ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518.454

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

Н. А. Ильясов

Доказана точность в смысле порядка оценки сверху модуля гладкости k-го порядка в $L_q(\mathbb{T})$ посредством элементов последовательности наилучших приближений в $L_p(\mathbb{T})$ на классе всех функций с монотонно убывающими коэффициентами Фурье, где $1 < p < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: модуль гладкости, наилучшее приближение, обратная теорема в разных метриках, тригонометрический ряд Фурье с монотонными коэффициентами, точное в смысле порядка неравенство на классе.

N. A. Il'yasov. The inverse theorem in various metrics of approximation theory for periodic functions with monotone Fourier coefficients.

We prove the exactness with respect to order of an upper bound for the kth-order modulus of smoothness in $L_q(\mathbb{T})$ in terms of the elements of a sequence of best approximations in $L_p(\mathbb{T})$ on the class of all functions with monotonically decreasing Fourier coefficients, where $1 < p < q < \infty$ and $k \in \mathbb{N}$.

Keywords: modulus of smoothness, best approximation, inverse theorem in various metrics, trigonometric Fourier series with monotone coefficients, order-sharp inequality on a class.

MSC: 42A10, 41A27

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-153-162

Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p = \Big(\pi^{-1} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$, $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$; $E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in \mathbb{Z}_+$; $\omega_k(f;\delta)_p$ — модуль гладкости k-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, +\infty)$: $\omega_k(f;\delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_p\colon h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu h)$, $\binom{k}{\nu} = k!/\big(\nu!(k-\nu)!\big)$, $\nu = \overline{0,k}$.

Следующее утверждение представляет так называемую обратную теорему в разных метриках теории приближений периодических функций (см., например, [1, предложение 1, случай $q \le 2$; 2, теорема 1, случай $2 < q < \infty$; 3, лемма 1, случай $q = \infty$] и библиографию там).

Теорема A. *Пусть $1 \le p < q \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $\gamma = \gamma(q) = q$ при $q < \infty$ и $\gamma(\infty) = 1$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $k \in \mathbb{N}$, и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\sigma - 1} E_{n-1}^{\gamma}(f)_p < \infty\,. \tag{1}$$

Тогда f почти всюду совпадает с некоторой функцией из $L_q(\mathbb{T})$ (которую после надлежащего изменения на множестве меры нуль снова обозначим через f) и справедливо неравенство

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q \le C_1(k,p,q)\Big\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\Big)^{1/\gamma} + n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma(k+\sigma)-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\Big)^{1/\gamma}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $C_j(k,p,q\ldots)$, где $j\in\mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные, зависящие только от указанных в скобках параметров.

Автором [1, лемма 2, случай $q\le 2$; 2, лемма 3, случай $2<q<\infty$; 3, лемма 5, случай $q=\infty$] была доказана точность в смысле порядка неравенства (2) на классах функций

$$E_p[\varepsilon]=\{f\in L_p(\mathbb{T})\colon E_{n-1}(f)_p\le\varepsilon_n,\ n\in\mathbb{N}\},$$

где последовательность $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$ удовлетворяет условиям $0<\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$.

Теорема B. *Пусть* $1\le p<q\le\infty$, $\sigma=1/p-1/q$, $k\in\mathbb{N}$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\sigma-1}\varepsilon_n^{\gamma}<\infty; \tag{3}$$

тогда

$$\sup\Bigl\{\omega_k\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q : f\in E_p[\varepsilon]\Bigr\}\asymp\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma\sigma-1}\varepsilon_\nu^{\gamma}\Bigr)^{1/\gamma}+n^{-k}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma(k+\sigma)-1}\varepsilon_\nu^{\gamma}\Bigr)^{1/\gamma},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Напомним, что порядковое равенство $\alpha_n\asymp\beta_n$ означает существование таких постоянных $0<C_2\le C_1$, зависящих лишь от заданных параметров (в данном случае k,p и q), что $C_2\beta_n\le\alpha_n\le C_1\beta_n$.

З а м е ч а н и е 1. Условие (3) необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция $f\in L_p(\mathbb{T})$ с $E_{n-1}(f)_p=O(\varepsilon_n)$, $n\in\mathbb{N}$, принадлежала (в указанном выше смысле) $L_q(\mathbb{T})$ (см., например, [2, теорема 2] и библиографию там).

З а м е ч а н и е 2. Экстремальная функция $g(\cdot;p;\varepsilon)\in E_p[\varepsilon]$, реализующая порядковое равенство (4) в случае $1\le p<q<\infty$, имеет вид

$$g(x;p;\varepsilon)=\frac{1}{2}\varepsilon_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(p;\varepsilon)\cos nx,$$

где последовательность $\{a_n(p;\varepsilon)\}$ определяется следующим образом:

$$a_n(p;\varepsilon)=\Bigl\{\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{(\nu-n+1)(\varepsilon_\nu^p-\varepsilon_{\nu+1}^p)}{(\nu+1)^p}\Bigr\}^{1/p},\quad n=1,2,\ldots.$$

Функция $g(\cdot;p;\varepsilon)$ ранее применялась В. Э. Гейтом [4, § 2, п. 1; 5, § 2, п. 2] в случае $p=1$ и М. Ф. Тиманом [6, теорема 1] в случае $p\ge 1$. Эта функция использовалась также автором [1, лемма 2; 2, лемма 3] при доказательстве оценки снизу в порядковом равенстве (4), а именно

$$\omega_k\Bigl(g;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q\ge C_2(k,p,q)\Bigl\{\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\varepsilon_\nu^{q}\Bigr)^{1/q}+n^{-k}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\varepsilon_\nu^{q}\Bigr)^{1/q}\Bigr\},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

при условии $\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\varepsilon_n^q<\infty\Leftrightarrow g\in L_q(\mathbb{T})$.

Следует отметить, что оценка (5) ранее установлена автором в [7, § 3, лемма 3.13, случай $q\le 2$; лемма 3.14, случай $q>2$], при этом существенную роль сыграли леммы 3.3 и 3.11 из [7, § 3], позднее оформленные в [1, лемма 1].

З а м е ч а н и е 3. Функция $g(\cdot;p;\varepsilon)$ и утверждение отмеченной выше леммы 1 из [1] содержатся в опубликованной позднее работе [8, доказательство утверждения (B) теоремы 1, с. 1664–1672], однако в списке цитированной литературы [8] отсутствуют как работа [1], так и указанные работы В. Э. Гейта [4; 5], М. Ф. Тимана [6], а также работы автора [2; 7; 9; 10], результаты которых были использованы в соответствующих утверждениях [8].

Для заданного $p \in [1,\infty]$ обозначим через $M_p(\mathbb{T})$ класс всех функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям $a_0(f) = 0$, $a_n(f) \downarrow 0$, $b_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. Известно (см., например, [11, гл. 1, § 30]), что ряды Фурье таких функций сходятся всюду за исключением, быть может, счетного множества точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, так что почти всюду на $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\big).$$

Отметим, что условие $a_0(f) = 0$ не умаляет общности формулируемых результатов, поскольку, полагая $\bar{f}(x) = f(x) - (1/2)a_0(f)$ при $a_0(f) \neq 0$, имеем $\omega_k(f;\delta)_p = \omega_k(\bar{f};\delta)_p$ и $E_n(f)_p = E_n(\bar{f})_p$, $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

В настоящей статье установлено, что неравенство (2) является точным в смысле порядка на всем классе $M_p(\mathbb{T})$ в случае $1 < p < q < \infty$, а именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $k \in \mathbb{N}$. Для того чтобы каждая функция $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежала $L_q(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} E_{n-1}^q(f)_p < \infty, \tag{6}$$

при этом имеет место порядковое равенство

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q} + n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q(k+\sigma)-1} E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е 4. Утверждение о необходимости условия (6) ранее отмечено М.Ф. Тиманом [12, первый абзац после доказательства теоремы 9].

Доказательство теоремы приведено в разд. 1. Кроме того, в разд. 2 описывается процедура отыскания коэффициентов Фурье экстремальной функции $g(\cdot;p;\varepsilon) \in E_p[\varepsilon]$, реализующей порядковое равенство (4) в случае $1 \le p < q < \infty$.

1. Доказательство теоремы

Для удобства изложения положим $c_n(f) = \big(a_n^2(f) + b_n^2(f)\big)^{1/2}$, где $a_n(f)$, $b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in M_p(\mathbb{T})$. Очевидно, что

$$c_n(f) \downarrow 0 \quad (n \uparrow \infty), \quad 2^{-1}\big(a_n(f) + b_n(f)\big) \le c_n(f) \le a_n(f) + b_n(f),$$

и, следовательно,

$$2^{-p}\big(a_n(f) + b_n(f)\big)^p \le c_n^p(f) \le \big(a_n(f) + b_n(f)\big)^p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Достаточность условия (6) следует из 1-й части утверждения теоремы A: (1) $\Rightarrow f \in L_q(\mathbb{T})$. Докажем *необходимость*. Пусть каждая функция $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежит $L_q(\mathbb{T})$. Поскольку $f \in M_p(\mathbb{T})$, то в силу леммы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [11, гл. X, § 3; 13, т. 2, гл. 12, лемма 6.6]): $g \in L_s(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-2} c_n^s(g) < \infty$ при $1 < s < \infty$ и $c_n(g) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, имеем $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} c_n^p(f) < \infty$. Применяя неравенство А. А. Конюшкова [14, § 1, теорема 4, неравенство (1.21); 15, § 2, неравенство (21)] и неравенство Г. Харди [16, гл. IX, теорема 346], получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} E_{n-1}^q(f)_p \le C_3^q(p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} \Big\{ n^{1-1/p} c_n(f) + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-2} c_\nu^p(f)\Big)^{1/p} \Big\}^q$$

$$\leq C_3^q(p)2^{q-1}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}$$

$$\leq C_3^q(p)2^{q-1}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)+C_4(p,q)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}(n^{p-1}c_n^p(f))^{q/p}\Big\}$$

$$=C_3^q(p)2^{q-1}(1+C_4(p,q))\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f),$$

откуда

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}E_{n-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\leq C_5(p,q)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)\Big)^{1/q}, \tag{8}$$

где $C_5(p,q)=C_3(p)2^{1-1/q}(1+C_4(p,q))^{1/q}$.

Оценка сверху в (7) следует из неравенства (2) (см. теорему A). Займемся доказательством оценки снизу. Если выполнено условие (6), то $f\in L_q(\mathbb{T})\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)<\infty$. Аналогично доказательству неравенства (8) получаем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\leq C_5(p,q)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

В случае $q\leq 2$ в силу теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [13, т. 2, гл. 12, теорема 3.19]), неравенства М. Рисса (см., например, [17, гл. 5, п. 5.11, неравенство (6)]) и L_q-аналога неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [17, гл. 5, п. 5.1.32, неравенство (16), п. 5.11, неравенство (1)]) имеем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\leq C_6(q)\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_q\leq C_6(q)C_7(q)E_n(f)_q$$

$$\leq C_6(q)C_7(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n+1}\Big)_q,$$

где $S_n(f;\cdot)$ — частная сумма порядка $n\in\mathbb{N}$ ряда Фурье функции $f\in L_q(\mathbb{T})$.

В случае $q>2$ в силу неравенства (20) из [15, § 2, теорема 6] и L_q-аналога неравенства Джексона — Стечкина получаем ($[t]$ — целая часть числа t)

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\leq C_9(q)E_{[\frac{n+1}{2}]}(f)_q\leq C_9(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{[\frac{n+1}{2}]+1}\Big)_q$$

$$\leq C_9(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{2\pi}{n+1}\Big)_q\leq 2^kC_9(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n+1}\Big)_q.$$

Учитывая полученные оценки в (9), окончательно имеем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\leq C_{10}(k,p,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Теперь оценим второе слагаемое в левой части (7). В силу неравенства А. А. Конюшкова и неравенства Г. Харди (см. доказательство оценки (8)) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p$$

$$\leq C_3^q(p)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\Big\{\nu^{1-1/p}c_\nu(f)+\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{1/p}\Big\}^q$$

$$\le 3^{q-1}C_3^q(p)\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{q/p}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}$$

$$\le 3^{q-1}C_3^q(p)\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)+C_{11}(k,p,q)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}(\nu^{p-1}c_\nu^p(f))^{q/p}$$

$$+n^{q(k+\sigma)}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}$$

$$=3^{q-1}C_3^q(p)\Big\{(1+C_{11}(k,p,q))\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)+n^{q(k+\sigma)}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера с показателями $\rho=q/p>1$ и $\rho'=q/(q-p)$ $(1/\rho+1/\rho'=1)$, получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2p/q}c_\nu^p(f)\nu^{2p/q-2}\le\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{p/q}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-2}\Big)^{1-p/q}$$

$$\le n^{p/q-1}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{p/q},$$

откуда

$$n^{1/p-1/q}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\le\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}. \tag{11}$$

Учитывая полученную оценку (11), имеем

$$n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}$$

$$\le 3^{1-1/q}C_3(p)\Big\{(1+C_{11}(k,p,q))^{1/q}n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}+n^\sigma\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\Big\}$$

$$\le C_{12}(k,p,q)\Big\{n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\Big\}. \tag{12}$$

Необходимая оценка для второго слагаемого в правой части (12) была установлена выше (см. доказательство неравенства (10)):

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\le C_{13}(k,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Для завершения доказательства осталось установить справедливость оценки

$$n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\le C_{14}(k,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

В случае $q\le 2$ в силу теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. [13, т. 2, гл. 12, теорема 3.19]) имеем $(\sin z\ge(2/\pi)z,\ z\in[0,\pi/2])$

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\ge\|\Delta_{\pi/n}^k f(\cdot)\|_q\ge C_{15}(q)2^k\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big|\sin\frac{\nu\pi}{2n}\Big|^{qk}\Big)^{1/q}$$

$$\geq C_{15}(q)2^k\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big(\sin\frac{\nu\pi}{2n}\Big)^{qk}\Big)^{1/q}\geq C_{15}(q)2^k n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q},$$

откуда и следует требуемая оценка (13) при $q\leq 2$.

В случае $q>2$, применяя неравенство (1.19) [14, § 1, следствие 2], неравенство (7) [18, теорема 1], неравенство Г. Харди [16, гл. IX, теорема 346] и неравенство (2) [19, теорема без номера], получаем

$$n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\leq C_{16}(k+1,q)n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\omega_{k+1}^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\Big)^{1/q}$$

$$\leq C_{16}C_{17}(k+1,q)n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-(q+1)}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{2(k+1)-1}E_{\mu-1}^2(f)_q\Big)^{q/2}\Big\}^{1/q}$$

$$\leq C_{16}C_{17}C_{18}(q)n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-(q+1)}(\nu^{2(k+1)}E_{\nu-1}^2(f)_q)^{q/2}\Big\}^{1/q}$$

$$=C_{16}C_{17}C_{18}n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}E_{\nu-1}^q(f)_q\Big\}^{1/q}\leq C_{16}C_{17}C_{18}C_{19}(k,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,$$

откуда следует требуемая оценка в (13) при $q>2$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 5. Достаточность условия (6) можно доказать без привлечения теоремы А. Поскольку $f\in M_p(\mathbb{T})$, то в силу леммы Г. Харди и Дж. Литтлвуда имеем: $f\in L_q(\mathbb{T})\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)<\infty$. Применяя неравенство (1.19) [14, § 1, следствие 2], правое неравенство в (1.3) [20, § 1, теорема 1.1] и неравенство Г. Харди [16, гл. IX, теорема 346] получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)\leq C_{20}(p)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}\Big(n^{1/p-1}\omega_1\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big)^q=C_{20}\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\omega_1^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\leq C_{20}C_{21}^q(p)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\Big\{n^{-1}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{1/p}\Big\}^q$$

$$=C_{20}C_{21}^q\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(q+1-q\sigma)}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{q/p}\leq C_{20}C_{21}^qC_{22}(p,q)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p.$$

З а м е ч а н и е 6. Оценку сверху в (7) можно также получить без привлечения неравенства (2) (см. теорему А). Из сходимости ряда (6) следует, что $f\in L_q(\mathbb{T})$, а поскольку $f\in M_p(\mathbb{T})$, то $f\in M_q(\mathbb{T})$. Отсюда в силу правого неравенства в (1.3) [20, § 1, теорема 1.1] и неравенства разных метрик для наилучших приближений П.Л. Ульянова [21, § 4, теорема 4, неравенство (4.3)] имеем

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\leq C_{23}(k,q)n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}E_{\nu-1}^q(f)_q\Big)^{1/q}$$

$$\leq C_{23}C_{24}(p,q)n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\Big[\nu^\sigma E_{\nu-1}(f)_p+\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\Big]^q\Big\}^{1/q}$$

$$\leq C_{23}C_{24}n^{-k}\Big\{2^{q-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p+2^{q-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big\}^{1/q}$$

$$=C_{23}C_{24}2^{1-1/q}n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^{q}(f)_p\Big\}^{1/q}$$

$$\le C_{23}C_{24}2^{1-1/q}n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p+\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^{q}(f)_p\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{qk-1}$$

$$+n^{qk}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^{q}(f)_p\Big\}^{1/q}$$

$$\le C_{23}C_{24}2^{1-1/q}\Big\{2^{1/q}n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Big)^{1/q}+\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^{q}(f)_p\Big)^{1/q}\Big\}.$$

2. О процедуре отыскания коэффициентов Фурье экстремальной функции

Вначале напомним, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ называется выпуклой, если $\Delta^2 a_n\ge 0$, где $\Delta^2 a_n=\Delta a_n-\Delta a_{n+1}$, $\Delta a_n=a_n-a_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Известно (см., например, [11, вводный материал, § 3; 13, т. 1, гл. 3, п. 4, теорема (4.1); 22, т. 1, гл. 7, п. 7.1.2, п. 7.1.3]), что если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, то $a_n\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$, $n\Delta a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n=a_0$. Далее (см., например, [11, гл. 1, § 30, теорема 4; 13, т. 1, гл. 5, п. 1, теорема 1.5; 22, т. 1, гл. 7, п. 7.3.1]), если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, то ряд

$$\frac{1}{2}\,a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{14}$$

сходится всюду на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, точек $x\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$, к некоторой неотрицательной функции $g\in L_1(\mathbb{T})$ и является рядом Фурье этой функции, т. е. $a_n=a_n(g)$, $n=0,1,2,\dots$. При этом имеют место равенства $(x\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi))$

$$g(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n F_n(x),$$

$$\|g\|_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n=a_0,$$

где $F_n(x)$ — ядро Фейера, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Полагая $(n+1)\Delta^2 a_n=\Delta\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, находим коэффициенты Фурье $a_n(p;\varepsilon)$ функции $g(x;p;\varepsilon)$ в случае $p=1$ (см. введение, замечание 2):

$$a_n(1;\varepsilon)=a_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta a_\nu=\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta^2 a_\mu=\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu}{\mu+1}=\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu}{\mu+1}\sum_{\nu=n}^{\mu}1$$

$$=\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu}{\mu+1}(\mu-n+1)=\sum_{\mu=n}^{\infty}\Big(1-\frac{n}{\mu+1}\Big)\Delta\varepsilon_\mu.$$

В случае $p>1$ в силу порядкового равенства (7) требуемую функцию $g(\cdot;p;\varepsilon)$ будем искать также в виде суммы ряда (14), где $a_n\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$. Кроме того, требуется выполнение условий $\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p<\infty\Leftrightarrow g\in L_p(\mathbb{T})$ (в силу леммы Г. Харди и Дж. Литтлвуда, указанной выше в разделе 1 при доказательстве теоремы) и $\Delta^2 a_n^p\ge 0$, $n\in\mathbb{Z}_+$ (т. е. последовательность $\{a_n^p\}$ выпукла). Привлечение выпуклых последовательностей $\{a_n^p\}$ обусловлено отчасти и тем, чтобы коэффициенты Фурье $a_n(p;\varepsilon)$ функции $g(\cdot;p;\varepsilon)$ вычислялись аналогично рассмотренному случаю $p=1$.

Из условия $\Delta^2 a_n^p \ge 0 \Leftrightarrow \Delta a_n^p - \Delta a_{n+1}^p \ge 0$ следует, что $\Delta a_n^p \ge \Delta a_{n+1}^p$, т. е. $\Delta a_n^p \downarrow\ (n\uparrow)$, а поскольку $\Delta a_n^p = a_n^p - a_{n+1}^p \to 0$ при $n\to\infty$, то $\Delta a_n^p \downarrow 0\ (n\uparrow\infty)$ и

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta^2 a_\nu^p = \sum_{\nu=n}^{\infty}(\Delta a_\nu^p - \Delta a_{\nu+1}^p) = \Delta a_n^p, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Учитывая последнее равенство, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^p\Delta^2 a_n^p \le C_{25}(p)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^2 a_n^p\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{p-1} = C_{25}(p)\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{p-1}\sum_{n=\nu}^{\infty}\Delta^2 a_n^p$$

$$= C_{25}(p)\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{p-1}\Delta a_\nu^p \le C_{25}(p)C_{26}(p)\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta a_\nu^p\sum_{n=0}^{\nu}(n+1)^{p-2}$$

$$= C_{25}(p)C_{26}(p)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta a_\nu^p$$

$$= C_{25}(p)C_{26}(p)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_n^p = C_{25}(p)C_{26}(p)\Big\{a_0^p + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_n^p\Big\}$$

$$\le C_{25}(p)C_{26}(p)\Big\{a_0^p + C_{27}(p)\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p\Big\} < \infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_{n+1}^p \le \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_n^p = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta a_\nu^p$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta a_\nu^p\sum_{n=0}^{\nu}(n+1)^{p-2} \le C_{28}(p)\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{p-1}\Delta a_\nu^p = C_{28}(p)\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{p-1}\sum_{n=\nu}^{\infty}\Delta^2 a_n^p$$

$$= C_{28}(p)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^2 a_n^p\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{p-1} \le C_{28}(p)C_{29}(p)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^p\Delta^2 a_n^p.$$

В силу полученных оценок имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^p\Delta^2 a_n^p < \infty.$$

Отметим, что изменение порядков суммирования при доказательстве приведенных выше оценок допустимо, поскольку, например, если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p < \infty$, то $(n+1)^{p-1}a_n^p \to 0\ (n\to\infty)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-1}\Delta a_n^p < \infty$, откуда следует, что

$$(n+1)^p\Delta a_n^p \to 0\ (n\to\infty) \quad\text{и}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^p\Delta^2 a_n^p < \infty.$$

Полагая $(n+1)^p\Delta^2 a_n^p = \Delta\varepsilon_n^p,\ n\in\mathbb{Z}_+$, находим коэффициенты Фурье $a_n(p;\varepsilon)$ функции $g(\cdot;p;\varepsilon)$ в случае $p>1$ (см. введение, замечание 2):

$$a_n^p(p;\varepsilon) = a_n^p = \sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta a_\nu^p = \sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta^2 a_\mu^p = \sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu^p}{(\mu+1)^p} = \sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu^p}{(\mu+1)^p}\sum_{\nu=n}^{\mu}1$$

$$= \sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu^p}{(\mu+1)^p}(\mu-n+1) = \sum_{\mu=n}^{\infty}\Big(1-\frac{n}{\mu+1}\Big)\frac{1}{(\mu+1)^{p-1}}\Delta\varepsilon_\mu^p.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов Н.А.** О приближении периодических функций средними Фейера — Зигмунда в разных метриках // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 48–57.
2. **Ильясов Н.А.** Обратная теорема теории приближений в разных метриках // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 57–65.
3. **Ильясов Н.А.** К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 53–61.
4. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
5. **Гейт В.Э.** О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7 (122). С. 19–30.
6. **Timan M.F.** Orthonormal systems satisfying an inequality of S. M. Nikol'ski // Anal. Math. 1978. Vol. 4, no. 1. P. 75–82.
7. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1987. 150 с.
8. **Simonov B., Tikhonov S.** Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 9. P. 1654–1684.
9. **Ильясов Н.А.** Приближение периодических функций средними Зигмунда // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 3. С. 367–382.
10. **Ильясов Н.А.** К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 220–234.
11. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
12. **Тиман М.Ф.** О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций // Изв. вузов. Математика. 1974. № 10 (149). С. 61–74.
13. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.; Т. 2. 537 с.
14. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44 (86), № 1. С. 53–84.
15. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
16. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
17. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
18. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46 (88), № 1. С. 125–132.
19. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах L_p // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18, № 1. С. 134–137.
20. **Кокилашвили В.М.** О приближении периодических функций // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
21. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81 (123), № 1. С. 104–131.
22. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М.: Мир, 1985. Т. 1. 264 с.; Т. 2. 400 с.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент кафедры математического анализа
Бакинский государственный университет
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 10.09.2016

REFERENCES

1. Il'yasov N.A. Approximation of periodic functions by Fejer–Zygmund means in various metrics. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 1004–1010.
2. Il'yasov N.A. An inverse approximation theorem in various metrics. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 6, pp. 1253–1260.

3. Il'yasov N.A. An inverse theorem of approximation theory of periodic functions in various metrics. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 791–798.
4. Gheit V.È. On the exactness of certain inequalities in approximation theory. *Math. Notes*, 1971, vol. 10, no. 5, pp. 768–776.
5. Gheit V.È. The structural and constructive properties of a function and its conjugate in L. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 1972, no. 7 (122), pp. 19–30 (in Russian).
6. Timan M.F. Orthonormal systems satisfying an inequality of S. M. Nikol'ski. *Anal. Math.*, 1978, vol. 4, no. 1, pp. 75–82.
7. Il'yasov N.A. Embedding theorems for structural and constructive characteristics of functions: Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Baku, 1987, 150 p. (in Russian).
8. Simonov B., Tikhonov S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness. *J. Approx. Theory*, 2010, vol. 162, no. 9, pp. 1654–1684.
9. Il'yasov N.A. Approximation of periodic functions by Zygmund means. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 3, pp. 200–209.
10. Il'yasov N.A. On the direct theorem of approximation theory of periodic functions in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 215–230.
11. Bari N.K. *Ttrigonometricheskie ryady* (A Treatise on trigonometric series). Oxford, New York: Pergamon Press, 1964.
12. Timan M.F. The imbedding of the $L_p^{(k)}$ classes of functions. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1974, no. 10 (149), pp. 61–74 (in Russian).
13. Zygmund A. *Trigonometric series*, 2nd ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. 1, 2.
14. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb.* (*N.S.*), 1958, vol. 44 (86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
15. Konyushkov A.A. On best approximations in the conversion of the Fourier coefficients by the method of arithmetic average and on the Fourier series with non-negative coefficients. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 56–78 (in Russian).
16. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press, 1934.
17. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* Macmillan, Pergamon Press, 1963.
18. Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in L_p spaces ($1 \leq p \leq \infty$). *Mat. Sb.* (*N.S.*), 1958, vol. 46 (88), no. 1, pp. 125–132 (in Russian).
19. Timan M.F. On the Jackson theorem in L_p spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 1966, vol. 18, no. 1, pp. 134–137 (in Russian).
20. Kokilashvili V.M. On approximation of periodic functions. *Tr. Tbilis. Mat. Inst.*, 1968, vol. 34, pp. 51–81 (in Russian).
21. Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Math. USSR-Sb.*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 103–126.
22. Edwards R. *Fourier series, a modern introduction.* New York: Springer-Verlag, 1979, vol. 1,2.

N. A. Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan,
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .