ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ В L_2 ЧАСТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Р. А. Вепринцев

Для приближений в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля доказано неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности. Многомерный вес, определяющий оператор Штурма — Лиувилля, является произведением одномерных весов. Одномерными весами могут выступать, в частности, степенные и гиперболические веса с различными параметрами. Оптимальность аргумента в модуле непрерывности устанавливается с помощью многомерной квадратурной формулы Гаусса по нулям собственной функции оператора Штурма–Лиувилля. Полученные результаты носят законченный характер и обобщают многие ранее известные результаты.

Оператор Штурма — Лиувилля, пространство L^2, преобразование Фурье, неравенство Джексона, квадратурная формула Гаусса.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, R. A. Veprintsev. Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform in the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator.

For approximations in the space $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ by partial integrals of the multidimensional Fourier transform in the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator, we prove the Jackson inequality with exact constant and optimal argument in the modulus of continuity. The multidimensional weight that defines the Sturm–Liouville operator is the product of one-dimensional weights. The one-dimensional weights can be, in particular, power and hyperbolic weights with various parameters. The optimality of the argument in the modulus of continuity is established by means of the multidimensional Gauss quadrature formula over zeros of an eigenfunction of the Sturm–Liouville operator. The obtained results are complete; they generalize a number of known results.

Keywords: Sturm–Liouville operator, L^2-space, Fourier transform, Jackson inequality, Gauss quadrature formula.

MSC: 34B24, 41A44, 41A55, 41A63

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-136-152

Введение

Доказательство неравенств Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности определило важное направление исследований по экстремальным задачам теории приближений в пространствах L^2. Пионерскими работами в этом направлении стали две работы Н. И. Черных [1; 2] для одномерного тора $\mathbb{T}$. В статье [1] 1967 г. впервые доказано неравенство Джексона в $L^2(\mathbb{T})$ с точной константой, а в статье В. В. Арестова и Н. И. Черных [2] 1981 г. установлено, что аргумент в модуле непрерывности в этом неравенстве является оптимальным.

Точная константа в неравенстве Джексона в L^2, зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, можно назвать оптимальным аргументом. Наиболее полные результаты по оптимальным аргументам получены для прямой, полупрямой и их декартовых произведений [3–7]. Они показали, что в многомерном случае оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра V приближающих целых функций, так

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00308), Министерства образования и науки РФ (госздания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К).

и от геометрии окрестности нуля U в определении модуля непрерывности. Е. Е. Бердышева [3] установила глубокую связь между оптимальным аргументом и экстремальной задачей Логана для целых функций многих переменных из пространства $L^1(\mathbb{R}^d)$ и нашла оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \le p \le 2$, а U — куб. В [4] установлен оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в L^2 на полупрямой со степенным весом, что позволило найти оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда оба тела являются евклидовыми шарами. В [5] найден оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с весом, являющимся произведением модулей координат в неотрицательных степенях, и, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \le p \le 2$, а U — параллелепипед. Отметим, что случай параллелепипеда оказался сложнее куба.

В [4] оптимальность аргумента в неравенстве Джексона установлена с помощью квадратурной формулы Гаусса на полупрямой по нулям нормированной функции Бесселя

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha},$$

где $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \ge -1/2$, доказанной Фрапье — Оливером — Грозевым — Рахманом.

Нормированная функция Бесселя является собственной функцией задачи или оператора Штурма — Лиувилля на полупрямой со степенным весом. Нам удалось построить квадратурную формулу на полупрямой по нулям собственной функции задачи Штурма — Лиувилля с достаточно общим весом. Это позволило решить задачу об оптимальном аргументе в неравенстве Джексона в L^2 на многих других многообразиях. В [6] это сделано в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с гиперболическим весом, в [7] — в $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ с многомерным гиперболическим весом, в [8] — в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с общим одномерным весом.

В настоящей работе, следуя [5; 7], мы доказываем точное неравенство Джексона с оптимальным аргументом в модуле непрерывности в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ с многомерным весом

$$w(t) = \prod_{j=1}^{d} w_j(t_j), \quad t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d, \tag{0.1}$$

где $w_j(t_j)$, $t_j \in \mathbb{R}_+$, — одномерные непрерывные весовые функции, положительные и непрерывно дифференцируемые при $t_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$. На одномерные веса накладываются некоторые ограничения, естественные в теории Штурма — Лиувилля.

Тем самым эта работа в определенной степени завершает цикл работ по оптимальным аргументам в неравенствах Джексона в L^2, обобщая многие предыдущие результаты.

1. Задача Штурма — Лиувилля

Пусть $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{C}^d$) — d-мерное действительное (комплексное) пространство с евклидовой нормой $|x|$, $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, d\}$, t, $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^d$.

Для весовой функции (0.1) рассмотрим многомерную задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial t_j}\Big(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t_j}\,\varphi(t,\lambda)\Big) + \big(|\lambda|^2 + |\lambda_0|^2\big) w(t)\varphi(t,\lambda) = 0,\\ \varphi(0,\lambda) = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}\,(0,\lambda) = 0, \quad j = 1, \ldots, d.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Понятно, что решение задачи (1.1) имеет вид $\varphi(t,\lambda) = \prod_{j=1}^{d} \varphi(t_j,\lambda_j)$, где $\varphi(t_j,\lambda_j)$ — решения одномерных задач Штурма — Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\Big(w_j(t_j)\,\frac{\partial}{\partial t_j}\,\varphi_j(t_j,\lambda_j)\Big) + \Big(\lambda_j^2 + \lambda_{0j}^2\Big) w_j(t_j)\varphi_j(t_j,\lambda_j) = 0, \tag{1.2}$$

$$\varphi_j(0,\lambda_j)=1,\quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_j}(0,\lambda_j)=0,\quad j=1,\dots,d.$$

Предположим, что задачи (1.2) имеют решения $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$, которые будем называть собственными функциями, и для них выполнены следующие свойства.

1. Собственные функции $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ — действительные, четные по t_j на $\mathbb{R}$ и четные целые функции экспоненциального типа $|t_j|$ при $t_j\neq 0$ по λ_j,

$$\varphi_j(0,\lambda_j)=1,\quad |\varphi_j(t_j,\lambda_j)|\le 1,\quad \lambda_j,t_j\in\mathbb{R},\quad \varphi_j(t_j,0)>0.$$

Отсюда

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad |\varphi(t,\lambda)|\le 1,\quad \lambda,t\in\mathbb{R}^d,\quad \varphi(t,0)>0. \tag{1.3}$$

2. Для $t_j>0$, $\lambda_j\in\mathbb{C}$

$$\varphi_j(t_j,\lambda_j)=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda_j^2}{\lambda_{jk}^2(t)}\Big),$$

где $0<\lambda_{j1}(t_j)<\ldots<\lambda_{jk}(t_j)<\ldots$ — положительные нули $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ по λ_j. Нули $\lambda_{jk}(t_j)$ непрерывны и монотонно убывают при $t_j>0$. При этом $\lambda_{jk}(t_j)=t_{jk}^{-1}(t_j)$, где $t_{jk}(\lambda_j)$ — положительные нули функции $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ по $t_j>0$.

3. Спектральные меры $\sigma_j(\lambda_j)$ задач (1.2) непрерывны на $\mathbb{R}_+$, положительны и непрерывно дифференцируемы для $\lambda_j>0$, $\sigma_j(0)=0$ и

$$\sigma_j'(\lambda_j)=s_j(\lambda_j)\asymp\lambda_j^{2\alpha_j+1},\quad \lambda_j\to+\infty,\ \alpha_j\ge -1/2. \tag{1.4}$$

Пусть $d\mu_j(t_j)=w_j(t_j)\,dt_j$, $d\mu(t)=w(t)\,dt$, $1\le p<\infty$, $L^p(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu}=\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}|f(t)|^p\,d\mu(t)\bigg)^{1/p}<\infty,$$

$d\sigma_j(\lambda_j)=s_j(\lambda_j)\,d\lambda_j$, $s(\lambda)=\prod_{j=1}^d s_j(\lambda_j)$, $d\sigma(\lambda)=s(\lambda)\,d\lambda$, $L^p(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с нормой

$$\|g\|_{p,d\sigma}=\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}|g(\lambda)|^p\,d\sigma(\lambda)\bigg)^{1/p}<\infty,$$

$C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем, $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$ — подпространство функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, все производные которых в нуле равны нулю. Для пространства $X(\mathbb{R}^d)$ через $X(\mathbb{R}_+^d)$ будем обозначать его подпространство, все функции которого четные по каждой переменной. Функции, заданные на $\mathbb{R}_+^d$, будем рассматривать и на $\mathbb{R}^d$, считая их продолженными по четности по каждой переменной.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}f(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t),\quad \mathcal{F}^{-1}g(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Если $f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, то $\mathcal{F}f\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$. Если $g\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$, то $\mathcal{F}^{-1}g\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$.

Будем предполагать, что прямое и обратное преобразования Фурье осуществляют изоморфизм между $L^2(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$ и справедливы равенства Планшереля

$$\|\mathcal{F}f\|_{2,d\sigma}=\|f\|_{2,d\mu},\quad \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{2,d\mu}=\|g\|_{2,d\sigma}.$$

Мы будем также рассматривать одномерные прямые и обратные преобразования Фурье

$$\mathcal{F}_j f(\lambda_j)=\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t_j)\varphi_j(t_j,\lambda_j)\,d\mu_j(t_j),\quad \mathcal{F}_j^{-1}g(t_j)=\int\limits_{\mathbb{R}_+} g(\lambda_j)\varphi_j(t_j,\lambda_j)\,d\sigma_j(\lambda_j)$$

в пространствах $L^2(\mathbb{R}_+,d\mu_j)$, $L^2(\mathbb{R}_+,d\sigma_j)$ соответственно.

4. Для $t_j>0$ равномерно на каждом компакте из $(0,\infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda_j^{\alpha_j+1/2}\varphi_j(t_j,\lambda_j)=C_j(t_j)\bigl(\cos\left(t_j\lambda_j-c_j(t_j)\right)+e^{t_j|\operatorname{Im}\lambda_j|}O(|\lambda_j|^{-1})\bigr),\quad |\lambda_j|\to\infty,\quad \operatorname{Re}\lambda_j\ge 0,\tag{1.5}$$

где α_j из (1.4).

5. Если $f\in C(\mathbb{R}_+^d)\cap L^1(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, $\mathcal{F}f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$, то для $t\in\mathbb{R}_+^d$ справедливо поточечное равенство

$$f(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda).\tag{1.6}$$

Условия **1**–**5** являются достаточными для построения многомерной квадратурной формулы Гаусса в $\mathbb{R}_+^d$ по нулям $\lambda_k(t)=(\lambda_{1k_1}(t_1),\dots,\lambda_{dk_d}(t_d))$ (см. далее лемму 9).

Представление (1.6) верно для $f\in C_{00}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$. Действительно, если $\Delta_w f=\sum\limits_{j=1}^d\dfrac{\partial}{\partial t_j}\Bigl(w(t)\dfrac{\partial}{\partial t_j}f\Bigr)$, то для любого $s\in\mathbb{N}$ $(-\Delta_w)^s f\in C_{00}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ и интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{F}f(\lambda)=(|\lambda|^2+|\lambda_0|^2)^{-s}\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\varphi(t,\lambda)(-\Delta_w)^s f(t)\,d\mu(t),$$

поэтому $\mathcal{F}f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$.

Для преобразования Фурье справедливо следующее свойство единственности. Если $f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$ и $\mathcal{F}f(\lambda)=0$ почти всюду, то $f(t)=0$ почти всюду. Действительно, для любой $g\in C_{00}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(t)g(t)\,d\mu(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(t)\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\mathcal{F}g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\,d\mu(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=0,$$

поэтому $f(t)=0$ почти всюду.

6. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\widehat{f}(\lambda)\varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda),\quad t,x\in\mathbb{R}_+^d,$$

действующего согласно (1.3) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, $\|T^t\|_{2\to2}=1$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(z)\,d\tau_{x,t}(z),\tag{1.7}$$

где для всех $x,t\in\mathbb{R}_+^d$ $\tau_{x,t}$ — вероятностная борелевская мера, для которой $\tau_{x,t}=\tau_{t,x}$, носитель $\operatorname{supp}\tau_{x,t}\subset\prod_{j=1}^d[|x_j-t_j|,x_j+t_j]$ и отображение $(x,t)\to\tau_{x,t}$ непрерывно в слабой топологии вероятностных борелевских мер.

Оператор T^t является положительным и самосопряженным оператором, $T^t f(x)\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$, если $f\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$.

Покажем, что представление (1.7) позволяет распространить T^t на пространства $L^p(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}^d_+$. Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ из представления (1.7)

$$\|T^t f\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Отсюда и из самосопряженности оператора T^t для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $p = 1$,

$$\|T^t f\|_{1,d\mu} = \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} (T^t f)\overline{g}\, d\mu\colon \|g\|_\infty \le 1, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\}$$

$$= \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}_+} f\overline{T^t g}\, d\mu\colon \|g\|_\infty \le 1,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\} \le \|f\|_{1,d\mu}\|T^t g\|_\infty \le \|f\|_{1,d\mu}.$$

По непрерывности оператор T^t продолжается на $L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$ и $\|T^t\|_{1\to 1} \le 1$. По теореме Рисса — Торина оператор T^t продолжается на пространства $L^p(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, $1 \le p \le 2$, и $\|T^t\|_{p\to p} \le 1$.

Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $2 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, то

$$\|T^t f\|_{p,d\mu} = \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} (T^t f)\overline{g}\, d\mu\colon \|g\|_{p'} \le 1,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\}$$

$$= \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}_+} f\overline{T^t g}\, d\mu\colon \|g\|_{p'} \le 1,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\} \le \|f\|_{p,d\mu}\|T^t g\|_{p'} \le \|f\|_{p,d\mu}.$$

По теореме Рисса — Торина оператор T^t продолжается на пространства $L^p(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, $2 < p < \infty$, и $\|T^t\|_{p\to p} \le 1$.

Пусть

$$\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j], \quad a = (a_1, \dots, a_d), \quad a_j > 0. \tag{1.8}$$

Отметим также следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$\begin{gathered} T^0 f(x) = f(x), \quad T^t 1 = 1, \\ T^t\varphi(x,\lambda) = \varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad \mathcal{F}(T^t f)(\lambda) = \varphi(t,\lambda)\mathcal{F}f(\lambda), \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} T^t f\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} f\, d\mu, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu), \tag{1.10}$$

$$\text{если } \operatorname{supp} f \subset \Pi_a,\ t \in \Pi_\delta, \text{ то } \operatorname{supp} T^t f \subset \Pi_{a+\delta}. \tag{1.11}$$

Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d_+} T^t f(x) g(t)\, d\mu(t)$. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, то

$$(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu), \quad \mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda)\, \mathcal{F}g(\lambda). \tag{1.12}$$

Действительно, применяя теорему Фубини, с учетом ограниченности оператора обобщенного сдвига (см. (1.9)) получим

$$\|(f * g)\|_{1,d\mu} \le \int\limits_{\mathbb{R}^d_+}\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |T^t f(x)||g(t)|\, d\mu(t)\, d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |g(t)| \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |T^t f(x)|\, d\mu(x)\, d\mu(t)$$

$$\le \|f\|_{1,d\mu} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |g(t)|\,d\mu(t) = \|f\|_{1,d\mu}\|g\|_{1,d\mu},$$

$$\mathcal{F}(f*g)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+}\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} T^t f(x)g(t)\,d\mu(t)\varphi(x,\lambda)\,d\mu(x)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} g(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} T^t f(x)\varphi(x,\lambda)\,d\mu(x)\,d\mu(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} g(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t)\mathcal{F}f(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda).$$

Свойства **1–6** выполняются для широкого класса одномерных весов w, в частности для степенного и гиперболического весов:

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \ge -1/2,$$

$$w(t) = (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \ge \beta \ge -1/2$$

(см. [9]).

2. Константа Джексона

Пусть $r,\tau > 0$, V, U — выпуклые центрально-симметричные компактные тела в $\mathbb{R}^d$, инвариантные относительно ортогональной группы преобразований, состоящей из диагональных матриц с элементами ± 1 на главной диагонали, $|x|_V, |x|_U$ — нормы в $\mathbb{R}^d$, порождаемые этими телами. Они являются функциями, четными по каждой переменной. Через V^+ будем обозначать $V \cap \mathbb{R}^d_+$, а через $|x|_V^+$ — сужение $|x|_V$ на $\mathbb{R}^d_+$. Пусть $V^c = \mathbb{R}^d_+ \setminus V$ — дополнение V в $\mathbb{R}^d_+$.

Для функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$

$$E(rV,f)_{2,\mu} = \inf\bigl\{\|f-g\|_{2,\mu}\colon g \in L_2(\mathbb{R}^d_+, d\mu),\ \operatorname{supp}\mathcal{F}g \subset rV\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Фурье по телу rV.

Из равенства Планшереля вытекает, что наилучшее приближение достигается на частичном интеграле обратного преобразования Фурье и

$$E^2(rV,f)_{2,\mu} = \int\limits_{(rV)^c} |\mathcal{F}f|^2\,d\sigma. \tag{2.1}$$

Модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$ определим равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,\mu} = \sup_{0\le t\le\delta} \Delta(t,f), \quad \delta > 0,$$

где

$$\Delta(t,f) = \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} T^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\mu(x)\biggr)^{1/2}.$$

Так как

$$|f(\cdot)-f(x)|^2 = |f(\cdot)|^2 + |f(x)|^2 - 2\mathrm{Re}\,\{f(\cdot)\overline{f(x)}\},$$

то в силу (1.9), (1.10), равенства Планшереля

$$\Delta^2(t,f) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \bigl(T^t|f(x)|^2 + |f(x)|^2 - 2\mathrm{Re}\,\{\overline{f(x)}T^t f(x)\}\bigr)\,d\mu(x)$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{R}^d_+}\big(|f(x)|^2 - \mathrm{Re}\,\{f(x)T^t f(x)\}\big)\,d\mu(x) = 2\int\limits_{\mathbb{R}^d_+}(1-\varphi(t,\lambda))|\mathcal{F}f(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda), \tag{2.2}$$

поэтому

$$\omega^2(\delta,f)_{2,\mu} = 2\sup_{0\le t\le\delta}\int\limits_{\mathbb{R}^d_+}(1-\varphi(t,\lambda))|\mathcal{F}f(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda).$$

Константа Джексона

$$D(rV,\tau U)_{2,\mu} = \sup\Big\{\frac{E(rV,f)_{2,\mu}}{\omega(\tau U,f)_{2,\mu}}\colon f\in L^2(\mathbb{R}^d_+,d\mu)\Big\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона $E(rV,f)_{2,\mu}\le D\omega(\tau U,f)_{2,\mu}$.

Нижняя оценка константы Джексона дается в следующей лемме.

Лемма 1. *Для всех* $r,\tau>0$

$$D(rV,\tau U)_{2,\mu}\ge 2^{-1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon>0$, $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция εU. Применяя (2.2), (1.10), с учетом положительности оператора обобщенного сдвига получим

$$\omega^2(\tau U,\chi_\varepsilon)_{2,\mu} = 2\sup_{t\in\tau U}\Big\{\|\chi_\varepsilon\|^2_{2,\mu} - \int\limits_{\mathbb{R}^d_+}(T^t\chi_\varepsilon(x))\chi_\varepsilon(x)\,d\mu(x)\Big\} \le 2\|\chi_\varepsilon\|^2_{2,\mu} = 2\mu((\varepsilon U)^+). \tag{2.3}$$

В силу (1.3) $|\mathcal{F}\chi_\varepsilon(\lambda)|\le\int_{\mathbb{R}^d_+}|\chi_\varepsilon(t)||\varphi(t,\lambda)|\,d\mu(t)\le\mu((\varepsilon U)^+)$, поэтому из (2.1)

$$E^2(rV,\chi_\varepsilon)_{2,\mu} = \int\limits_{(rV)^c}|\mathcal{F}\chi_\varepsilon(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda) = \|\chi_\varepsilon\|^2_{2,\mu} - \int\limits_{(rV)^+}|\mathcal{F}\chi_\varepsilon(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda)$$

$$\le \mu((\varepsilon U)^+)(1-\mu((\varepsilon U)^+)\sigma((rV)^+)).$$

Отсюда и из (2.3)

$$2D^2(rV,\tau U)_{2,\mu} \ge \sup_{\varepsilon>0}\frac{2E^2(rV,\chi_\varepsilon)_{2,\mu}}{\omega^2(\tau U,\chi_\varepsilon)_{2,\mu}} \ge \sup_{\varepsilon>0}(1-\mu((\varepsilon U)^+)\sigma((rV)^+)) = 1.$$

Лемма доказана.

Пусть U^* — поляра U, $\tau>0$, $S^+((\tau U)^+)$ — множество вероятностных мер на $(\tau U)^+$,

$$K(\tau U) = \Big\{f(\lambda) = \int\limits_{\tau U^+}\varphi(t,\lambda)\,d\nu(t)\colon \nu\in S^+((\tau U)^+)\Big\}$$

— класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|f(\lambda)|\le c_f\,e^{\tau|(\mathrm{Im}\lambda_1,\dots,\mathrm{Im}\lambda_d)|_{U^*}},$$

четных по каждой переменной, $\Gamma(rV,\tau U) = \inf\limits_{f\in K(\tau U)}\sup\limits_{(rV)^c} f(\lambda)$.

Отметим, что согласно (1.3) для $f\in K(\tau U)$ $f(0)=\int_{(\tau U)^+}\varphi(t,0)\,d\nu(t)>0$.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству [7, лемма 4.1] с учетом замены собственной функции в задаче Штурма — Лиувилля с многомерным гиперболическим весом на собственную функцию $\varphi(t,\lambda)$.

Лемма 2. *Для всех* $r, \tau > 0$

$$2D^2(rV, \tau U)_{2,\mu} = \frac{1}{1 - \Gamma(rV, \tau U)}.$$

Существуют мера $\nu^* \in S^+((\tau U)^+)$ *и функция* $f^* \in K(\tau U)$, *для которых*

$$\Gamma(rV, \tau U) = \sup_{\lambda \in (rV)^c} \int\limits_{(\tau U)^+} \varphi(t, \lambda)\, d\nu^*(t) = \sup_{\lambda \in (rV)^c} f^*(\lambda).$$

При доказательстве леммы 2 используются соображения двойственности, которые впервые в задаче о точной константе в неравенстве Джексона в L^2 были применены В. В. Арестовым [10]. $\square$

Из лемм 1, 2 вытекает, что $\Gamma(rV, \tau U) \geq 0$ и $D(rV, \tau U)_{2,\mu} = 2^{-1/2}$ только в случае, когда $\Gamma(rV, \tau U) = 0$. В этом случае $f^*(\lambda) \leq 0$, $\lambda \in (rV)^c$, для некоторой $f^* \in K(\tau U)$.

Лемма 3. *Если* $f \in K(\tau U)$, $f(\lambda) \leq 0$ *при* $\lambda \in (rV)^c$, *то*

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\sigma), \quad \mathcal{F}^{-1} f(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} f\, d\sigma \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция εU,

$$\Psi_\varepsilon(t) = (\mu((\varepsilon U)^+))^{-2} (\chi_\varepsilon * \chi_\varepsilon)(t).$$

Отметим свойства функции Ψ_ε. Согласно положительности оператора обобщенного сдвига, свойству единственности преобразования Фурье, (1.6), (1.12) для всех t, $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$

$$\Psi_\varepsilon(t) \geq 0, \quad \Psi_\varepsilon, \mathcal{F}\Psi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}^d_+), \quad \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) = (J\chi_\varepsilon(\lambda))^2 \geq 0, \quad 0 \leq \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) \leq 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1}{\mu^2((\varepsilon U)^+)} \Bigg(\int\limits_{(\varepsilon U)^+} \varphi(t, \lambda)\, d\mu(t) \Bigg)^2 = \varphi^2(0, \lambda) = 1.$$

Если $f \in K(\tau U)$, то $|f(\lambda)| \leq 1$. Для всех $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} f(\lambda) \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \int\limits_{(\varepsilon U)^+} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) \varphi(t, \lambda)\, d\sigma(\lambda) d\nu(t) = \int\limits_{(\varepsilon U)^+} \Psi_\varepsilon(t) d\nu(t) \geq 0.$$

Далее доказательство леммы 3 заканчивается, как и в [7, лемма 4.2].

3. Неравенство Джексона

Величину

$$\tau(rV, U)_{2,\mu} = \inf \big\{ \tau > 0 \colon D(rV, \tau U)_{2,\mu} = 2^{-1/2} \big\}$$

назовем *оптимальным аргументом*.

Пусть

$$|x|_p = \Bigg(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \Bigg)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad |x|_\infty = \max_j |x_j|, \quad B^d_p = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x|_p \leq 1\}.$$

В качестве тел V будем рассматривать шары B^d_p, а в качестве тел U — параллелепипеды Π_a (1.8).

Пусть E^a — класс целых функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, удовлетворяющих оценке

$$|g(\lambda)|\le c_g\, e^{|(\mathrm{Im}\lambda_1,\dots,\mathrm{Im}\lambda_d)|_{\Pi_a*}}=c_g\, e^{a_1|\mathrm{Im}\lambda_1|+\dots+a_d|\mathrm{Im}\lambda_d|},\quad \lambda\in\mathbb{C}^d,$$

четных по каждой переменной.

Согласно свойству **2** нули $\lambda_{11}(a_1\tau),\dots,\lambda_{d1}(a_d\tau)$ непрерывны и убывают по τ, поэтому уравнение

$$|(\lambda_{11}(a_1\tau),\dots,\lambda_{d1}(a_d\tau))|_p=r \tag{3.1}$$

имеет единственное решение относительно τ, которое обозначим через $\tau^p_{r,a}$.

Лемма 4. *Пусть $r>0$, $1\le p\le 2$, $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, Π_a — параллелепипед* (1.8)*, $\tau=\tau^p_{r,a}$ определено в* (3.1)*. Для целой функции экспоненциального типа*

$$F_p(x)=\Big(r^p-\sum_{j=1}^d(\lambda_{j1}(\tau a_j))^{p-2}\lambda_j^2\Big)\prod_{j=1}^d\frac{\varphi^2(\tau a_j,\lambda_j)}{\Big(\lambda_j^2-\lambda_{j1}^2(\tau a_j)\Big)^2}\in E^{2\tau a} \tag{3.2}$$

выполнены следующие свойства:

$$\begin{gathered}F_p\in L^1(\mathbb{R}^d_+,d\sigma),\quad F_p(\lambda)\le 0,\ |\lambda|_p\ge r,\\ \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}F_p\subset 2\tau\Pi_a,\quad \mathcal{F}^{-1}F_p(t)\ge 0,\ t\in\mathbb{R}^d_+.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принадлежность $F_p\in L_1(\mathbb{R}^d_+,d\sigma)$ вытекает из асимптотик в свойстве **4**. Пусть $\mu_j=(\lambda_{j1}(\tau a_j))^{p-2}$. Если $\sigma^p-\sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2>0$, то, применяя неравенство Гельдера и (3.1), получим

$$|\lambda|_p=\sum_{j=1}^d\mu_j^{p/2}|\lambda_j|^p\mu_j^{-p/2}\le\Big(\sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2\Big)^{p/2}\Big(\sum_{j=1}^d\mu_j^{-\frac{p}{2-p}}\Big)^{1-p/2}<\sigma^{p^2/2}\sigma^{p(1-p/2)}=\sigma^p,$$

поэтому $F_p(\lambda)\le 0$ при $|\lambda|_p\ge\sigma$. Остается доказать включение $\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}F_p\subset 2\tau\Pi_a$ и неравенство $\mathcal{F}^{-1}F_p(t)\ge 0$ при $t\in\mathbb{R}^d_+$.

Рассмотрим функции

$$u_j(x_j)=\begin{cases}\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j)), & |x_j|\le\tau a_j,\\ 0, & |x_j|>\tau a_j,\end{cases}\qquad u(x)=\prod_{j=1}^d u_j(x_j).$$

Согласно положительности оператора обобщенного сдвига, (1.9), (1.11) для $t\in\mathbb{R}^d$, $t^+=(|t_1|,\dots,|t_d|)$ имеем

$$\begin{gathered}u(x)\ge 0,\quad \operatorname{supp}u\subset\tau\Pi_a,\quad T^tu(x)\ge 0,\\ \operatorname{supp}T^tu\subset\Pi_{\tau a+t^+},\quad \mathcal{F}(T^tu)(\lambda)=\varphi(t,\lambda)\mathcal{F}u(\lambda).\end{gathered} \tag{3.4}$$

В силу дифференциального уравнения (1.9)

$$\Big\{w_j(x_j)\big(\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j))(\varphi_j(x_j,\lambda_j))'_{x_j}-(\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j}\varphi_j(x_j,\lambda_j)\big)\Big\}'_{x_j}$$

$$=\big(\lambda_{j1}^2(\tau a_j)-\lambda_j^2\big)w_j(x_j)\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j))\varphi_j(x_j,\lambda_j),$$

поэтому

$$\mathcal{F}_ju_j(\lambda_j)=\int_0^{\tau a_j}\varphi_j(x_j,\lambda_j)\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j))d\mu(x_j)$$

$$= \frac{1}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}\Big\{w_j(x_j)\big(\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j))(\varphi_j(x_j, \lambda_j))'_{x_j} - (\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j}\varphi_j(x_j, \lambda_j)\big)\Big\}\Big|_0^{\tau a_j}$$

$$= -\frac{w_j(\tau a_j)(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j}\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2} = b_j\frac{\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}, \tag{3.5}$$

где $b_j = -w_j(\tau a_j)(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j} > 0$, так как $\varphi_j(0, \lambda_{j1}(\tau a_j)) = 1$ и τa_j — первый простой нуль функции $\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j))$. Отсюда

$$\mathcal{F}u(\lambda) = \prod_{j=1}^d b_j\frac{\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим функцию

$$G(x) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)} T^t u(x)\frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)w(t)dS(t), \tag{3.7}$$

где $\partial(\tau\Pi_a)$ — граница параллелепипеда $\tau\Pi_a$; $\dfrac{\partial u(t)}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial(\tau\Pi_a)$; $h(t) = \mu_j$, если $t_j = \pm\tau a_j$, $j = 1, \ldots, d$, $dS(t)$ — элемент площади поверхности на $\partial(\tau\Pi_a)$.

Так как

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n}\bigg|_{t_j = \pm\tau a_j} = (\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\prod_{i\neq j}u_i(t_i) \leq 0, \tag{3.8}$$

то в силу (3.4), (3.7), (1.11) $G(x) \geq 0$, $\operatorname{supp} G \subset 2\tau\Pi_a$ и

$$\mathcal{F}G(\lambda) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)} \frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)\mathcal{F}(T^t u)(\lambda)w(t)\,dS(t) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)} \frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)\varphi(t,\lambda)w(t)\,dS(t)\mathcal{F}u(\lambda). \tag{3.9}$$

Если $(\tau\Pi_a)^j = \prod_{i\neq j}[-\tau a_i, \tau a_i]$, то согласно (3.5), (3.6), (3.8)

$$g(\lambda) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)} \frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)\varphi(t,\lambda)w(t)\,dS(t)$$

$$= -2\sum_{j=1}^d(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\mu_j\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)w_j(\tau a_j)\times\int\limits_{(\tau\Pi_a)^j}\prod_{i\neq j}u_i(t_i)\varphi_i(t_i, \lambda_i)\prod_{i\neq j}d\mu_i(t_i)$$

$$= -2\sum_{j=1}^d(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\mu_j\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)w_j(\tau a_j)\prod_{i\neq j}\mathcal{F}_i u_i(\lambda_i)$$

$$= -2\mathcal{F}u(\lambda)\sum_{j=1}^d(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\mu_j\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)w_j(\tau a_j)\,(\mathcal{F}_j u_j(\lambda_j))^{-1}$$

$$= 2\mathcal{F}u(\lambda)\sum_{j=1}^d\mu_j(\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2) = 2\mathcal{F}u(\lambda)\Big(\sigma^p - \sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2\Big).$$

Отсюда и из (3.9)

$$\mathcal{F}G(\lambda) = 2(\mathcal{F}u(\lambda))^2\Big(\sigma^p - \sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2\Big).$$

Согласно (3.6), (3.2) $F_p(\lambda)=c\mathcal{F}G(\lambda)$, $c>0$, поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}F_p(t)=cG(t)\ge 0,\quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}F_p\subset 2\tau\Pi_a,$$

и для некоторого $c_1>0$ функция $c_1F_p\in K(2\tau\Pi_a)$. Свойства (3.3) и лемма 4 доказаны.

Из лемм 2, 4 вытекает верхняя оценка оптимального аргумента:

$$\tau(rB_p^d,\Pi_a)_{2,\mu}\le 2\tau_{r,a}^p,\quad 1\le p\le 2, \tag{3.10}$$

и точное неравенство Джексона, представленное следующим утверждением.

Теорема 1. *Если $r>0$, $1\le p\le 2$, $f\in L^2(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, то*

$$E(rB_p^d,f)_{2,\mu}\le 2^{-1/2}\omega(2\tau_{r,a}^p\Pi_a,f)_{2,\mu}.$$

4. Оптимальный аргумент в неравенстве Джексона

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 2. *Если для задачи Штурма — Лиувилля* (1.1) *справедливы условия* **1**–**6**, *$r>0$, $1\le p\le 2$, $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, Π_a — параллелепипед* (1.8) *($\tau=\tau_{r,a}^p$ определено в* (3.1)*), то*

$$\tau(rB_p^d,\Pi_a)_{2,\mu}=2\tau_{r,a}^p. \tag{4.1}$$

Оценка сверху в (4.1) это неравенство (3.10). Получим оценку снизу:

$$\tau(rB_p^d,\Pi_a)_{2,\mu}\ge 2\tau_{r,a}^p. \tag{4.2}$$

Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Пусть далее

$$x^{(a,b)}=\begin{cases}x^a, & 0\le x\le 1,\\ x^b, & x\ge 1\end{cases}$$

— кусочно-степенная функция, знак $\lesssim$ равносилен $O(\cdot)$.

Лемма 5. *Если $a>0$, $b\ge 0$, $f\in E^a\cap L^1(\mathbb{R}_+,\lambda^b\,d\lambda)$, $0<\delta\le 1/(4a)$, то*

$$\int_0^\delta |f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\lesssim\int_\delta^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda,\quad \int_0^\delta |f(\lambda)|\,d\lambda\lesssim\int_\delta^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda. \tag{4.3}$$

Константы в неравенствах (4.3) *зависят от a и b.*

Доказательство. Для $\delta=1/(4a)$ второе неравенство в (4.3) с константой, зависящей от a и b, доказано в [7, лемма 5.3]. Если $0<\delta<1/(4a)$, то

$$\int_0^\delta |f(\lambda)|\,d\lambda\le\int_0^{1/(4a)}|f(\lambda)|\,d\lambda\lesssim\int_{1/(4a)}^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\lesssim\int_\delta^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda.$$

Первое неравенство вытекает из второго, так как

$$\int_0^\delta |f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\le\frac{1}{(4a)^b}\int_0^\delta |f(\lambda)|\,d\lambda.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, $0<\delta\le\min_j 1/(4a_j)$, $V_\delta=\{\lambda\in\mathbb{R}_+^d:\min_j\lambda_j\le\delta\}$, $b=(b_1,\dots,b_d)$, $b_j\ge0$, $\lambda^b=\prod_{j=1}^d\lambda_j^{b_j}$, $g\in E^a\cap L^1(\mathbb{R}_+^d,\lambda^b\,d\lambda)$, *то*

$$\int\limits_{V_\delta}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\lesssim\int\limits_{(V_\delta)^c}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda. \tag{4.4}$$

Константа в неравенстве (4.4) *зависит от* a *и* b.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{(V_\delta)^c}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda=\int\limits_{[\delta,\infty)^d}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda,\quad \int\limits_{V_\delta}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda=\sum_{i=1}^{2^d-1}\int\limits_{A_{1i}\times\dots\times A_{di}}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda,$$

где $A_{ji}=[0,\delta]$ либо $A_{ji}=[\delta,\infty)$. Достаточно показать, что для всех $i=1,\dots,2^d-1$

$$\int\limits_{A_{1i}\times\dots\times A_{di}}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\lesssim\int\limits_{[\delta,\infty)^d}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda. \tag{4.5}$$

Пусть $A_{1i}=[0,\delta]$, $\tilde\lambda=(\lambda_2,\dots,\lambda_d)$, $\tilde A_i=A_{2i}\times\dots\times A_{di}$, $\tilde b=(b_2,\dots,b_d)$. По теореме Фубини для почти всех $\tilde\lambda\in\mathbb{R}_+^{d-1}$ функция f как функция λ_1 принадлежит $E^{a_1}\cap L^1(\mathbb{R}_+,\lambda^{b_1}\,d\lambda_1)$. По лемме 5 для $0<\delta\le\min_j 1/(4a_j)\le 1/(4a_1)$

$$\int\limits_0^\delta|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\lambda^{b_1}\,d\lambda_1\lesssim\int\limits_\delta^\infty|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\lambda^{b_1}\,d\lambda_1.$$

Отсюда

$$\int\limits_{A_{1i}\times\dots\times A_{di}}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda=\int\limits_{\tilde A_i}\int\limits_0^\delta|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\lambda^{b_1}\,d\lambda_1\tilde\lambda^{\tilde b}\,d\tilde\lambda\lesssim\int\limits_\delta^\infty\int\limits_{\tilde A_i}|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\tilde\lambda^{\tilde b}\lambda^{b_1}\,d\tilde\lambda\,d\lambda_1.$$

Продолжая аналогично по другим переменным, придем к (4.5). Лемма доказана.

Согласно асимптотике (1.5) (свойство **4**) для нулей собственных функций справедливы свойства

$$\lambda_{jk_j}(t_j)\sim\frac{\pi k_j}{t_j}\ (k_j\to\infty),\quad \inf_{k_j\in\mathbb{N}}(\lambda_{j(k_j+1)}(t_j)-\lambda_{jk_j}(t_j))=\Delta_j>0. \tag{4.6}$$

Лемма 7. *Пусть*

$$\tau=(\tau_1,\dots,\tau_d),\ \tau_j>0,\ k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d,\ \lambda_k(\tau)=(\lambda_{1k_1}(\tau_1),\dots,\lambda_{dk_d}(\tau_d)).$$

Если $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, $f\in E^a\cap L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$, *то*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d}s(\lambda_k(\tau))|f(\lambda_k(\tau))|\lesssim\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}|f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda). \tag{4.7}$$

Константа в неравенстве (4.7) *не зависит от* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [6, лемма 5.4] установлено, что для $\alpha \geq -1/2$ существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой

$$\omega_\alpha(x) > 0, \quad x > 0, \qquad \omega_\alpha(x) \asymp x^{(2[\alpha+1/2]+2,\, 2\alpha+1)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть для $\alpha = (2\alpha_1 + 1, \ldots, 2\alpha_d + 1)$

$$\lambda^\alpha = \prod_{j=1}^d \lambda_j^{2\alpha_j+1}, \quad \omega_\alpha(\lambda) = \prod_{j=1}^d \omega_{\alpha_j}(\lambda_j), \quad 0 < \delta \leq \min\Big\{\frac{1}{4a_1}, \ldots, \frac{1}{4a_d}, \lambda_{11}(\tau_1), \ldots, \lambda_{d1}(\tau_1)\Big\}.$$

Имеем

$$s(\lambda) \asymp \lambda^\alpha, \quad \omega_\alpha(\lambda) \asymp \lambda^\alpha \quad (\lambda_j \geq \delta), \quad \omega_\alpha(\lambda) \lesssim \lambda^\alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+^d), \tag{4.8}$$
$$f(\lambda)\omega_\alpha(\lambda) \in E^{a_1+2,\ldots,a_d+2} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\lambda).$$

При выполнении условий (4.6) [11, лемма 1]

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d} |f(\lambda_k(\tau))|\, \omega_\alpha(\lambda_k(\tau)) \lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, \omega_\alpha(\lambda)\, d\lambda.$$

Отсюда и из (4.8), леммы 6

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau))|f(\lambda_k(\tau))| \lesssim \sum_{k\in\mathbb{N}^d} |f(\lambda_k(\tau))|\, \omega_\alpha(\lambda_k(\tau)) \lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, \omega_\alpha(\lambda)\, d\lambda$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, \lambda^\alpha\, d\lambda \lesssim \int_{(V_\delta)^c} |f(\lambda)|\, \lambda^\alpha\, d\lambda \lesssim \int_{(V_\delta)^c} |f(\lambda)|\, d\sigma(\lambda) \lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, d\sigma(\lambda).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть a, τ, $\gamma > 0$, $0 < \delta \leq 1/(4\tau)$, $L > 0$, весовая функция $s(\lambda) \asymp \lambda^a$ $(\lambda \geq \delta)$, для положительной возрастающей последовательности $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ выполнены условия*

$$\beta_1 \geq \delta, \quad \beta_{n+1} - \beta_n \geq \gamma, \quad \Big|\beta_n - \frac{\pi n}{a}\Big| \leq L.$$

Если $\tau < a$ и $f \in E^\tau \cap L^1(\mathbb{R}_+, s(\lambda)d\lambda)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| s(\lambda)\, d\lambda \lesssim \sum_{n=1}^\infty s(\beta_n)|f(\beta_n)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При указанных условиях на последовательность $\{\beta_n\}$ для функции $f \in E^\tau$, $\tau < a$, в [11, теорема 2] доказано неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| \lambda^a\, d\lambda \lesssim \sum_{n=1}^\infty \beta_n^a |f(\beta_n)|.$$

Применяя лемму 5, получим

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| s(\lambda)\, d\lambda \lesssim \int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| \lambda^a\, d\lambda \lesssim \sum_{n=1}^\infty \beta_n^a |f(\beta_n)| \lesssim \sum_{n=1}^\infty s(\beta_n)|f(\beta_n)|.$$

Лемма доказана.

Для одномерных весов $s_j(\lambda_j)$, определенных в (1.4), и функций $f \in E^{2\tau_j} \cap L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma_j)$ справедливы квадратурные формулы Гаусса [9, теорема 3.1]

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\lambda_j)\, d\sigma_j(\lambda_j) = \sum_{k_j=1}^{\infty} \gamma_{k_j}(\tau_j) f(\lambda_{jk_j}(\tau_j)), \tag{4.9}$$

где узлы $\lambda_{jk_j}(\tau_j)$ — положительные нули собственной функции $\varphi(\tau_j, \lambda_j)$, веса $\gamma_{k_j}(\tau_j) > 0$,

$$\gamma_{k_j}(\tau_j) \asymp k_j^{2\alpha_j+1} \quad (k_j \to \infty), \tag{4.10}$$

а ряд (4.9) сходится абсолютно.

Нам необходим многомерный вариант квадратурной формулы Гаусса (4.9). Пусть

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d),\ \tau_j > 0, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d,$$

$$\lambda_k(\tau) = (\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{dk_d}(\tau_d)), \quad \gamma_k(\tau) = \prod_{j=1}^{d} \gamma_{jk_j}(\tau_j) > 0.$$

Лемма 9. *Если* $f \in E^{2\tau} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)), \tag{4.11}$$

причем ряд (4.11) *сходится абсолютно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (4.10), (4.8), (4.7)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau) |f(\lambda_k(\tau))| \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau)) |f(\lambda_k(\tau))| \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, d\sigma(\lambda).$$

Остается доказать равенство (4.11). Применим индукцию по d. При $d = 1$ (4.11) совпадает с (4.9). По теореме Фубини для почти всех $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$ существует интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{d-1}} |f(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)| \prod_{j=1}^{d-1} s_j(\lambda_j)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_{d-1},$$

поэтому по индуктивному предположению для почти всех $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{d-1}} f(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} s_j(\lambda_j)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_{d-1}$$

$$= \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{N} \\ 1 \le j \le d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d), \tag{4.12}$$

причем для почти всех λ_d ряд (4.12) сходится абсолютно. Предположим, что ряд (4.12) можно почленно проинтегрировать. Тогда согласно (4.9) получим (4.11):

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda) s(\lambda)\, d\lambda = \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{N} \\ 1 \le j \le d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d) s_d(\lambda_d)\, d\lambda_d$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)).$$

Для возможности почленного интегрирования достаточно показать, что функция

$$g(\lambda_d) = \sum_{\substack{k_j\in\mathbb{N}\\ 1\le j\le d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d)| \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma_d). \tag{4.13}$$

Функция $f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d)$ имеет тип τ_d по переменной λ_d. Если $a_d > \tau_d$, то согласно лемме 8

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d)| s_d(\lambda_d)\, d\lambda_d$$

$$\lesssim \sum_{k_d\in\mathbb{N}} s_d(\lambda_{dk_d}(a_d)) |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_{dk_d}(a_d))|. \tag{4.14}$$

Если $\tau' = (\tau_1, \dots, \tau_{d-1}, a_d)$, то из (4.13), (4.14) $\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda_d)| s_d(\lambda_d)\, d\lambda_d \lesssim \sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} s(\lambda_k(\tau')) |f(\lambda_k(\tau'))|$.
Так как $f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, то в силу леммы 7 последний ряд сходится. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если $r > 0$, норма $|(x_1, \dots, x_d)|_V$ — функция, четная по каждой переменной, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, Π_a — параллелепипед* (1.8), *$\tau_{r,a}^V$ — единственное решение уравнения*

$$|(\lambda_{11}(a_1\tau), \dots, \lambda_{d1}(a_d\tau))|_V = r,$$

то

$$\tau(rV, \Pi_a)_{2,\mu} \ge 2\tau_{r,a}^V.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\tau_{r,a}^V = \tau_r$. Предположим, что $\tau(rV, \Pi_a)_{2,\mu} < 2\tau' < 2\tau_r$. Согласно леммам 2, 3 существует функция $f^* \in K(2\tau'\Pi_a)$, обладающая свойствами

$$f^* \in L^1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma), \quad \mathcal{F}^{-1} f^*(0) \ge 0, \quad f^*(\lambda) \le 0,\ |\lambda|_V \ge r, \quad f^*(0) > 0. \tag{4.15}$$

Из свойств нулей собственных функций $\varphi_j(t_j, \lambda_j)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ параллелепипеды

$$\Pi_{k,\varepsilon} = \prod_{j=1}^{d} [\lambda_{jk_j}(a_j(\tau' + \varepsilon)), \lambda_{jk_j}(a_j\tau')] \subset (rV)^c.$$

Если $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \prod_{j=1}^d [a_j\tau', a_j(\tau' + \varepsilon)]$, то $f^* \in E^{2\tau_1, \dots, 2\tau_d} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$ и, применяя (4.15), лемму 9, получим

$$0 \le J^{-1} f^*(0) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f^*(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau) f^*(\lambda_k(\tau)) \le 0.$$

Следовательно, на параллелепипедах $\Pi_{k,\varepsilon}$ функция $f^*(\lambda) = 0$, поэтому $f^*(\lambda) \equiv 0$. Это противоречит условию $f^*(0) > 0$ (см. (4.15)). Лемма доказана.

Из леммы 10 и (4.2) вытекает теорема 2.

Заключение

В работе получены достаточно общие результаты. Тем не менее было бы интересно усилить их в двух направлениях. Лемма 10 показывает, что нижние оценки оптимального аргумента получены в гораздо более общей ситуации, чем верхние оценки. Было бы интересно предложить новые подходы к построению целых функций $f \in K(\tau U)$, для которых $f(\lambda) \le 0$ при $\lambda \in (rV)^c$. Также интересно результаты работы распространить на случай пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ с весом

$$w(x) = \prod_{j=1}^{d} w_j(|x_j|), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Для этого необходимо собственную функцию $\varphi(t, \lambda)$ с $\mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^d_+$ продолжить на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ и, основываясь на этом продолжении, построить гармонический анализ в пространствах $L^1(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ с весом $w(x)$. На самом деле достаточно продолжить одномерные собственные функции $\varphi_j(t_j, \lambda_j)$, $j = 1, \dots, d$, с $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Такие продолжения для степенного и гиперболического весов известны (см. [5; 6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: Proc. Intern. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
3. **Бердышева Е.Е.** Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Мат. заметки. 1999. Т. 66, №3. С. 336–350.
4. **Горбачев Д.В.** Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, №2. С. 179–187.
5. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, №3. С. 338–348.
6. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A.** Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, no. 5. P. 904–913.
7. **Вепринцев Р.А.** Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби // Мат. заметки. 2015. Т. 97, №6. С. 815–831.
8. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2016. Т. 100, №4. С. 519–530.
9. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Мат. сб. 2015. Т. 206, №8. С. 63–98.
10. **Арестов В.В., Попов В.Ю.** Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Изв. вузов. Математика. 1995. №8. С. 13–20.
11. **Иванов В.И., Юнпин Лю, Смирнов О.И.** О некоторых классах целых функций экспоненциального типа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 70–80.

Поступила 30.07.2016

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук
профессор, зав. кафедрой
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Вепринцев Роман Андреевич
канд. физ.-мат. наук
Тульский государственный университет
e-mail: veprintsevroma@gmail.com

REFERENCES

1. Chernykh N.I. Jackson's inequality in L_2. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 75–78.
2. Arestov V.V., Chernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials. *Approximation and functions spaces*: *Proc. Intern. Conf., Gdansk, 1979*, Amsterdam: North-Holland, 1981, pp. 25–43.
3. Berdysheva E.E. Two related extremal problems for entire functions of several variables. *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 3, pp. 271–282.
4. Gorbachev D.V. Extremum problems for entire functions of exponential spherical type. *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 2, pp. 159–166.
5. Ivanov A.V., Ivanov V.I. Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 320–329.
6. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A. Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5, pp. 904–913.
7. Veprintsev R.A. Approximation of the multidimensional Jacobi transform in L_2 by partial integrals. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 831–845.
8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Approximation in L_2 by fractional integrals of the Fourier transform in eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem. *Mat. Zametki*, 2016, vol. 100, no. 4, pp. 519–530 (in Russian).
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 7-8, pp. 1087–1122.
10. Arestov V.V., Popov V.Yu. Jackson inequalities on a sphere in L_2. *Russian Math.* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1995, vol. 39, no. 8, pp. 11–18.
11. Ivanov V.I., Smirnov O.I., Liu Yongping. On some classes of entire functions of exponential type in $L_p(\mathbb{R}^d)$-spaces with power weight. *Izv. Tula State University. Natural Sciences*, 2011, iss. 2, pp. 70–80 (in Russian).

D. V. Gorbachev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: e-mail: dvgmail@mail.ru .

V. I. Ivanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: ivaleryi@mail.ru .

R. A. Veprintsev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: e-mail: veprintsevroma@gmail.com .