ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В статье рассматривается анизотропное пространство Лоренца периодических функций. Доказаны достаточные условия принадлежности функций анизотропному пространству Лоренца. Установлены оценки порядка приближения тригонометрическими полиномами класса Никольского — Бесова в анизотропном пространстве Лоренца.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова, наилучшее приближение.

G. Akishev. On approximation orders of functions of several variables in the Lorentz space.

We consider the anisotropic Lorentz space of periodic functions. Sufficient conditions are proved for a function to belong to the anisotropic Lorentz space. Estimates for the order of approximation by trigonometric polynomials of the Nikol'skii–Besov class in the anisotropic Lorentz space are established.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, best approximation.

MSC: 41A10, 41A25, 42A10, 46E30, 46E35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-13-28

Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m), \bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ и числа $\theta_j, p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} = \left[\int\limits_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{p_m}-1}\left[\cdots\left[\int\limits_0^{2\pi}\Big(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)\Big)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

В случае $p_1 = \ldots = p_m = \theta_1 = \ldots = \theta_m = p$ пространство Лоренца $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(I^m)$ с нормой $\|f\|_p$ (см. [2, гл. I, п. 1.1]).

Введем обозначение $\mathring{L}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ — множество всех функций $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0 \quad \forall j = 1,\dots,m.$$

Функции $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ сопоставим ее ряд Фурье $\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$, где $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$ и $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и частично гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

Положим

$$\delta_{\overline{s}}\left(f,\overline{x}\right)=\sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}\left(f\right)e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle=\sum_{j=1}^{m}y_jx_j$, $s_j=1,2,\ldots,$

$$\rho(\bar{s})=\left\{\overline{k}=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m\colon 2^{s_j-1}\leq|k_j|<2^{s_j}, j=1,\ldots,m\right\}.$$

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}}=\left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\ldots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\left|a_{\overline{n}}\right|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$

где $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$, $1\leq p_j<+\infty$, $j=1,2,\ldots,m$.

$S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ — пространства функций с доминирующей смешанной производной — соответственно определены С. М. Никольским [3] и Т. И. Амановым [4].

Рассмотрим аналогичное пространство. Через $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ обозначим пространство всех функций $f\in\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$, для которых $\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B}=\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}}<\infty$, где $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_m)$, $1<p_j<\infty$, $1\leq\theta_j<\infty$, $1\leq\tau_j\leq+\infty$, $r_j>0$, $j=1,\ldots,m$. В этом пространстве рассмотрим класс (с сохранением обозначения)

$$\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B=\left\{f\in\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)\colon \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B}=\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}}\leq 1\right\}.$$

Пусть дан вектор $\bar{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, $\gamma_j>0, j=1,\ldots,m$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}}=\bigcup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s}),\quad T(Q_n^{\bar{\gamma}})=\left\{t(\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}}b_{\bar{k}}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\right\},$$

$$Y^m\left(\overline{\gamma},n\right)=\left\{\overline{s}=(s_1,\ldots,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+\colon\sum_{j=1}^{m}s_j\gamma_j\geq n\right\}.$$

$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\overline{\theta}}$ — наилучшее приближение функции $f\in L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$. $S_n^{\bar{\gamma}}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}}a_{\bar{k}}(f)e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}$ — частичная сумма ряда Фурье функции f.

Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К. И. Бабенко [5].

Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С. А. Теляковский, Б. С. Митягин, Я. С. Бугров, Н. С. Никольская, Э. М. Галеев, В. Н. Темляков, Динь Зунг, Н. Н. Пустовойтов, Э. С. Белинский, Б. С. Кашин и В. Н. Темляков, А. С. Романюк, Х.-Ю. Шмайссер, В. Зикель и др. (см. [6; 7]).

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)\subset L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ в случае $p_j<q_j, j=1,\ldots,m$, и $L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)\subset L^{*}_{\overline{p},\overline{q}}(I^m)$, если $\theta_j<q_j, j=1,\ldots,m$.

Точные оценки порядка приближения $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ классов Никольского — Бесова в $\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ в случае $p_j<q_j, j=1,\ldots,m$, установлены в [8; 9].

Основная цель предлагаемой статьи — получить оценки величины

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_{\overline{p},\theta}=\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B}E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\theta}$$

в случае $\theta<q_j, j=1,2,\ldots,m$.

В дальнейшем $a_+ = \max\{a, 0\}$, и запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$ и такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \ge C_1 A$ или $B \le C_2 A$ часто будем писать $B >> A$ или $B << A$ соответственно. Также в дальнейшем $C_j(p, q, \ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные, зависящие только от указанных в скобках параметров.

1. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов сначала введем дополнительные обозначения и приведем вспомогательные утверждения. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями.

Множество индексов $\{1, \ldots, m\}$ обозначим символом e_m, его произвольное подмножество — через e и $|e|$ — количество элементов e.

Если дан элемент $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ m-мерного пространства с неотрицательными координатами, то $\bar{r}^e = (r_1^e, \ldots, r_m^e)$ — вектор с компонентами $r_j^e = r_j$ при $j \in e$ и $r_j^e = 0$ при $j \notin e$.

Пусть $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ — элемент m-мерного пространства с целыми положительными координатами и непустое множество $e \subset e_m$. Положим

$$G_{\bar{l}}(e) = \left\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon |k_j| \le l_j,\ j \in e,\ |k_j| > l_j,\ j \notin e\right\}.$$

Для заданных чисел $b_{\bar{n}}$ смешанная разность определяется по формуле

$$\Delta b_{\bar{n}} = \sum_{\bar{0} \le \bar{\varepsilon} \le \bar{1}} (-1)^{m - \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j} b_{\bar{n} - \bar{1} + \bar{\varepsilon}},$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ и $\varepsilon_j = 0$ или $\varepsilon_j = 1$, $\quad \bar{n} - \bar{1} + \bar{\varepsilon} = (n_1 - 1 + \varepsilon_1, \ldots, n_m - 1 + \varepsilon_m)$.

Рассматриваются частные суммы по различным переменным:

$$S_{\bar{l}}(f, \bar{x}) = S_{l_1, \ldots, l_m}(f, \bar{x}) = \sum_{|k_1| \le l_1} \cdots \sum_{|k_m| \le l_m} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

— частная сумма по всем переменным;

$$S_{l_1, \infty}(f, \bar{x}) = \sum_{|k_1| \le l_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m = -\infty}^{+\infty} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменной x_1. В более общем случае

$$S_{\bar{l}^e, \infty}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \prod_{j \in e}[-l_j, l_j] \times \mathbb{R}^{m - |e|}} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменным x_j при $j \in e$.

Для заданного подмножества $e \subset e_m$ положим

$$U_{\bar{l}}(f, \bar{x}) = \sum_{e \subset e_m, e \ne \varnothing} \sum_{\bar{k} \in G_{\bar{l}}(e)} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}.$$

В частности для $m = 2$ имеем (см. [10]) $U_{l_1, l_2}(f.\bar{x}) = S_{l_1, \infty}(f, \bar{x}) + S_{\infty, l_2}(f, \bar{x}) - S_{l_1, l_2}(f, \bar{x})$.

Пусть $e \subset e_m$. Рассматривается известная кратная сумма Валле-Пуссена

$$V_{\bar{l}^e, \infty}(f, \bar{x}) = \prod_{j \in e} \frac{1}{l_j} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{R}^{m - |e|} \times \prod_{j \in e}[-l_j, l_j]} S_{\bar{k}^e, \infty}(f, \bar{x}).$$

В частности при $e=e_m$

$$V_{\bar{l}^{e_m}}(f,\bar{x})=V_{l_1,\dots,l_m}(f,\bar{x})=\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{l_j}\sum_{k_1=l_1}^{2l_1-1}\dots\sum_{k_m=l_m}^{2l_m-1}S_{\bar{k}}(f,\bar{x}).$$

Суммы Валле-Пуссена по x_1

$$V_{0,\infty}(f,\bar{x})=S_{0,\infty}(f,\bar{x}),\quad V_{l_1,\infty}(f,\bar{x})=\frac{1}{l_1}\sum_{k=l_1}^{2l_1-1}S_{k,\infty}(f,\bar{x});$$

по переменной x_2

$$V_{\infty,0}(f,\bar{x})=S_{\infty,0}(f,\bar{x}),\quad V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})=\frac{1}{l_2}\sum_{k=l_2}^{2l_2-1}S_{\infty,k}(f,\bar{x});$$

по переменным x_1 и x_2

$$V_{l_1,l_2}(f,\bar{x})=V_{l_1,\infty}(V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})).$$

Далее, введем обозначение

$$W_{\bar{l}}(f,\bar{x})=\sum_{e\subset e_m,e\neq\varnothing}V_{\bar{l}^e,\infty}(f,\bar{x}),$$

и рассмотрим смешанную разность по индексам

$$\Delta W_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_m}}(f,\bar{x})=\Delta W_{2^{\bar{\nu}}}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{0}\leq\bar{\varepsilon}\leq\bar{1}}(-1)^{m-\sum\limits_{j=1}^{m}\varepsilon_j}W_{2^{\bar{\nu}-\bar{1}+\bar{\varepsilon}}}(f,\bar{x}),$$

где $\bar{1}=(1,\dots,1)$, $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ — вектор с координатами $\varepsilon_j=0$ или $\varepsilon_j=1$. Тогда функция $\Delta W_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_m}}(f,\bar{x})$ есть тригонометрический полином порядка $2^{\nu_j+1}-1$ по переменной $x_j, j=1,\dots,m$, [10]. Наконец, обозначим $\varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x})=-\Delta W_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_m}}(f,\bar{x})$ и

$$\Phi_{\bar{k}}(f,\bar{x})=\Phi_{k_1,\dots,k_m}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_m=2^{k_m}}^{2^{k_m+1}-1}\dots\sum_{\nu_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\varphi_{\nu_1,\dots,\nu_m}(\bar{x})=\sum_{\bar{\nu}\in\rho(\bar{k}+\bar{1})}\varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x}),$$

$$\sum_{k_m=l_m}^{n_m}\dots\sum_{k_1=l_1}^{n_1}\Phi_{\bar{k}}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\Phi_{\bar{k}}(f,\bar{x}).$$

Для данного подмножества $e\subset e_m$ обозначим

$$\Phi_{\bar{k}^e}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_{j_1}=2^{k_{j_1}}}^{2^{k_{j_1}+1}-1}\dots\sum_{\nu_{j_{|e|}}=2^{k_{j_{|e|}}}}^{2^{k_{j_{|e|}}+1}-1}\varphi_{\nu^e}(\bar{x}).$$

Отметим, что $\varphi_{\bar{\nu}^e}(\bar{x})$ есть тригонометрический полином порядка 1 по переменной x_j при $j\notin e$. Значит, $\Phi_{\bar{k}^e}(f,\bar{x})$ имеет такой же порядок по этим переменным.

Величина (см. [10])

$$Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_{\bar{p},\bar{\theta}}=\inf_{T_{l_j}}\big\|f-\sum_{j=1}^{m}T_{l_j}\big\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}},\quad l_j=0,1,2,\dots,$$

называется *наилучшим приближением "углом" функции* $f\in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ *тригонометрическими полиномами*, где $T_{l_j}\in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ — тригонометрический полином порядка l_j по переменной $x_j,\ j=1,\dots,m$.

Наилучшее приближение "углом" в пространстве Лебега определено М. К. Потаповым [10].

Теперь приведем некоторые вспомогательные утверждения.

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $\varkappa(n)=\{\bar{s}=(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+\colon\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n\}$.

Лемма 1. *Пусть* $\overline{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, $\bar{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_m)$, $1=\gamma_1=\ldots=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\leq\ldots\leq\gamma_m$ *и* $\tau_j\in[1,+\infty)$, $\beta_j\geq 0$, $j=1,\ldots,m$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\beta_j}\Big\}_{\overline{s}\in\varkappa(n)}\Big\|_{l_{\overline{\tau}}}\asymp n^{\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j+\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению множества $\varkappa_n$ имеем

$$\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\beta_j}\Big\}_{\bar{s}\in\varkappa_n}\Big\|_{l_{\bar{\tau}}}=\Big\{\sum_{s_m<\frac{n}{\gamma_m}}\Big[\cdots\Big[\sum_{s_2<\frac{1}{\gamma_2}(n-\sum\limits_{j=3}^{m}\gamma_js_j)}\Big[\sum_{s_1=\frac{1}{\gamma_1}(n-\sum\limits_{j=2}^{m}\gamma_js_j)}\prod_{j=2}^{m}s_j^{-d_j\tau_1}\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\Big]^{\frac{\tau_3}{\tau_2}}\cdots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}\Big\}^{\frac{1}{\tau_m}}.$$

Далее, несколько раз применяя соотношение $\sum_{0<s<l}s^{\alpha}(l-s)^{\beta}\asymp l^{\alpha+\beta+1}$, $\alpha,\beta>0, l\in\mathbb{N}$, получим утверждение леммы 1. $\square$

Отметим, что в случае $\beta_j=0, j=1,\ldots,m$, лемма 1 доказана в [8].

Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть* $\bar{p}=(p_1,\ldots,p_m),\bar{q}=(q_1,\ldots,q_m), 1\leq p_j<+\infty, 1\leq\theta<q_j<+\infty$, $j=1,\ldots,m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$I_1=\Big\|\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\Phi_{\bar{k}}(f)\Big\|_{\bar{p},\theta}^{*}<<\Big[\sum_{k_m=l_m}^{n_m}\cdots\sum_{k_1=l_1}^{n_1}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}(\big\|\Phi_{\bar{k}}(f)\big\|_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $s=[\theta]+1$. Тогда по свойству нормы и невозрастающей перестановки функции имеем

$$I_1\leq\Big\|\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int\limits_0^{t_m}\cdots\int\limits_0^{t_1}\Big(\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\Phi_{\bar{k}}(f)\Big)^{*_1,\ldots,*_m}(\bar{y})dy_1\ldots dy_m\Big\|_{\bar{p},\theta}^{*}. \tag{1.1}$$

Из равенства (см. [1])

$$\int\limits_0^{t_m}\cdots\int\limits_0^{t_1}g^{*_1,\ldots,*_m}(u_1,\ldots u_m)du_1\ldots du_m=\sup_{e_m:mes(e_m)=t_m}\int\limits_{e_m}\cdots\sup_{e_1:mes(e_1)=t_1}\int\limits_{e_1}|g(x_1,\ldots,x_m)|dx_1\ldots dx_m$$

следует

$$\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int\limits_0^{t_m}\cdots\int\limits_0^{t_1}\Big(\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\Phi_{\bar{k}}(f)\Big)^{*_1,\ldots,*_m}(\bar{y})dy_1\ldots dy_m$$

$$\leq\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int\limits_0^{t_m}\cdots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar{k}}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar{y})dy_1\ldots dy_m.$$

Поэтому из (1.1) вытекает

$$I_1^{\theta}\leq\Big\|\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int\limits_0^{t_m}\cdots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar{k}}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar{y})dy_1\ldots dy_m\Big\|_{\bar{p},\theta}^{*^{\theta}}$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\Big[\sum_{\bar{l}\leq\bar{k}\leq\bar{n}}\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int\limits_0^{t_m}\cdots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar{k}}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar{y})dy_1\ldots dy_m\Big]^{\frac{\theta}{s}s}\prod_{j=1}^{m}t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1}dt_1\ldots dt_m. \tag{1.2}$$

Далее, применяя к сумме неравенство Йенсена [2, с. 125] $\dfrac{\theta}{s}<1$, к интегралу по переменной — неравенство Гельдера для нескольких сомножителей с показателями $s>1$ [11], из (1.2) получим

$$I_1^{\theta}\le\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Big\{\sum_{\bar l\le\bar k\le\bar n}\Big[\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\Phi_{\bar k}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big]^{\frac{\theta}{s}}\Big\}^{s}\prod_{j=1}^{m}t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1}dt_1\ldots dt_m$$

$$\le\sum_{\bar l\le\bar k(1)\le\bar n}\cdots\sum_{\bar l\le\bar k(s)\le\bar n}\prod_{j=1}^{s}\Big\{\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_1}\Phi_{\bar k(j)}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big]^{\theta}$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1}dt_1\ldots dt_m\Big\}^{\frac{1}{s}}. \tag{1.3}$$

Положим

$$\delta_{\bar k(j)}(f,\bar t)=\Big\{\prod_{j=1}^{m}t_j^{\frac{1}{p_j}}\Big[\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{t_j}\int_0^{t_m}\int_0^{t_1}\Phi_{\bar k(j)}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big]\Big\}^{\frac{\theta}{s}}.$$

Тогда, учитывая равенство

$$\prod_{j=1}^{s}\delta_{\nu_j}=\Big[\prod_{1\le i<j\le s}\delta_{\nu_i}\delta_{\nu_j}\Big]^{\frac{1}{s-1}} \tag{1.4}$$

и применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau=\dfrac{s(s-1)}{2}$, а затем с показателем $\beta>1$, $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta'}=1$, получим

$$I_2=\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{s}\Big[\frac{1}{t_1\cdot\ldots\cdot t_m}\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_1}\Phi_{\bar k(j)}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big]^{\frac{\theta}{s}}\prod_{j=1}^{m}t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1}dt_1\ldots dt_m$$

$$=\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{s}\delta_{\bar k(j)}(f,\bar t)\frac{dt_1\ldots dt_m}{t_1\ldots t_m}=\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Big[\prod_{1\le i<j\le s}\delta_{\bar k(i)}(f,\bar t)\delta_{\bar k(j)}(f,\bar t)\Big]^{\frac{1}{s-1}}\frac{dt_1\ldots dt_m}{t_1\ldots t_m}$$

$$\le\prod_{1\le i<j\le s}\Big[\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar k(i)}(f,\bar t)\delta_{\bar k(j)}(f,\bar t)\big)^{\frac{s}{2}}\frac{dt_1\ldots dt_m}{t_1\ldots t_m}\Big]^{\frac{1}{\tau}}.$$

Поэтому из неравенства (1.3) находим

$$I_1^{\theta}\le\sum_{\bar l\le\bar k(1)\le\bar n}\cdots\sum_{\bar l\le\bar k(s)\le\bar n}\prod_{1\le i<j\le s}\Big[\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar k(i)}(f,\bar t)\delta_{\bar k(j)}(f,\bar t)\big)^{\frac{s}{2}}\frac{dt_1\ldots dt_m}{t_1\ldots t_m}\Big]^{\frac{1}{\tau}}. \tag{1.5}$$

Положим $\rho_{\bar\mu,\bar\nu}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar\mu}(f,\bar t)\delta_{\bar\nu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s}{2}}\frac{dt_1\ldots dt_m}{t_1\ldots t_m}$ и $\alpha=\dfrac{\theta+q}{\theta}$, $\quad\alpha'=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{\theta+q}{q}$. Тогда $\dfrac{\alpha\theta}{2}=\dfrac{\theta+q}{2}<q$ и $\dfrac{\alpha'\theta}{2}<q$. Применяя к этому интегралу сначала неравенство Гельдера $\big(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha'}=1\big)$, а затем неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов (см. [12, лемма Б; 13, теорема 10]), получим

$$\rho_{\bar\mu,\bar\nu}=\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar\mu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s}{2}}\prod_{j=1}^{m}t_j^{-\frac{1}{\alpha_j}}\big(\delta_{\bar\nu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s}{2}}\prod_{j=1}^{m}t_j^{-\frac{1}{\alpha'_j}}\frac{dt_1\ldots dt_m}{t_1\ldots t_m}$$

$$\leq \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar\mu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s\alpha_1}{2}}\frac{dt_1}{t_1}\Big]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}}\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar\nu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s\alpha_1'}{2}}\frac{dt_1}{t_1}\Big]^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m'}{\alpha_{m-1}'}}\frac{dt_m}{t_m}\Big]^{\frac{1}{\alpha_m'}}$$

$$= \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big(\prod_{j=1}^m t_j^{-1}\int\limits_0^{t_m}\ldots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar\mu}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big)^{\frac{\theta\alpha_1}{2}}t_1^{\frac{\theta\alpha_1}{2p_j}-1}dt_1\Big]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}}t_m^{\frac{\theta\alpha_m}{2p_m}-1}dt_m\Big]^{\frac{1}{\alpha_m}}$$

$$\times \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big(\prod_{j=1}^m t_j^{-1}\int\limits_0^{t_m}\ldots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar\nu}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big)^{\frac{\theta\alpha_1'}{2}}t_1^{\frac{\theta\alpha_1'}{2p_j}-1}dt_1\Big]^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m'}{\alpha_{m-1}'}}t_m^{\frac{\theta\alpha_m'}{2p_m}-1}dt_m\Big]^{\frac{1}{\alpha_m'}}$$

$$\leq C\Big[\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j(\frac{2}{\theta\alpha_j}-\frac{1}{q_j})}\|\Phi_{\bar\mu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*\Big]^{\frac{\theta}{2}}\Big[\prod_{j=1}^m 2^{\nu_j(\frac{2}{\theta\alpha_j'}-\frac{1}{q_j})}\|\Phi_{\bar\nu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*\Big]^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= C\prod_{j=1}^m 2^{-|\nu_j-\mu_j|(\frac12-\frac{1}{\alpha_j})}\Big[\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})\theta}(\|\Phi_{\bar\mu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\prod_{j=1}^m 2^{\nu_j(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})\theta}(\|\Phi_{\bar\nu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac12}. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что

$$I_1^\theta << \sum_{\bar l\leq\bar k(1)\leq\bar n}\ldots\sum_{\bar l\leq\bar k(s)\leq\bar n}\prod_{1\leq i<j\leq s}\Big\{\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(j)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(j)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac12}$$
$$\times\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})}\Big\}^{\frac1\tau}. \tag{1.7}$$

Теперь, пользуясь формулой (1.4), будем иметь

$$\prod_{1\leq i<j\leq s}\Big\{\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(j)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(j)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac12}$$
$$\times\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})}\Big\}^{\frac1\tau}$$
$$=\prod_{i=1}^s\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac1s}\prod_{j=1}^s\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})\frac{1}{2\tau}}.$$

Учитывая это равенство и пользуясь неравенством Гельдера с показателем $s>1$, из (1.7) получим

$$I_1^\theta << \sum_{\bar l\leq\bar k(1)\leq\bar n}\ldots\sum_{\bar l\leq\bar k(s)\leq\bar n}\prod_{i=1}^s\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac1s}$$
$$\times\prod_{j=1}^s\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})\frac{1}{2\tau}}\leq C(p,q,\theta)$$
$$\times\prod_{i=1}^s\Big[\sum_{\bar l\leq\bar k(1)\leq\bar n}\ldots\sum_{\bar l\leq\bar k(s)\leq\bar n}\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,q}^*)^\theta\prod_{j=1}^s\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})\frac{1}{s-1}}\Big]^{\frac1s}$$
$$<<\Big[\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\ldots\sum_{k_m=-\infty}^{+\infty}\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})}\Big]^{\frac{1}{s-1}}\sum_{\bar l\leq\bar k\leq\bar n}\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta$$
$$= C\sum_{\bar l\leq\bar k\leq\bar n}\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $1 \leq \theta < q_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда для любой функции* $f \in L^*_{\bar{p},\bar{q}}(I^m)$ *и подмножества* $e \subset e_m$ *имеет место неравенство*

$$I_1 = \Big\| \sum_{\bar{l}^e \leq \bar{k}^e \leq \bar{n}^e} \Phi_{\bar{k}^e}(f) \Big\|^*_{\bar{p},\theta} << \Big[\sum_{\bar{l}^e \leq \bar{k}^e \leq \bar{n}^e} \prod_{j \in e} 2^{k^e_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (\|\Phi_{\bar{k}^e}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^\theta \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Для доказательства этой леммы нужно повторить рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 2 для суммы $\sum_{\bar{l}^e \leq \bar{k}^e \leq \bar{n}^e} \Phi_{\bar{k}^e}(f, \bar{x})$, учитывая, что $\Phi_{\bar{k}^e}(f, \bar{x})$ является тригонометрическим полиномом порядка 1 по переменным x_j, для которых $j \notin e$. $\square$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq \theta < p < +\infty$. *Если* $f \in L_p(I^m)$ *и*

$$\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p\big)^\theta < +\infty,$$

то $f \in L^*_{p,\theta}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p\big)^\theta \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\bar{\nu} \in \mathbb{Z}^m}^{\infty} \varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x}), \tag{2.8}$$

где $\bar{\varphi}_{\bar{\nu}}(\bar{x}) = -\Delta_{\bar{\nu}}(f, \bar{x})$. Учитывая, что $W_{0,0}(f, \bar{x}) = 0$ и лемму 5 из [10], имеем

$$\Big\| f - \sum_{\nu_m=0}^{n_m} \cdots \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x}) \Big\|_p \leq C(p,q,m) \sum_{j=1}^{m} Y_{2^{n_1-1}-1, \ldots, 2^{n_{j-1}-1}-1, 0, 2^{n_{j+1}-1}-1, \ldots, 2^{n_m}-1}(f)_p \to 0$$

при $n_j \to +\infty$, $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, ряд (2.8) сходится в $L_p(I^m)$ к функции $f \in L_p(I^m)$.

В силу монотонности наилучшего приближения “углом” и условия теоремы 1 имеем

$$\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^\theta < +\infty. \tag{2.9}$$

В силу леммы 2 при $p_j = q_j = p, j = 1, \ldots, m$, получим

$$\Big\| \sum_{k_1=l_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=l_m}^{n_m} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big\|^*_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=l_m}^{n_m} \cdots \sum_{k_1=l_1}^{n_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \|\Phi_{\bar{k}}(f)\|^\theta_p \Big]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.10}$$

По определению функции $\varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x})$, свойству нормы и монотонности наилучшего приближения

$$\|\Phi_{\bar{k}}(f)\|_p \leq \sum_{j=1}^{m} \big\| f - W_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_j}}-1, 2^{2^{k_{j+1}+1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m+1}}-1} \big\|_p << Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p. \tag{2.11}$$

Таким образом, из (2.9) и (2.10) следует, что ряд (2.8) сходится в метрике пространства $L^{*}_{p,\theta}(I^m)$. Значит, $f\in L^{*}_{p,\theta}(I^m)$. Полагая $l_1=\ldots=l_m=0$ в (2.10) и учитывая (2.11), имеем

$$\Big\|\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=0}^{n_m}\Phi_{\bar k}(f)\Big\|^{*}_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=0}^{n_m}\cdots\sum_{k_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.12}$$

По свойству нормы, в силу леммы 3 и неравенства (2.12) получим

$$\Big\|\sum_{\nu_2=0}^{2^{n_m+1}-1}\cdots\sum_{\nu_1=0}^{2^{n_1+1}-1}\varphi_{\bar\nu}\Big\|^{*}_{p,\theta}\le\Big\|\sum_{\nu_2=1}^{2^{n_m+1}-1}\cdots\sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1+1}-1}\varphi_{\bar\nu}\Big\|^{*}_{p,\theta}+\sum_{e\subset e_m}\Big\|\sum_{\bar 1^e\le\bar\nu^e\le 2^{\bar n^e+1}}\varphi_{\bar\nu^e}\Big\|^{*}_{p,\theta}$$

$$=\Big\|\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=0}^{n_m}\Phi_{\bar k}(f)\Big\|^{*}_{\bar p,\theta}+\sum_{e\subset e_m}\Big\|\sum_{\bar 0\le\bar k^e\le\bar n^e}\Phi_{\bar k^e}(f)\Big\|^{*}_{p,\theta}$$

$$<<\Big\{\Big[\sum_{k_m=0}^{n_m}\cdots\sum_{k_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$+\Big[\sum_{e\subset e_m}\sum_{\bar 0\le\bar k^e\le\bar n^e}\prod_{j\in e}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}\big(\|\Phi_{\bar k^e}(f)\|_p\big)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}\Big\}. \tag{2.13}$$

По свойству наилучшего приближения “углом” справедливы неравенства

$$\|\Phi_{\bar k^e}(f)\|_p=\Big\|\sum_{2^{\bar k^e}\le\bar\nu^e\le 2^{\bar k^e+1}}\varphi_{\bar\nu^e}\Big\|_p << Y_{(2^{2^{\bar k}}-1)^e}(f)_p. \tag{2.14}$$

В силу (2.14) из (2.13) получим

$$\Big\|\sum_{\nu_2=0}^{2^{n_m+1}-1}\cdots\sum_{\nu_1=0}^{2^{n_1+1}-1}\varphi_{\bar\nu}\Big\|^{*}_{p,\theta}<<\Big[\sum_{k_m=0}^{n_m}\cdots\sum_{k_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$+\Big[\sum_{e\subset e_m}\sum_{\bar 0\le\bar k^e\le\bar n^e}\prod_{j\in e}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}(Y_{(2^{2^{\bar k}}-1)^e}(f)_{\bar p,\bar q})^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$<<\Big[\sum_{k_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}\big(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p\big)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.15}$$

Так как ряд (2.8) сходится к f по метрике пространства $L^{*}_{\bar p,\theta}(I^m)$, то в (2.15) переходя к пределу при $n_1\to+\infty,\ldots,n_m\to+\infty$ получим

$$\|f\|^{*}_{p,\theta}<<\Big[\sum_{k_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}\big(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p\big)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $1\le\theta\le\min\{2,p\}$, $1<p<+\infty$. *Если* $f\in L_p(I^m)$ *и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{1-\frac{\theta}{p}}\big(\|\delta_{\bar s}(f)\|^{*}_p\big)^{\theta}<+\infty,$$

то $f\in L^{*}_{p,\theta}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^{*}_{p,\theta}<<\Big[\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{1-\frac{\theta}{p}}\Big(\big\|\delta_{\bar s}(f)\big\|_p\Big)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению наилучшего приближения “углом” и свойству нормы имеем

$$Y_{2^{2^{k_1}}-1,\dots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p \le \|f - U_{2^{2^{k_1}}-1,\dots,2^{2^{k_m}}-1}\|_p \le \sum_{\nu_m=k_m}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\Big\|\sum_{s_m=2^{\nu_m}+1}^{2^{\nu_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{\nu_1}+1}^{2^{\nu_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p.$$

Учитывая это неравенство и применяя лемму 2.2 из [14], получим

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\dots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta}$$

$$<< \sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p\Big)^{\theta}. \tag{2.16}$$

По теореме Литтльвуда — Пэли (см. [2, с. 55])

$$\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p \asymp \Big\|\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p$$

при $1 < p < +\infty$.

Поэтому, если $1 < p \le 2$, то в силу неравенства Йенсена (см. [2, с. 125]) имеем

$$\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p << \Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^{\theta}$$

$$<< \sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\Big\|\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}.$$

Так как по условию теоремы $\theta < p$, то в силу неравенства Йенсена (см. [2, с. 125]) отсюда получим

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\Big\|\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}$$

$$\le \sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \le \sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^{\theta} << \sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}, \tag{2.17}$$

если $1 < p \le 2$.

Теперь, если $2 < p < +\infty$, то по свойству нормы выводим

$$\Big\|\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \le \Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, если $\theta \le 2$, пользуясь неравенством Йенсена (см. [2, с. 125]), имеем

$$\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} \Big(\Big\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\bar{s}}(f) \Big\|_p \Big)^{\theta}$$

$$<< \sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^2 \Big)^{\frac{\theta}{2}}$$

$$<< \sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} << \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}. \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.16)–(2.18) и теоремы 1 следуют утверждения теоремы 2. □

Следствие. *Пусть* $1 < \theta \le \min\{2, p\}$, $p \le q_j, j = 1, \dots, m$. *Если* $f \in L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$ *и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\big)^{\theta} < \infty,$$

то $f \in L^*_{p,\theta}(I^m)$ *и*

$$\|f\|^*_{p,\theta} << \Big[\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\big)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $p \le q_j, j = 1, \dots, m$, то $L^*_{p,p}(I^m) = L_p(I^m) \subset L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$. Поэтому в силу неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов (см. [12, лемма Б; 13, теорема 10]) имеем

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} << \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\big)^{\theta}.$$

Поэтому функция $f \in L_p(I^m)$, и, применяя к этой функции теорему 2, получим утверждения следствия. □

Теорема 3. *Пусть* $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $1 < \lambda_j < \theta < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, $\max\{p, 2\} \le \theta < +\infty$. *Если* $f_0 \in L^*_{\bar{p},\theta}(I^m)$,

$$f_0(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} a_{\bar{s}} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^{m} \big(n_j - 2^{s_j-1} + 1\big)^{\frac{1}{p}-1} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle},$$

то

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \Big[\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j})\theta} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\big)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. А. П. Блозински [1] доказал, что

$$\|f\|^*_{p,\theta} >> \sup_{\substack{g \in L^*_{p',\theta'} \\ \|g\|^*_{p',\theta'} \le 1}} \Big| \int_{I^m} f(\bar{x}) g(\bar{x}) d\bar{x} \Big|, \tag{2.19}$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$, $1 < p, \theta < +\infty$.

Рассмотрим функцию $g_\nu(\bar{x}) = \sum\limits_{s_m=1}^{\nu-1} \dots \sum\limits_{s_1=1}^{\nu-1} b_{\bar{s},\nu} \sum\limits_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \left(n_j - 2^{s_j-1}+1\right)^{\frac{1}{p'}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}$, где

$$b_{\bar{s},\nu} = \left\|\left\{\prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{p,\bar{\lambda}}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}}\right\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}} |a_{\bar{s}}|^{\theta-1}\,\mathrm{sign}(a_{\bar{s}}).$$

В силу непрерывности $g_\nu \in L^*_{p',\theta'}(I^m)$. Теперь покажем, что $\|g_\nu\|^*_{p',\theta'} \le C_0$, где C_0 — некоторое положительное число. По определению функции g_ν, учитывая соотношение

$$\Big\|\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})}\prod_{j=1}^m \left(n_j - 2^{s_j-1}+1\right)^{\frac{1}{p}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\Big\|_{p,\bar{\lambda}} \asymp \prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \tag{2.20}$$

при $1 < p, \lambda_j < +\infty, j = 1,\dots,m$, имеем

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{\lambda'_j}} \|\delta_{\bar{s}}(g_\nu)\|^*_{p',\bar{\lambda}'}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}}\right\|_{l_{\theta'}} << \left\|\left\{\prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}}\right\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}}$$

$$\times\Big[\sum_{s_m=1}^{\nu-1}\dots\sum_{s_1=1}^{\nu-1}\prod_{j=1}^m s_j^{1-\frac{\theta}{\lambda_j}}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right)^\theta\Big]^{\frac{1}{\theta'}} \le C_0,$$

где $\lambda'_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_j - 1}, j = 1,\dots,m.$

Таким образом, $\left\|\left\{\prod\limits_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{\lambda'_j}} \|\delta_{\bar{s}}(g_\nu)\|_{p',\bar{\lambda}'}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}}\right\|_{l_{\theta'}} \le C_0$. Значит, в силу следствия из теоремы 2 функция $G_\nu(\bar{x}) = C_0^{-1} g_\nu(\bar{x}) \in L^*_{p',\theta'}(I^m)$ и $\|G_\nu\|^*_{p',\theta'} \le 1$.

В силу (2.19) и ортогональности системы $\{e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}\}$ имеем

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \int_{I^m} f_0(\bar{x})g_\nu(\bar{x})d\bar{x} = \left\|\left\{\prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\tau}}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}}\right\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}} \times \sum_{s_m=1}^{\nu-1}\dots\sum_{s_1=1}^{\nu-1}|a_{\bar{s}}|^\theta\prod_{j=1}^m s_j. \tag{2.21}$$

Далее, учитывая соотношение (2.20), получим $|a_{\bar{s}}(f_0)|^\theta \prod\limits_{j=1}^m s_j \asymp \prod\limits_{j=1}^m s_j^{1-\frac{\theta}{\lambda_j}} \left(\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right)^\theta$. Поэтому из (2.21) следует, что

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \left\|\left\{\prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}}\right\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}} \times \sum_{s_m=1}^{\nu-1}\dots\sum_{s_1=1}^{\nu-1}\prod_{j=1}^m s_j^{1-\frac{\theta}{\lambda_j}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^\theta_{p,\bar{\lambda}}.$$

В этом неравенстве, переходя к пределу при $\nu \to +\infty$, получим

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \left\|\left\{\prod_{j=1}^m s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_\theta}.$$

Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_m$, $\gamma_j = r_j/r_1, j = 1, 2, \dots, m$.

1. *Пусть* $\theta \le \tau_j,\ j = 1,\dots,m$. *Если* $1 < \theta \le \min\{p,2\}$ *и* $p \le q_j,\ j = 1,\dots,m$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}}B\big)_{p,\theta} << 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^m(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^m(1/\theta-1/\tau_j)}.$$

Если $1 < p \le q_j < \infty,\ j = 1, \dots, m,\ \max\{p, 2\} \le \theta < \infty$, *то*

$$E_n^{(\bar\gamma)}\bigl(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B\bigr)_{p,\theta} >> 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}.$$

2. *Пусть* $1 \le \tau_j \le \theta, j = 1, \dots, m$. *Если* $1 < \theta \le \min\{p, 2\}$ *и* $p \le q_j, j = 1, \dots, m$, *то*

$$E_n^{(\bar\gamma)}\bigl(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B\bigr)_{p,\theta} << \sup_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}.$$

Если $1 < p_j < \infty$, $1 < \theta_j < q_j < \infty,\ j = 1, \dots, m$, *то*

$$E_n^{(\bar\gamma)}\bigl(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar q,\bar\tau}B\bigr)_{\bar p,\bar\theta} >> \sup_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\theta < \tau_j,\ j = 1, \dots, m$. Применяя неравенство Гельдера, нетрудно убедиться, что для функция $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B$ выполняется условие следствия. Следовательно, эта функция принадлежит пространству $L^*_{p,\theta}(I^m)$. Поэтому, применяя следствие теоремы 1 к функции $f - S_n^{(\gamma)}(f) \in L^*_{p,\theta}(I^m)$, получим

$$\bigl\|f - S_n^{(\bar\gamma)}(f)\bigr\|^*_{p,\theta} << \Bigl\|\Bigl\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\,\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{p,\bar q}\Bigr\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\Bigr\|_{l_\theta}. \tag{2.22}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера $\Bigl(\beta_j = \dfrac{\tau_j}{\theta}, \dfrac{1}{\beta_j} + \dfrac{1}{\beta'_j} = 1\Bigr)$ и лемму 1 из [12], при $\beta_j = \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$ имеем

$$\Bigl\|\Bigl\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\bigl\|\delta_{\bar s}(f)\bigr\|^*_{p,\bar q}\Bigr\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\Bigr\|_{l_\theta} \le \Bigl\|\Bigl\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\bigl\|\delta_{\bar s}(f)\bigr\|^*_{p,\bar q}\Bigr\}_{\bar s\in\mathbb{Z}^m_+}\Bigr\|_{l_{\bar\tau}}$$

$$\times\Bigl\|\Bigl\{\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\Bigr\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\Bigr\|_{l_{\bar\epsilon}} << \Bigl\|\Bigl\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\bigl\|\delta_{\bar s}(f)\bigr\|^*_{p,\bar q}\Bigr\}_{\bar s\in\mathbb{Z}^m_+}\Bigr\|_{l_{\bar\tau}}$$

$$\times\, 2^{-nr_1}\, n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}1/\epsilon_j}, \tag{2.23}$$

где $\epsilon_j = \theta\beta'_j$, $\dfrac{1}{\epsilon_j} = \dfrac{1}{\theta}\beta'_j = \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{\tau_j},\ j = 1, \dots, m$.

Теперь из (2.22) и (2.23) следует $\bigl\|f - S_n^{(\bar\gamma)}(f)\bigr\|^*_{p,\theta} << 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}$ в случае $\theta < \tau_j, j = 1, 2, \dots, m$, для функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B$. Отсюда получается оценка

$$E_n^{(\bar\gamma)}\bigl(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B\bigr)_{p,\theta} << 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}$$

в случае $\theta < \tau_j, j = 1, 2, \dots, m$.

Докажем оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar x) = n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\sum_{\bar s\in\varkappa(n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{-\frac{1}{q_j}}\sum_{\bar k\in\rho(\bar s)}\prod_{j=1}^{m}\bigl(n_j - 2^{s_j-1} + 1\bigr)^{\frac{1}{p}-1}e^{i\langle\bar k,\bar x\rangle}.$$

В силу непрерывности $f_0 \in L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$. Далее, в силу соотношения (2.20) и [8, лемма 2] получим

$$\left\|\left\{2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle}\,\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{q}}\right\}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} << n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\left\|\left\{\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})\right\}_{\bar{s}\in\varkappa(n)}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} << n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j}\, n^{\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j} = C_0.$$

Таким образом, функция $F_0 = C_0^{-1}\, f_0 \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}}B$. По определению функции f_0 и наилучшего приближения справедливо равенство $E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p,\theta} = \|f_0\|^*_{p,\theta}$. Выберем числа $\lambda_j \in [1,\theta), j = 1,2,\ldots m$. Теперь, применяя теорему 3 и лемму 1, будем иметь

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f_0)_{p,\theta} = \|f_0\|^*_{p,\theta} >> \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}}\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_\theta}$$

$$>> n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}\right\}_{\bar{s}\in\varkappa(n)}\right\|_{l_\theta} >> 2^{-nr_1}\, n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}.$$

Этим оценка снизу в случае $\theta < \tau_j, j = 1,2,\ldots,m$, доказана.

Докажем второй пункт. Пусть $\tau_j < \theta, j = 1,2,\ldots,m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена, будем иметь

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\right\|_{l_\theta} \le \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\bar{q}}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}$$

$$\le \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\bar{q}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\sup_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}.$$

Поэтому из неравенства (2.23) следует

$$E_n^{(\bar{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}}B\big)_{p,\theta} << \sup_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}$$

в случае $\tau_j \le \theta, j = 1,2,\ldots,m$. Оценка сверху доказана.

Докажем оценку снизу. Пусть $\tau_j \le \theta, j = 1,2,\ldots,m$ и $\forall\tilde{\bar{s}} \in Y^m(\overline{\gamma},n)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar{x}) = \prod_{j=1}^{m}2^{-\tilde{s_j}r_j}\tilde{s_j}^{\frac{-1}{q_j}}\sum_{\bar{k}\in\rho(\tilde{\bar{s}})}\prod_{j=1}^{m}\big(n_j - 2^{\tilde{s_j}-1}+1\big)^{\frac{1}{p_j}-1}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Тогда в силу соотношения (2.20) имеем $\left\|\delta_{\tilde{\bar{s}}}(f_1)\right\|^*_{\overline{p},\overline{q}} \asymp \prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s_j}r_j}$. Если $\bar{s} \ne \tilde{\bar{s}}$, то $\|\delta_{\overline{s}}(f_1)\|^*_{\overline{p},\overline{q}} = 0$. Поэтому $\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\,\|\delta_{\overline{s}}(f_1)\|^*_{\overline{p},\overline{q}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le C_1$. Следовательно, функция $C_1^{-1}f_1 \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B$. Так как $\langle\tilde{\bar{s}},\bar{\gamma}\rangle \ge n$, то $E_n^{(\bar{\gamma})}(f_1)_{\bar{p},\theta} = \|f_1\|^*_{\bar{p},\theta}$.

Поэтому, учитывая соотношение (2.20), имеем

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f_1)_{\bar{p},\theta} = \|f_1\|^*_{\bar{p},\theta} >> \prod_{j=1}^{m}2^{-\tilde{s_j}r_j}\tilde{s_j}^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}} \quad \forall\tilde{\bar{s}}\in Y^m(\overline{\gamma},n).$$

Значит,

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_{\bar{p},\theta} >> \sup_{\bar{s}\in Y^m(\overline{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}.$$

Теорема 4 доказана. □

З а м е ч а н и е. Если $p = \theta = 2$, то $\min\{p,2\} = \max\{p,2\} = 2$ и $L^*_{p,\theta}(I^m) = L_2(I^m)$. Поэтому из утверждений п. 1 теоремы 4 следует, что

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_2 \asymp 2^{-nr_1}\, n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/2-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/2-1/\tau_j)}$$

при $2 < q_j < \infty,\ 2 < \tau_j \le \infty,\ j = 1,\ldots,m$.

3. Заключение

В [12, неравенство (32)] доказано неравенство

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\Big\{\sum_{s_2=2^{k_2}+1}^{2^{k_2+1}}\Big[\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{1}{\theta_1}}\Big\}^{\theta_2}$$

$$<< \sum_{s_2=2}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}}\Big[\sum_{s_1=2}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}}\Big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}. \qquad (3.24)$$

Как указано в [12], применяя неравенство Гельдера для доказательства (3.24) с показателями $\dfrac{1}{\theta_j}+\dfrac{1}{\theta'_j}=1, j=1,2,$ получим

$$2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Big)^{\theta_1} << \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} s_1^{\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}.$$

К сожалению, в доказательстве этого неравенства допущена неточность. В действительности должно быть

$$2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Big)^{\theta_1}$$

$$\le 2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}2^{k_1(\theta_1-1)}\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1} << \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} s_1^{\theta_1(1-\frac{1}{q_1})}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}.$$

Теорема 2 является некоторым исправлением указанной неточности в доказательстве неравенства (3.24).

Отметим, что в случае $\bar{\theta}=\bar{q}$ оценка величины

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_{\overline{p},\bar{\theta}} = \sup_{f\in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B} E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\bar{\theta}}$$

неизвестна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Blozinski A.P.** Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Society. 1981. Vol. 263, no. 1. P. 146–167.
2. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
3. **Никольский С.М.** Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.
4. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука, 1976. 224 с.
5. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.
6. **Тихомиров В.М.** Теория приближений. Современные проблемы математики. М., 1987. С. 103–270.
7. **Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation [e-resource]. 2016. 154 p. URL: http://arxiv.org/pdf/1601.03978v1 .
8. **Акишев Г.** Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40.

9. **Бекмаганбетов К. А.** О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфим. мат. журн. 2009. Т. 1, № 2. С. 9–16.
10. **Потапов М.К.** Теоремы вложения в смешанной метрике // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 143–156.
11. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
12. **Акишев Г.** О порядках приближения классов в пространствах Лоренца // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 51–67.
13. **Нурсултанов Е.Д.**, Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 1–18.
14. **Johansson H.** Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases/ / Research Report University Umea. 1975. Vol. 6. P. 1–36.

Акишев Габдолла

Поступила 02.09.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms. *Trans. Amer. Math. Society.*, 1981, vol. 263, no. 1, pp. 146–167.
2. Nikolsky S.M. *Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya* (Approximation of functions of several variables and imbedding theorems). Moscow: Nauka Publ., 1977, 456 p. (in Russian).
3. Nikol'skii S.M. Functions with dominant mixed derivative satisfying a multiple Holder condition. *Sib. Mat. Zh.*, 1963, vol. 4, no. 6, pp. 1342–1364 (in Russian).
4. Amanov T.I. *Prostranstva differenciruemyh funkcij s dominiruyushchej smeshannoj proizvodnoj* (Spaces of differentiable functions with dominating mixed derivative). Alma-Ata: Nauka Publ., 1976, 224 p. (in Russian).
5. Babenko K.I. The approximation of a certain class of periodic functions of many variables by trigonometric polynomials. *Dokl. AN SSSR*, 1960, vol. 132, no. 5, pp. 982–985 (in Russian).
6. Tikhomirov V.M. Approximation theory. *Sovrem. Probl. Mat.*, Moscow: VINITI, 1987, pp. 103–260 (in Russian).
7. Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation*, 2016, 154 p. Available at: http://arxiv.org/pdf/1601.03978v1 .
8. Akishev G. Approximation of function classes in spaces with mixed norm. *Math. Sb.*, 2006, vol. 197, no. 8, pp. 1121–1144.
9. Bekmaganbetov K.A. On the order of approximation of Besov classes in metric of anisotropic Lorentz spaces. *Ufim. Mat. Zh.*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 9–16 (in Russian).
10. Potapov M.K. Imbedding theorems in a mixed metric. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1983, vol. 156, pp. 155–171.
11. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. *Integralnye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya* (Integral representations of functions and imbedding theorems). Washington: V.H. Winston & Sons, New York-Toronto, Ont.-London: Halsted Press [John Wiley & Sons], 1978, vol. 1, 345 p.
12. Akishev G. On the order of approximation of classes in Lorentz space. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2008, vol. 5, pp. 51–67 (in Russian).
13. Nursultanov E.D. Nikol'skii's inequality for different metrics and properties of the sequence of norms of the Fourier sums of a function in the Lorentz space. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 255, pp. 185–202.
14. Johansson H. Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases. *Research Report University Umea*, 1975, vol. 6, pp. 1–36.

G. Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RSE Academician E.A. Buketov Karaganda State University, the Republic of Kazakhstan, 100028; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: akishev_g@mail.ru .