ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА БОМАНА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЯКОБИ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Приводится решение экстремальной задачи Бомана для неотрицательных четных целых функций экспоненциального типа, являющихся преобразованиями Якоби функций с компактным носителем. Доказывается единственность экстремальной функции. Используется квадратурная формула Гаусса на полупрямой по нулям функции Якоби.

Гиперболический вес, функция Якоби, преобразование Якоби, экстремальная задача Бомана, квадратурная формула Гаусса.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. Bohman extremal problem for the Jacobi transform.

We give a solution to the Bohman extremal problem for nonnegative even entire functions of exponential type that are Jacobi transforms of compactly supported functions. We prove that the extremal function is unique. The Gauss quadrature formula on the half-line over zeros of the Jacobi function is used.

Keywords: hyperbolic weight, Jacobi function, Jacobi transform, Bohman extremal problem, Gauss quadrature formulae.

MSC: 33C45, 42A05, 41A55

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-126-135

Введение

Работа посвящена решению экстремальной задачи Бомана для преобразования Якоби на полупрямой (теоремы 4, 5). Ранее задача Бомана изучалась для преобразований Фурье, Ганкеля [1; 2] и Данкля [3]. Кратко напомним историю вопроса.

Для преобразования Фурье экстремальная задача Бомана в случае евклидова шара состоит в вычислении величины

$$\Lambda_B(B_\tau)=\inf\Big\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,dx\colon\, f\in\mathcal{E}(B_\tau)\Big\}. \tag{0.1}$$

Здесь $d\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_dy_d$ и нормой $|x|=\sqrt{(x,x)}$; B_τ — замкнутый евклидов шар радиуса $\tau>0$ и с центром в нуле; $\mathcal{E}(B_\tau)$ — класс неотрицательных непрерывных функций f, для которых

$$|x|^2f\in L^1(\mathbb{R}^d),\quad \operatorname{supp}\mathcal{F}f\subset B_\tau,\quad \mathcal{F}f(0)=1,$$

где $L^1(\mathbb{R}^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой $\|f\|_1=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx$;

$$\mathcal{F}f(y)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-i(x,y)}\,dx$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00308), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К).

— преобразование Фурье; $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f. По хорошо известной многомерной теореме Пэли — Винера функции из $\mathcal{E}(B_\tau)$ являются сужениями на $\mathbb{R}^d$ целых функций экспоненциального сферического типа не выше τ.

Задача Бомана допускает вероятностную интерпретацию. В этом случае величина

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,dx = -\Delta\mathcal{F}f(0),$$

где Δ — оператор Лапласа, является вторым моментом случайной величины с плотностью распределения f.

В евклидовом случае $\Lambda_B(B_\tau) = \tau^{-2}\Lambda_B(B_1)$, поэтому можно считать, что $\tau = 1$. В одномерном случае задачу (0.1) поставил и решил Х. Боман [4]. Он доказал, что $\Lambda_B([-1,1]) = -(\mathcal{F}f_1)''(0) = \pi^2$, где

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi^3}\Big(\frac{\cos(x/2)}{1-(x/\pi)^2}\Big)^2, \quad \mathcal{F}f_1(y) = \begin{cases}(1-|y|)\cos\pi y + \pi^{-1}\sin\pi|y|, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|\ge 1.\end{cases}$$

Пусть $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя порядка $\alpha \ge -1/2$, q_α — ее первый (наименьший) положительный нуль, $j_\alpha(t) = (2/t)^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(t)$ — нормированная функция Бесселя. В многомерном случае В. Эм, Т. Гнейтинг и Д. Ричардс [5], доказали, что $\Lambda_B(B_1) = -\Delta\mathcal{F}f_d(0) = 4q_{d/2-1}^2$, где экстремальной является функция

$$f_d(x) = \frac{2^{2-2d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)q_{d/2-1}^2}\left(\frac{j_{d/2-1}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{d/2-1}))^2}\right)^2.$$

Задача Бомана для функций с носителем преобразования Данкля в евклидовом шаре или параллелепипеде рассмотрена в [3]. В сферическом случае соответствующая величина $\Lambda_B(B_1)$ достигается на радиальных функциях.

На радиальных функциях преобразование Данкля сводится к преобразованию Ганкеля, действующему в пространствах на полупрямой со степенным весом. Поэтому для решения задачи Бомана для преобразований Фурье и Данкля было важно изучить ее для преобразования Ганкеля. Для нас также важно, что этот случай будет модельным для преобразования Якоби на полупрямой.

Задача Бомана для преобразования Ганкеля состоит в вычислении величины

$$\Lambda_B^\alpha(\tau) = \inf\Bigg\{\int\limits_0^\infty t^2 f(t)\,d\nu_\alpha(t)\colon f\in\mathcal{E}_\alpha(\tau)\Bigg\}.$$

Здесь $\alpha \ge -1/2$, $d\nu_\alpha(r) = b_\lambda r^{2\alpha+1}\,dr$, $b_\alpha^{-1} = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)$, $\mathcal{E}_\alpha(\tau)$ — класс четных неотрицательных непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций f, для которых

$$t^2 f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha), \quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(f) \subset [0,\tau], \quad \mathcal{H}_\alpha(f)(0) = 1,$$

где $L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{1,\alpha} = \int_0^\infty |f(t)|\,d\nu_\alpha(t)$;

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(s) = \int\limits_0^\infty f(t)j_\alpha(st)\,d\nu_\alpha(t)$$

— преобразование Ганкеля. Для четных функций на оси преобразования Ганкеля и Данкля совпадают. Поэтому по теореме Пэли — Винера для преобразования Данкля [6, Sect. 4] функции из $\mathcal{E}_\alpha(\tau)$ являются сужениями на $\mathbb{R}$ четных целых функций экспоненциального типа не выше τ.

В [1] доказано, что

$$\Lambda_B^\alpha(\tau) = -D_\alpha \mathcal{H}_\alpha(f_\alpha)(0) = \Big(\frac{2q_\alpha}{\tau}\Big)^2,$$

где $D_\alpha = \dfrac{1}{t^{2\alpha+1}}\dfrac{d}{dt}\Big(t^{2\alpha+1}\dfrac{d}{dt}\Big)$ — дифференциальный оператор Бесселя. Единственная экстремальная функция имеет вид

$$f_{\alpha,\tau}(t) = \frac{2^{-4\alpha-2}\tau^{2\alpha+2}}{\pi^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)q_\alpha^2}\Big(\frac{j_\alpha(\tau t/2)}{1-(\tau t/(2q_\alpha))^2}\Big)^2.$$

В данной работе решается экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби [7], ядро которого является собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля с весовой функцией

$$w(t) = \Delta(t) = 2^{2\rho}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с параметрами

$$\alpha \ge \beta \ge -1/2, \quad \alpha > -1/2, \quad \rho = \alpha+\beta+1. \tag{0.2}$$

Заметим, что в случае $\alpha = \beta = -1/2$ имеем $\Delta(t) = 1$ и преобразование Якоби сводится к косинус-преобразованию Фурье.

1. Элементы гармонического анализа Якоби

При изложении элементов гармонического анализа Якоби будем следовать общепризнанным обозначениям (см., например, работу [7]). Пусть $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, α, β, ρ — параметры (0.2), $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{\rho+i\lambda}{2}, \frac{\rho-i\lambda}{2}; \alpha+1; -(\operatorname{sh} t)^2\Big)$$

— функция Якоби [7, Subsect. 2.1], E^τ — класс четных целых функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа не выше $\tau > 0$, удовлетворяющих оценке $|g(\lambda)| \le c_g\, e^{\tau|\operatorname{Im}\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Функция Якоби является собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_\lambda(t)\Big) + \big(\lambda^2+\rho^2\big)\Delta(t)\varphi_\lambda(t) = 0, \tag{1.1}$$

$$\varphi_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial t}\,(0) = 0.$$

Функция Якоби четная аналитическая на $\mathbb{R}$ по t и из класса $E^{|t|}$ по λ. Для нее также

$$|\varphi_\lambda(t)| \le 1, \quad \varphi_0(t) > 0, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Для $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_0(t)\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)}\Big),$$

где $0 < \lambda_1(t) < \dots < \lambda_k(t) < \dots$ — положительные нули $\varphi_\lambda(t)$ по λ. Это разложение следует из общих свойств собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (см., например, [8, гл. V, § 6]). При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ — положительные нули функции $\varphi_\lambda(t)$ по $t > 0$. Нули $t_k(\lambda)$ непрерывны и монотонно убывают при $\lambda > 0$ [8, гл. I, § 3]. Соответствующим образом ведут себя и нули $\lambda_k(t)$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $d\mu(t) = \Delta(t)\,dt$, $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \Big(\int_0^\infty |f(t)|^p\,d\mu(t)\Big)^{1/p} < \infty,$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\sigma} = \left(\int\limits_0^\infty |f(\lambda)|^p \, d\sigma(\lambda)\right)^{1/p} < \infty,$$

где

$$d\sigma(\lambda) = s(\lambda)\, d\lambda, \quad s(\lambda) = (2\pi)^{-1}\left|\frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)}\right|^{-2},$$

$C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Функции на $\mathbb{R}_+$ будем рассматривать и на $\mathbb{R}$, продолжая их по четности.

Пространство $L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g)_\mu = \int\limits_0^\infty f(t)\overline{g(t)}\, d\mu(t).$$

Гармонический анализ в $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Якоби [7, Subsect. 2.2] $\mathcal{J}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\varphi_\lambda(t)\, d\mu(t)$, $\mathcal{J}^{-1}g(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda(t)\, d\sigma(\lambda)$. В частности, если $f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то $\mathcal{J}f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, $\mathcal{J}^{-1}(g) \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и $f(t) = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}f)(t)$, $g(\lambda) = \mathcal{J}(\mathcal{J}^{-1}g)(\lambda)$ в среднеквадратичном смысле. При этом справедливы равенства Парсеваля

$$\int\limits_0^\infty |f(t)|^2\, d\mu(t) = \int\limits_0^\infty |\mathcal{J}f(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda), \quad \int\limits_0^\infty |g(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \int\limits_0^\infty |\mathcal{J}^{-1}g(t)|^2\, d\mu(t).$$

Отметим следующие свойства интегрируемости прямого и обратного преобразований Якоби. Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то $\mathcal{J}f \in C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{J}^{-1}g \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|\mathcal{J}f\|_\infty \le \|f\|_{1,d\mu}, \quad \|\mathcal{J}^{-1}g\|_\infty \le \|g\|_{1,d\sigma}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{J}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то для $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t) = \int\limits_0^\infty \mathcal{J}f(\lambda)\varphi_\lambda(t)\, d\sigma(\lambda).$$

Если $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{J}^{-1}g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то для $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$g(\lambda) = \int\limits_0^\infty \mathcal{J}^{-1}g(t)\varphi_\lambda(t)\, d\mu(t).$$

Пусть $\tau > 0$, B_1^τ — класс четных целых функций из E^τ, сужения которых на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Для функций из класса B_1^τ справедлива следующая теорема Пэли — Винера.

Теорема 1 [9, Theorems 3.4, 4.2]. *Функция $f \in B_1^\tau$ тогда и только тогда, когда*

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{J}^{-1}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad \operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1}f \subset [0, \tau],$$

при этом $f(\lambda) = \int_0^\tau \mathcal{J}^{-1}f(t)\varphi_\lambda(t)\, d\mu(t)$.

Заметим, что в [9] доказана биекция между классами быстро убывающих функций $H \subset B_1(\tau)$ и бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty \subset L^1([0,\tau], d\mu)$ с компактным носителем. Однако классы H и C_0^∞ в силу приведенных выше свойств интегрируемости преобразований Якоби плотны в соответствующих пространствах. Условие на размер носителя вытекает из того, что функция $\lambda \mapsto \varphi(t,\lambda)$ имеет тип $|t|$.

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики функции Якоби и сингулярной меры, а также квадратурная формула Гаусса на полупрямой для целых функций экспоненциального типа по нулям функции Якоби [10, § 5]. Имеем

$$\varphi_\lambda(t) = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(\Delta(t)s(\lambda))^{1/2}}\Big\{\cos\Big(\lambda t - \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2}\Big) + e^{t|\operatorname{Im}\lambda|}O\big(|\lambda|^{-1}\big)\Big\}, \quad |\lambda| \to \infty, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$s(\lambda) = \big(2^{\rho+\alpha}\Gamma(\alpha+1)\big)^{-2}\lambda^{2\alpha+1}\left(1 + O(\lambda^{-1})\right), \quad \lambda \to +\infty. \tag{1.4}$$

Из (1.2)–(1.4) вытекает, что для фиксированного $t > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_\lambda(t)| = O\Big(\frac{1}{(|\lambda|+1)^{\alpha+1/2}}\Big). \tag{1.5}$$

Теорема 2 [10, теоремы 3.1, 5.1]. *Для произвольной функции $f \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами*

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)f(\lambda_k(\tau/2)). \tag{1.6}$$

Ряд в (1.6) *сходится абсолютно. При этом для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции из $B_1^{\tau+\varepsilon}$, для которых квадратурная формула Гаусса неверна.*

Явные выражения для весов в квадратурной формуле (1.6) выписаны в [10, § 3]. Приведем формулу для первого коэффициента:

$$\gamma_1 = \int_0^\infty \left(\frac{2\lambda_1\varphi_\lambda(\tau/2)}{\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial\lambda}(\tau/2)(\lambda^2-\lambda_1^2)}\right)^2 d\sigma(\lambda) = \frac{2\lambda_1}{\Delta(\tau/2)\,\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(\tau/2)\,\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial\lambda}(\tau/2)}, \tag{1.7}$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$.

Для построения экстремальной функции в задаче Бомана нам потребуются оператор обобщенного сдвига для преобразования Якоби и определяемая им свертка.

В силу (1.2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ оператор обобщенного сдвига определяется равенством

$$T^t f(x) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(t)\mathcal{J}f(\lambda)\varphi_\lambda(x)\,d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+.$$

Для него справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_0^\infty f(y)\,d\nu_{t,x}(y), \tag{1.8}$$

где $\nu_{t,x}$ — вероятностная, абсолютно непрерывная мера с носителем $\operatorname{supp}\nu_{t,x} \subset [|x-t|, x+t]$, симметричная относительно t, x. Представление (1.8) и явное выражение для меры вытекают из формулы умножения для функций Якоби $\varphi_\lambda(t)\varphi_\lambda(x) = \int_{|t-x|}^{t+x} K(t,x,y)\varphi_\lambda(y)\,d\mu(y)$ с положительным ядром K. Выражение K через гипергеометрическую функцию и основные свойства см. в [11, Sect. 4].

Представление (1.8) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \le p \le \infty$, причем для любого $t \in \mathbb{R}_+$ норма $\|T^t\|_{p\to p} = 1$ [11, Lemma 5.2].

Для оператора обобщенного сдвига справедливы свойства:

(1) если $f(x) \ge 0$, то $T^t f(x) \ge 0$; функция $T^t f(x)$ четная по t, x;

(2) $T^t\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(t)\varphi_\lambda(x)$, $\mathcal{J}(T^t f)(\lambda) = \varphi_\lambda(t)\mathcal{J}f(\lambda)$; $T^t f(x) = T^x f(t)$, $T^t 1 = 1$;

(3) если $\operatorname{supp} f \subset [0, a]$, $t \in [0, \delta]$, то $\operatorname{supp} T^t f \subset [0, a+\delta]$;

(4) если $f \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, то $\displaystyle\int\limits_0^\infty T^t f(x)\, d\mu(x) = \int\limits_0^\infty f(x)\, d\mu(x)$.

Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку [11]

$$(f * g)(x) = \int\limits_0^\infty T^t f(x) g(t)\, d\mu(t).$$

Ее свойства описываются в следующей теореме.

Теорема 3 [11, Sect. 5]. (1) *Если* $1 \le p, q < \infty$, $1/p + 1/q \ge 1$, $1/r = 1/p + 1/q - 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+, d\mu)$, *то* $f * g \in L^r(\mathbb{R}_+, d\mu)$ *и* $\|f * g\|_{r,d\mu} \le \|f\|_{p,d\mu}\|g\|_{q,d\mu}$.

(2) *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \le p \le 2$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, *то* $\mathcal{J}(f * g) = \mathcal{J}f\, \mathcal{J}g$.

(3) *Если* $\operatorname{supp} f \subset [0, \delta]$, $\operatorname{supp} g \subset [0, \tau]$, *то* $\operatorname{supp} f * g \subset [0, \delta + \tau]$.

2. Задача Бомана

З а д а ч а Бомана. Вычислить величину

$$\Lambda_B(\tau) = \inf \int\limits_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda), \tag{2.1}$$

если

$$\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma), \quad g \in C(\mathbb{R}_+), \quad g \ge 0,$$
$$\operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1} g \subset [0, \tau], \qquad \int\limits_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \mathcal{J}^{-1} g(0) = 1.$$

Заметим, что в постановке задачи можно не требовать априори условие $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Если оно неверно, то $\int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = +\infty$ и мы можем отбросить такие g при поиске нижней грани в (2.1).

Так как в силу неотрицательности допустимая в задаче Бомана функция $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, то по теореме 1 имеем $g \in B_1^\tau$. Пусть

$$D_{\alpha,\beta} u(t) = -\frac{1}{\Delta(t)} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta(t) \frac{\partial}{\partial t} u(t)\Big)$$

— дифференциальный оператор Якоби. Согласно (1.1)

$$D_{\alpha,\beta}\varphi_\lambda(t) = (\lambda^2 + \rho^2)\varphi_\lambda(t),$$

поэтому функционал в (2.1) может быть записан так:

$$\int\limits_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = D_{\alpha,\beta}\mathcal{J}^{-1} g(0).$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$, $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\tau > 0$. Тогда в задаче Бомана*

$$\Lambda_B(\tau) = \lambda_1^2 + \rho^2, \tag{2.2}$$

экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{1}{c(\tau)}\left(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\right)^2, \tag{2.3}$$

где

$$c(\tau) = \gamma_1 \lim_{\lambda\to\lambda_1}\left(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\right)^2 = \frac{\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial\lambda}(\tau/2)}{2\lambda_1\Delta(\tau/2)\,\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(\tau/2)}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала получим оценку снизу. Для этого воспользуемся теоремой 2. Так как для допустимой функции g, $\lambda^2 g \in B_1^\tau$, то, применяя квадратурную формулу Гаусса (1.6), получим

$$\int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)\big(\lambda_k^2(\tau/2)+\rho^2\big)g(\lambda_k(\tau/2)) \ge \big(\lambda_1^2+\rho^2\big)\sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2))$$

$$= \big(\lambda_1^2+\rho^2\big)\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \big(\lambda_1^2+\rho^2\big)\mathcal{J}^{-1}g(0) = \lambda_1^2+\rho^2, \tag{2.5}$$

поэтому $\Lambda_B(\tau) \ge \lambda_1^2+\rho^2$. Оценка снизу получена.

Построим экстремальную функцию. Пусть $\chi_{\tau/2}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau/2]$. Определим функции $f_1(t) = \varphi_{\lambda_1}(t)\chi_{\tau/2}(t)$, $f(t) = (f_1 * f_1)(t)$. Имеем

$$f_1(t) \ge 0, \quad \operatorname{supp} f_1 \subset [0,\tau/2], \quad f_1 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{J}f_1 \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma).$$

В силу положительности оператора обобщенного сдвига и теоремы 3

$$f(t)\ge 0, \quad \operatorname{supp} f \subset [0,\tau/2], \quad g(\lambda) = \mathcal{J}f(\lambda) = \big(\mathcal{J}f_1(\lambda)\big)^2 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+).$$

Согласно (1.1) $\Big\{\Delta(t)\big(\varphi_{\lambda_1}(t)\varphi_\lambda'(t) - \varphi_{\lambda_1}'(t)\varphi_\lambda(t)\big)\Big\}_t' = \big(\lambda_1^2-\lambda^2\big)\Delta(t)\varphi_{\lambda_1}(t)\varphi_\lambda(t)$, поэтому

$$\mathcal{J}f_1(\lambda) = \int_0^{\tau/2} \Delta(t)\varphi_{\lambda_1}(t)\varphi_\lambda(t)\,dt = -\frac{\Delta(\tau/2)\varphi_{\lambda_1}'(\tau/2)\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$g(\lambda) = \frac{\big(\Delta(\tau/2)\varphi_{\lambda_1}'(\tau/2)\big)^2\varphi_\lambda^2(\tau/2)}{\big(\lambda_1^2-\lambda^2\big)^2}.$$

Согласно (1.4), (1.5) $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Применяя (1.6), получим

$$\mathcal{J}^{-1}g(0) = \int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2)) = \gamma_1\big(\Delta(\tau/2)\varphi_{\lambda_1}'(\tau/2)\big)^2 \lim_{\lambda\to\lambda_1}\Big(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Big)^2.$$

Функция (2.3)

$$g_\tau(\lambda) = \frac{1}{c(\tau)}\Big(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Big)^2, \quad c(\tau) = \gamma_1\lim_{\lambda\to\lambda_1}\Big(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Big)^2,$$

является допустимой в задаче Бомана, и по квадратурной формуле Гаусса (1.6)

$$\Lambda_B(\tau) \geq \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2) g_\tau(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)\big(\lambda_k^2(\tau/2)+\rho^2\big) g_\tau(\lambda_k(\tau/2))$$

$$= \gamma_1\big(\lambda_1^2+\rho^2\big) g_\tau(\lambda_1) = \lambda_1^2+\rho^2.$$

Равенство (2.2) доказано.

Функция (2.3) является экстремальной. Отметим, что она и ее обратное преобразование Якоби неотрицательны.

Равенство

$$c(\tau) = \frac{\dfrac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial \lambda}(\tau/2)}{2\lambda_1 \Delta(\tau/2)\, \dfrac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(\tau/2)}$$

в (2.4) следует из (1.7).

Теорема 4 доказана.

3. Единственность экстремальной функции

Сформулируем второй основной результат работы.

Теорема 5. *Экстремальная функция* g_τ (2.3) *в задаче Бомана* (2.1) *единственна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть g — экстремальная функция в задаче Бомана (2.3).

По лемме 5.4 из [12] существует четная целая функция $\omega(z)$ экспоненциального типа 2, для которой $\omega(x)>0$, $x>0$, и

$$\omega(x) \asymp x^{2\alpha+1}, \quad x\to+\infty, \qquad |\omega(iy)| \asymp |y|^{2\alpha+1} e^{2|y|}, \quad y\to\pm\infty. \tag{3.1}$$

Так как g обращает неравенство (2.5) в равенство, то в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k\geq 2$, она имеет двойные нули. Рассмотрим функции

$$F(\lambda)=\omega(\lambda) g(\lambda), \quad \Omega(\lambda)=\omega(\lambda) g_\tau(\lambda).$$

В силу асимптотик (1.3), (1.4) и (3.1) $|\Omega(iy)| \asymp |y|^{-4} e^{(\tau+2)|y|}$, $y\to\pm\infty$.

Далее воспользуемся следующим результатом [13, прил. VII, лемма Ахиезера]. Пусть $m\in \mathbb{Z}_+$, F — четная целая функция экспоненциального типа $\tau>0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω — четная целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F, индикатор $h_\Omega(0)=h_\Omega(\pi)$ и $\liminf_{y\to\pm\infty} e^{-\tau|y|} y^{2m} |\Omega(iy)|>0$. Тогда функция

$$\psi(z)=\frac{F(z)}{\Omega(z)}$$

есть многочлен степени не больше $2m$.

Применяя это утверждение, находим, что $g(\lambda)=\psi(\lambda) g_\tau(\lambda)$, где ψ — четный многочлен степени не выше 4. Его степень не может равняться 2 или 4, иначе по асимптотикам (1.3), (1.4) будем иметь $\lambda^2 g \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $\psi(\lambda)=\mathrm{const}=1$ и $g(\lambda)=g_\tau(\lambda)$.

Теорема 5 доказана.

Заключение

Решение задачи Бомана для преобразования Якоби позволит в дальнейшем решить задачу Бомана для преобразования Фурье на гиперболоиде или на пространстве Лобачевского. Было бы интересно получить решение задачи Бомана для преобразования Фурье на произвольном римановом симметрическом пространстве ранга 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье — Ганкеля // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
2. **Gorbachev D. V.** Multidimensional extremal Logan's and Bohman's problems // Methods of Fourier analysis and approximation / eds. M. Ruzhansky and S. Tikhonov. Basel: Springer Internat. Publ., 2016. P. 43–58. (Applied and Numerical Harmonic Analysis.)
3. **Gorbachev D., Ivanov V.** Extremal Bohman's problem for Dunkl transform // 5th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields: Book of Abstracts. Budapest: MTA Renyi Institute, 2015. P. 6.
4. **Bohman H.** Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1961. Vol. 4, no. 2. P. 99–157.
5. **Bohman W., Gneiting T., Richards D.** Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
6. **Jeu M. de** Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358, no. 10. P. 4225–4250.
7. **Koornwinder T. H.** Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // Special functions: Group theoretical aspects and applications / eds. R. A. Askey, T. H. Koornwinder and W. Schempp. Dordrecht: Reidel, 1984. P. 1–85.
8. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
9. **Koornwinder T. H.** A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform // Ark. Mat. 1979. Vol. 13, no. 1. P. 145–159.
10. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.
11. **Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H.** The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11, no. 1. P. 245–262.
12. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A.** Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, no. 5. P. 904–913.
13. **Левин Б.Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Поступила 30.07.2016

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

REFERENCES

1. Gorbachev D. V. Bohman extremal problem for the Fourier–Hankel transform. *Izv. TulGU. Estestv. nauki*, 2014, iss. 4, pp. 5–10 (in Russian).
2. Gorbachev D. V. Multidimensional extremal Logan's and Bohman's problems *Methods of Fourier analysis and approximation*, eds. M. Ruzhansky and S. Tikhonov, Basel: Springer Internat. Publ., 2016, Ser. Applied and Numerical Harmonic Analysis, pp. 43–58.
3. Gorbachev D., Ivanov V. Extremal Bohman's problem for Dunkl transform. *5th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields: Book of Abstr.*, Budapest: MTA Renyi Institute, 2015, p. 6.
4. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions. *Ark. Mat.*, 1961, vol. 4, no. 2, pp. 99–157.
5. Bohman W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 356, pp. 4655–4685.

6. Jeu M. de Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2006, vol. 358, no. 10, pp. 4225–4250.
7. Koornwinder T. H. Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups. *Special functions: Group theoretical aspects and applications*, eds. R. A. Askey, T. H. Koornwinder and W. Schempp, Dordrecht: Reidel, 1984, pp. 1–85.
8. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* (Sturm–Liouville and Dirac operators). Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991, Ser. Math. Its Appl., 350 p.
9. Koornwinder T. H. A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform. *Ark. Mat.*, 1979, vol. 13, no. 1, pp. 145–159.
10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1087–1122.
11. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions. *Ark. Mat.*, 1973, Vol. 11, no. 1, pp. 245–262.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5, pp. 904–913.
13. Англ. пер.: Levin B. Ya. *Raspredelenie kornej celyh funkcij* (Distribution of zeros of entire functions). New York: Amer. Math. Soc., 1964, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 5, 523 p.

D. V. Gorbachev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: e-mail:dvgmail@mail.ru .

V. I. Ivanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: ivaleryi@mail.ru .