–346.
2. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Stabilizers of graph's vertices and a strengthened version of the Sims conjecture. *Dokl. Math.*, 1999, vol. 59, pp. 113–115.
3. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture, I, II. *Proc. Inst. Steklov Math.*, 2015, vol. 289, suppl. 1, pp. 146–155; 2016. vol. 295, suppl. 1, pp. 89–100.
4. Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups. *Invent. Math.*, 1984, vol. 76, no. 3, pp. 469–514.
5. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
6. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, (*London Math. Soc. Lect. Note Ser.*; *vol.* 407), 438 p.
7. Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* London: Wiley, 1972, 331 p.
8. Gerono G.C. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math.* (2), 1870, vol. 9, pp. 469–471.
9. Gorenstein D. *Finite groups.* New York: Harper and Row, 1968, 528 p.
10. Gorenstein D., Harada R. On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$. *Math. Z.*, 1970, Vol. 117, no. 1-4, pp. 207–238.
11. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups.* Providence: Amer. Math. Soc., 1998, Number 3, Part I, (*Ser. Math. Surveys Monogr.*; *vol.* 40*, no.* 3), 420 p.
12. Kleidman P.B., Liebeck M.W. *The subgroup structure of the finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, (*London Math. Soc. Lect. Note Ser.*; *vol.* 129), 304 p.
13. Mason D. Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type PSL(4, q). *J. Algebra*, 1973, vol. 26, no. 1, pp. 75–97.
14. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, Bd. 3, S. 265–284.

A.S. Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru .

V.I. Trofimov, Dr. Phys.-Math. Sci., N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: trofimov@imm.uran.ru .