ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.65

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ[1]

Ю. С. Волков

Изучается общая задача интерполяции полиномиальными сплайнами, рассматривается их построение через коэффициенты разложения какой-либо производной по B-сплайнам. Анализируются свойства получаемых систем уравнений, оценивается погрешность интерполяции.

Ключевые слова: полиномиальные сплайны, интерполяция, алгоритмы построения.

Yu. S. Volkov. The general problem of polynomial spline interpolation.

We study the general problem of interpolation by polynomial splines and consider the construction of such splines using the coefficients of expansion of a certain derivative in B-splines. We analyze the properties of the obtained systems of equations and estimate the interpolation error.

Keywords: polynomial splines, interpolation, construction algorithms.

MSC: 65D07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-114-125

Введение

Рассматривается общая задача полиномиальной сплайн-интерполяции. Имеем сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ отрезка $[a, b]$, в узлах известны значения некоторой функции. Требуется построить полиномиальный сплайн $s(x)$ степени n наименьшего дефекта 1 (называемый *простым* по терминологии [1]), т. е. гладкости $n-1$, проходящий через заданные значения. В классической задаче полиномиальной сплайн-интерполяции предполагается, что если степень n нечетная, то узлы сплайна $s(x)$ совпадают с заданными точками интерполяции; если n четно, то классическими можно назвать две конструкции (см. [2]): по Субботину — когда узлы сплайна расположены строго посередине между точками интерполяции, и по Марсдену — когда точки интерполяции расположены строго посередине узлов сплайна. Мы же будем рассматривать общую задачу интерполяции, т. е. помимо сетки Δ точек интерполяции задана еще одна сетка δ, сетка узлов сплайна $s(x)$ степени n, интерполирующего заданные значения. Можно допустить и совпадение некоторых узлов сетки Δ, что будет означать задание со значениями функции и производных. Такие кратные узлы часто используются на краях отрезка $[a, b]$ (краевые условия), например, в классических задачах.

Простой сплайн $s(x)$ — решение общей задачи интерполяции — является нелокальным (при $n > 1$), и его построение заключается в нахождении каких-либо параметров, через которые можно выразить сам сплайн и его производные. Задача определения таких параметров сводится к решению системы линейных уравнений. От выбора параметров сплайна зависят свойства получаемых систем уравнений.

Самый простой способ — взять в качестве параметров коэффициенты разложения искомого сплайна $s(x)$ по B-сплайнам степени n с узлами на сетке δ. Однако хорошо известно, что даже для сплайнов невысоких степеней (второй и третьей степени) на сильно неравномерных сетках такие системы уравнений могут быть плохо обусловленными, в то время как можно выбрать такие параметры, что получаемые системы уравнений будут хорошо обусловлены на любых

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-07530).

сетках [3; 4]. Например, для классических кубических интерполяционных сплайнов наиболее предпочтительными параметрами выступают узловые значения первой или второй производной. Попытка выбирать узловые значения производных вычисляемых сплайнов в качестве параметров для сплайнов более высоких степеней не привела к успеху [5].

В работе [6] автор предложил подход к построению классических интерполяционных сплайнов произвольной нечетной степени, состоящий в том, что в качестве определяемых параметров выбираются коэффициенты разложения какой-либо производной сплайна по нормализованным B-сплайнам соответствующей степени. Получение таких систем не составляет особого труда. Интересно отметить, что предложенный подход привел к новому устойчивому способу построения даже кубических сплайнов [7], несмотря на их достаточно детальную изученность. В дальнейшем в [8] были исследованы свойства матриц, получаемых при таком подходе систем уравнений, установлена связь обусловленности этих матриц с вопросами сходимости процессов интерполяции для соответствующих производных [9; 10] и как следствие выделены методы с хорошо обусловленными системами уравнений.

В данной работе этот же подход распространяется на общую задачу полиномиальной сплайн-интерполяции, изучаются свойства матриц получаемых систем уравнений, оценивается погрешность интерполяции.

1. Общая задача сплайн-интерполяции и B-сплайны

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ точек интерполяци, т. е. в узлах этой сетки известны значения $f_i = f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$. Требуется построить полиномиальный сплайн $s(x)$ степени n с узлами на, вообще говоря, другой заданной сетке $\delta\colon -\infty < \xi_1 < \ldots < \xi_i < \ldots < \xi_{N-n} < +\infty$ и проходящий через заданные значения на сетке Δ. Для сплайна первой степени ($n = 1$) задача мало содержательна, ввиду локальности сплайна, поэтому будем считать $n > 1$, а также $N > n$.

Известны необходимые и достаточные условия разрешимости общей задачи сплайн-интерполяции в терминах взаимого расположения узлов сеток Δ и δ, установленные еще в 1953 г. Шёнбергом и Уитни.

Теорема A [11, Theorem 2]. *Для того чтобы существовал единственный простой интерполяционный сплайн $s(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям $s(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, N$, необходимо и достаточно, чтобы $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+n},\ i = 1, \ldots, N - n$.*

Таким образом, все узлы интерполяционного сплайна должны лежать в пределах отрезка $[a, b]$. Будем считать, что нас интересует только интерполяция, т. е. сплайн только в пределах отрезка $[a, b]$. Чтобы использовать B-сплайны в задаче интерполяции, нужно расширить сетку узлов сплайна за пределы отрезка $[a, b]$ необходимым количеством дополнительных узлов

$$\ldots \leqslant \xi_{-1} \leqslant \xi_0 \leqslant a, \quad b \leqslant \xi_{N-n+1} \leqslant \xi_{N-n+2} \leqslant \ldots .$$

Тогда сплайн $s(x)$ на отрезке $[a, b]$ может быть представлен в виде разложения по базису из B-сплайнов степени n с узлами на сетке δ.

Напомним, *B-сплайном* степени $r-1$ (порядка r) на сетке δ называется сплайн с носителем из r последовательных интервалов этого разбиения. Ясно, что на каждом носителе такой сплайн определяется однозначно с точностью до нормирующего множителя. Распространены B-сплайны с двумя видами нормировки, определяемые равенствами

$$N_{i,r,\delta}(x) = (\xi_{i+r} - \xi_i)(\cdot - x)_+^{r-1}[\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}], \quad M_{i,r,\delta}(x) = \frac{r}{\xi_{i+r} - \xi_i} N_{i,r,\delta}(x).$$

Здесь $g[\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}]$ означает разделенную разность r-го порядка от функции g по точкам $\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}$ разбиения δ.

Если B-сплайны рассматриваются только по одному разбиению, то обычно индекс разбиения (в нашем случае δ) опускается. Поскольку у нас два различных разбиения δ и Δ и в дальнейшем мы будем рассматривать B-слайны и по разбиению Δ, то индекс разбиения мы опускать не будем, хотя в приводимых ниже свойствах используется только разбиение δ.

Отметим ряд свойств, которыми обладают B-сплайны (см., например, [3; 4; 12]). Для рассматриваемых B-сплайнов $N_{i,r,\delta}(x)$ и $M_{i,r,\delta}(x)$ выполняются соотношения

$$\sum_{j=i-r+1}^{i} N_{j,r,\delta}(x) \equiv 1 \quad \text{для } x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \qquad \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+r}} M_{i,r,\delta}(\tau)\, d\tau = 1. \tag{1}$$

Свойства (1) послужили основанием для названий L_∞-*нормализованные* (или просто *нормализованные*) для B-сплайнов $N_{i,r,\delta}(x)$ и, соответственно, L_1-*нормализованные* для $M_{i,r,\delta}(x)$.

Коэффициенты $\alpha_i^{(\nu)}$ разложения ν-й производной сплайна по B-сплайнам

$$\sigma^{(\nu)}(x) = \Big(\sum_i \alpha_i N_{i,r,\delta}(x)\Big)^{(\nu)} = \sum_i \alpha_i^{(\nu)} N_{i,r-\nu,\delta}(x)$$

могут быть выражены через коэффициенты α_i разложения самого сплайна по следующим рекуррентным формулам:

$$\alpha_i^{(p)} = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } p = 0, \\ \dfrac{r-p}{\xi_{i+r-p} - \xi_i}\big(\alpha_i^{(p-1)} - \alpha_{i-1}^{(p-1)}\big) & \text{при } p > 0. \end{cases}$$

Аналогичные соотношения справедливы и для коэффициентов $\beta_i^{(\nu)}$ разложения по ненормализованным B-сплайнам. Справедливо представление производной

$$N'_{i,r+1,\delta}(x) = \frac{r}{\xi_{i+r} - \xi_i} N_{i,r,\delta}(x) - \frac{r}{\xi_{i+r+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,r,\delta}(x) = M_{i,r,\delta}(x) - M_{i+1,r,\delta}(x). \tag{2}$$

Для разделенной разности r-го порядка функции $g(x) \in W_1^r[a,b]$ по значениям аргумента $x = \xi_i, \dots, \xi_{i+r}$ справедливо равенство

$$g[\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+r}] = \frac{1}{r!} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+r}} M_{i,r,\delta}(\tau) g^{(r)}(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Если в общей задаче интерполяции использовать представление искомого сплайна $s(x)$ в виде разложения по B-сплайнам

$$s(x) = \sum_{i=-n}^{N-n} \alpha_i N_{i,n+1,\delta}(x) = \sum_{i=-n}^{N-n} \beta_i M_{i,n+1,\delta}(x),$$

то задача состоит в определении коэффициентов разложения $\alpha_{-n}, \dots, \alpha_{N-n}$ или $\beta_{-n}, \dots, \beta_{N-n}$. Условия интерполяции сразу приводят к системам линейных уравнений

$$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{B\beta} = \boldsymbol{d} \tag{4}$$

относительно искомых коэффициентов разложения $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{-n}, \dots, \alpha_{N-n})^T$ (соответственно $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{-n}, \dots, \beta_{N-n})^T$) с матрицами $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$, элементами которых являются значения соответствующих B-сплайнов в узлах сетки Δ, а именно

$$a_{i,j} = N_{j,n+1,\delta}(x_i), \quad b_{i,j} = M_{j,n+1,\delta}(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad j = -n, \dots, N-n,$$

вектора правых частей имеют вид $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} = (f_0, \dots, f_N)^T$.

Мы предлагаем в качестве определяемых параметров в задаче интерполяции выбирать коэффициенты разложения какой-либо производной искомого сплайна $s(x)$. Производная порядка k искомого сплайна $s(x)$ также является простым сплайном с узлами на сетке δ, но степени $n-k$. Для k-й производной сплайна представление по базису из B-сплайнов имеет вид

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-n+k}^{N-n} \alpha_i^{(k)} N_{i,n+1-k,\delta}(x) = \sum_{i=-n+k}^{N-n} \beta_i^{(k)} M_{i,n+1-k,\delta}(x). \tag{5}$$

2. Системы определяющих уравнений

По свойству разделенных разностей (3) и с использованием представления (5) получаем

$$s[x_i,\ldots,x_{i+k}] = \frac{1}{k!}\sum_{j=-n+k}^{N-n} \alpha_j^{(k)} \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+k}} M_{i,k,\Delta}(\tau) N_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\,d\tau \right). \tag{6}$$

Ясно, что величины

$$a_{i,j}^k = \int\limits_{x_i}^{x_{i+k}} M_{i,k,\Delta}(\tau) N_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\,d\tau \tag{7}$$

не зависят от интерполируемых значений и полностью определяются рассматриваемыми сетками δ и Δ.

Равенства (6), записанные для разных индексов $i = 0,\ldots,N-k$, образуют систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения одной из производных искомого сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам. В матричной форме эта система имеет вид

$$\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\alpha}^k = \boldsymbol{c}^k, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{A}_k = \bigl(a_{i,j}^k\bigr)$ — матрица с элементами $a_{i,j}^k$, $i = 0,\ldots,N-k$; $j = -n+k,\ldots,N-n$, задаваемыми выражениями (7), $\boldsymbol{\alpha}^k = \bigl(\alpha_{-n+k}^{(k)},\ldots,\alpha_{N-n}^{(k)}\bigr)^T$ — вектор неизвестных и $\boldsymbol{c}^k = (c_0^k,\ldots,c_{N-k}^k)^T$ — вектор правой части системы с элементами $c_i^k = k!\,f[x_i,\ldots,x_{i+k}]$.

Отметим, что при $k=0$ мы считаем $M_{i,0,\Delta}(x) = \delta_{x_i}$, поэтому $a_{i,j}^0 = N_{j,n+1,\delta}(x_i)$, и $\boldsymbol{A}_0$ совпадает с матрицей $\boldsymbol{A}$ системы (4). Напомним, δ_t — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке t. Таким образом, система (8) имеет место для $k = 0,\ldots,n$.

Повторяя рассуждения работы [10], получаем и системы уравнений относительно коэффициентов разложения одной из производных сплайна по L_1-нормализованным B-сплайнам

$$\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{\beta}^k = \boldsymbol{d}^k, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\beta}^k = \bigl(\beta_{-n+k}^{(k)},\ldots,\beta_{N-n}^{(k)}\bigr)^T$ — вектор неизвестных, $\boldsymbol{B}_k = \bigl(b_{i,j}^k\bigr)$ — матрица с элементами

$$b_{i,j}^k = \int\limits_{x_i}^{x_{i+k}} N_{i,k,\Delta}(\tau) M_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\,d\tau, \quad i = 0,\ldots,N-k, \quad j = -n+k,\ldots,N-n, \tag{10}$$

и $\boldsymbol{d}^k = (d_0^k,\ldots,d_{N-k}^k)^T$ — вектор правой части с элементами

$$d_i^k = (k-1)!\bigl\{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}] - f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]\bigr\}, \quad i = 0,\ldots,N-k. \tag{11}$$

Как и в случае классических интерполяционных сплайнов [2;10], полученную систему уравнений (9) можно распространить и для значения k, на 1 больше степени сплайна.

Для любой функции $g(x) \in W_1^{r-1}[a,b]$ на основании свойств B-сплайнов (2) и (3) справедливо представление разделенной разности

$$g[x_i,\dots,x_{i+r}] = -\frac{1}{x_{i+r}-x_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+r}} \frac{1}{(r-1)!} N'_{i,r,\Delta}(\tau) g^{(r-1)}(\tau)\,d\tau\,.$$

Применим эту формулу для сплайна $s(x)$ степени n при $r = n+1$, тогда

$$s[x_i,\dots,x_{i+n}] - s[x_{i+1},\dots,x_{i+n+1}] = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_i}^{x_{i+n+1}} N'_{i,n+1,\Delta}(\tau) s^{(n)}(\tau)\,d\tau\,.$$

Поскольку на каждом отрезке $[\xi_j,\xi_{j+1}]$ сетки δ функция $s^{(n)}(x)$ постоянна, то интеграл в правой части равенства легко может быть выражен через разрывы $\beta_j^{(n+1)} = s^{(n)}(\xi_j+0) - s^{(n)}(\xi_j-0)$ старшей производной сплайна

$$\sum_{j=i}^{i+n} N_{i,n+1,\Delta}(\xi_j)\,\beta_j^{(n+1)} = d_i^{n+1}, \tag{12}$$

причем компоненты правой части определены формулами (11) в силу интерполяции.

Полученные равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно разрывов старшей производной.

Отметим, что обозначение разрывов n-й производной сплайна тем же символом, что и коэффициентов разложения производной по L_1-нормализованным B-сплайнам $M_{i,r,\delta}(x)$, вполне закономерно, если считать $M_{i,0,\delta}(x) = \delta_{\xi_i}$. В этом случае $b_{i,j}^{n+1} = N_{i,n+1,\Delta}(\xi_j)$, и соотношения (9) при $k = n+1$ совпадут с (12). Поэтому считаем, что система (9) имеет место при $k = 1,\dots,n+1$.

3. Вычисление и свойства матриц определяющих систем уравнений

Задачу построения интерполяционного сплайна $s(x)$ степени n мы рассматриваем как задачу определения его параметров и в качестве таких параметров берем коэффициенты разложения производной порядка k по B-сплайнам. В предыдущем разделе были выведены системы линейных уравнений для двух случаев, однако структура матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ одинакова — их элементами являются интегралы от произведений B-сплайнов по сеткам δ и Δ (см. (7), (10)).

Практическое вычисление элементов матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ в каждом конкретном случае не вызывает особых проблем. Можно, например, воспользоваться квадратурными формулами Гаусса, которые точны на многочленах. С другой стороны, в работе [13] было указано, что интегралы от произведений B-сплайнов, т. е. элементы матриц $a_{i,j}^k$ или $b_{i,j}^k$, можно вычислять по устойчивым рекуррентным формулам.

Существует связь между величинами $a_{i,j}^k$ и некоторыми разделенными разностями. Пусть

$$T_{i,j}^{r,m} = (-1)^r (s-t)_+^{r+m-1}[x_i,\dots,x_{i+r}]_t[\xi_j,\dots,\xi_{j+m}]_s. \tag{13}$$

Здесь индекс t или s после квадратных скобок указывает, по какой из переменных берется разделенная разность. В [13] показано, что имеет место равенство

$$T_{i,j}^{r,m} = \frac{C_{r+m-1}^r}{\xi_{j+m}-\xi_j}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{i,r,\Delta}(\tau) N_{j,m,\delta}(\tau) d\tau$$

в случае непустых носителей $M_{i,r,\Delta}(x)$ и $N_{j,m,\delta}(x)$, т. е. когда $x_i < x_{i+r}$ и $\xi_j < \xi_{j+m}$ (C^r_{r+m-1} — биномиальные коэффициенты).

Лемма [13, Lemma 4.1]. *Справедливы формулы*

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{x_{i+r} - \xi_j}{\xi_{j+m} - \xi_j} T^{r,m-1}_{i,j} + \frac{\xi_{j+m} - x_{i+r}}{\xi_{j+m} - \xi_j} T^{r,m-1}_{i,j+1} + T^{r-1,m}_{i,j}$$

(*применима, когда* $x_{i+r} \leqslant \xi_{j+m}$ *и* $\xi_j < \xi_{j+m}$),

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{x_i - \xi_j}{\xi_{j+m} - \xi_j} T^{r,m-1}_{i,j} + \frac{\xi_{j+m} - x_i}{\xi_{j+m} - \xi_j} T^{r,m-1}_{i,j+1} + T^{r-1,m}_{i+1,j}$$

(*применима, когда* $\xi_j \leqslant x_i$ *и* $\xi_j < \xi_{j+m}$),

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{\xi_j - x_i}{x_{i+r} - x_i} T^{r-1,m}_{i,j} + \frac{x_{i+r} - \xi_j}{x_{i+r} - x_i} T^{r-1,m}_{i+1,j} + T^{r,m-1}_{i,j+1}$$

(*применима, когда* $x_i \leqslant \xi_j$ *и* $x_i < x_{i+r}$),

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{\xi_{j+m} - x_i}{x_{i+r} - x_i} T^{r-1,m}_{i,j} + \frac{x_{i+r} - \xi_{j+m}}{x_{i+r} - x_i} T^{r-1,m}_{i+1,j} + T^{r,m-1}_{i,j}$$

(*применима, когда* $\xi_{j+m} \leqslant x_{i+r}$ *и* $x_i < x_{i+r}$).

Как подчеркивается в [13], данные рекуррентные соотношения позволяют устойчиво вычислять величины $T^{r,m}_{i,j}$, так как коэффициенты перед величинами T всегда неотрицательны и не превосходят 1. Для полноты следует добавить, что если $x_i = x_{i+r}$ или $\xi_j = \xi_{j+m}$ (но не одновременно), то

$$T^{r,m}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{C^m_{r+m-1}}{x_{i+r} - x_i} N_{i,r,\Delta}(\xi_j) & \text{при} \ \ \xi_j = \xi_{j+m}, \\[2ex] \dfrac{C^m_{r+m-1}}{\xi_{j+m} - \xi_j} N_{j,m,\delta}(x_i) & \text{при} \ \ x_i = x_{i+r}, \end{cases}$$

что непосредственно следует из (13).

Таким образом, второй способ вычисления элементов матриц $\boldsymbol{A}_k$ наших систем уравнений (8) и (9) может быть основан на рекуррентных формулах леммы. Кроме того, возможен и третий способ, состоящий в прямом вычислении разделенных разностей в (13).

Конечно, наиболее быстрый способ вычисления — это третий, однако им можно практически пользоваться, только когда разделенные разности не слишком высокого порядка и размещение узлов сетки относительно равномерно. В [13] для случая $k = n = 4$ приводятся результаты численных экспериментов по вычислению величин $T^{4,4}_{i,j}$ для всех трех методов в зависимости от величины отношения соседних шагов сетки. Первые два рассмотренные методы дают погрешность вычисления только в последней цифре при десяти значащих разрядах компьютера, в то время как в третьем способе величина погрешности стремительно растет с увеличением отношения соседних шагов. Хотя первые два способа и проигрывают по времени третьему, но гораздо предпочтительнее по точности. Затраты по времени в первом и втором способах примерно одинаковы.

Перейдем к изучению свойств матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ рассматриваемых систем уравнений (8), (9).

Для векторов $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)^T$ и $N \times N$ матриц $\boldsymbol{G} = (g_{i,j})$ будем рассматривать нормы

$$\|\boldsymbol{\gamma}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\gamma_i|, \quad \|\boldsymbol{G}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sum_{j=1}^{N} |g_{i,j}|.$$

Теорема 1. *Для любого* k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *матрицы* $\boldsymbol{A}_k$ *и* $\boldsymbol{B}_k$ *систем уравнений* (8) *и* (9) *являются ленточными* (*ширина ленты не более* $2n+1$) *с неотрицательными элементами и* $\|\boldsymbol{A}_k\| = \|\boldsymbol{B}^T_k\| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2]. Отличие будет в ширине ленты. Как и в [2], элементами $a_{i,j}^k$ и $b_{i,j}^k$ матриц являются интегралы от произведений B-сплайнов. Носитель сплайна $M_{i,k,\Delta}(x)$ состоит из $k-1$ интервалов сетки Δ, а носитель $N_{j,n-k+1,\delta}(x)$ — из $n-k$ интервалов сетки δ, поэтому $a_{i,j}^k$ могут быть отличны от 0 лишь при $j = i+k-2n, \ldots, i+k$. Следовательно, для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ матрицы $\boldsymbol{A}_k$ всегда ленточные с ненулевыми $2n+1$ элементами в каждой строке, включая диагональный элемент, значит, общая ширина ленты не более $2n+1$. □

З а м е ч а н и е 1. Матрицы $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_{n+1}$ также удовлетворяют условиям теоремы 1, и $\|\boldsymbol{A}_0\| = \|\boldsymbol{B}_{n+1}^T\| = 1$.

Теорема 2. *Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, матрицы $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ систем уравнений* (8) *и* (9) *вполне неотрицательны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы основано на интегральном тождестве [14, формула (63)] и аналогично доказательству теоремы 1 из [8]. □

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы 2 справедливо и для матриц $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_{n+1}$.

Отметим, что установленное свойство вполне неотрицательности матриц систем уравнений, т. е. все миноры любого порядка неотрицательны — весьма важное свойство для практического построения интерполяционного сплайна $s(x)$. Решение системы уравнений с такой матрицей методом исключения Гаусса не требует выбора главного элемента [15], что позволяет достаточно экономично с вычислительной точки зрения организовать процесс решения.

4. Оценки погрешностей приближения производных

Выше для решения общей задачи интерполяции полиномиальными сплайнами получены системы уравнений относительно коэффициентов B-сплайн-разложения некоторой k-й производной интерполяционного сплайна, которые выступают определяющими параметрами искомого сплайна. Важной характеристикой систем уравнений, особенно при практическом построении сплайна, является величина обусловленности системы или величина нормы обратной матрицы (поскольку в силу теоремы 1 имеет место $\|\boldsymbol{A}_k\| = \|\boldsymbol{B}_k^T\| = 1$). Однако помимо информации о величине возможной погрешности при практическом решении этих систем, т. е. об ошибке нахождения параметров интерполяционного сплайна, погрешность метода, в данном случае величина $s^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$, также может быть оценена в терминах обусловленности (нормы обратной матрицы). Мы установим оценку погрешности $s^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$ в равномерной норме через модуль непрерывности функции $f^{(k)}(x)$, т. е. при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции $f(x)$.

Как обычно, для любой функции $g(x)$, заданной на $[a,b]$, полагаем

$$\omega(g;h) = \max_{s,t\in[a,b],\ |s-t|\leqslant h} \bigl|g(s)-g(t)\bigr|, \quad \|g\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{a\leqslant x\leqslant b} \bigl|g(x)\bigr|.$$

Ясно, что если $g(x) \in C[a,b]$, то $\omega(g;h) \to 0$ при $h \to 0$. Кроме того, обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\bar{h} = \max\{h_i \ :\ 0 \leqslant i \leqslant N-1\}$.

Результаты сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 3. *Для k-й производной погрешности в задаче общей интерполяции полиномиальным сплайном $s(x)$ степени n с узлами на сетке δ функции $f(x) \in C^k[a,b]$, $0 \leqslant k \leqslant n$, в узлах сетки Δ справедлива оценка*

$$\bigl\|s^{(k)} - f^{(k)}\bigr\|_\infty \leqslant C \bigl\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\bigr\| \omega\bigl(f^{(k)}; \bar{h}\bigr), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{A}_k$ — матрица системы (8), *константа C зависит только от k и n, но не от расположения или количества узлов сеток Δ и δ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $s^{(k)}(x)$, величину отклонения которой от $f^{(k)}(x)$ требуется оценить, является сплайном степени $n-k$. Рассмотрим еще один сплайн $s_k(x)$ степени $n-k$, задаваемый явно в виде разложения по L_∞-нормализованным B-сплайнам на сетке δ с коэффициентами c_i^k, являющимися компонентами вектора правой части системы (8), т. е.

$$s_k(x) = c_0^k N_{-n+k,n+1-k,\delta}(x) + \ldots + c_N^k N_{N-n,n+1-k,\delta}(x).$$

Требуемую оценку (14) будем получать как сумму оценок отклонений $s^{(k)}(x)$ от $s_k(x)$ и $s_k(x)$ от $f^{(k)}(x)$.

Рассмотрим сперва отклонение $s^{(k)}(x) - s_k(x)$, имеем

$$\left|s^{(k)}(x) - s_k(x)\right| = \left|\sum_{j=k}^{N} \left(\alpha_{j-n}^{(k)} - c_{j-k}^k\right) N_{j-n,n+1-k,\delta}(x)\right| \leqslant \left\|\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{c}^k\right\|. \tag{15}$$

Перепишем систему уравнений (8) в виде

$$\boldsymbol{A}_k\left(\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{c}^k\right) = \boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k. \tag{16}$$

Поскольку сумма элементов в каждой строке матрицы $\boldsymbol{A}_k$ равна 1, то

$$\left\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\right\| = \max_{0\leqslant i\leqslant N-k}\left|c_i^k - \sum_{j=k}^{N} c_{j-k}^k a_{i,j-n}^k\right| = \max_{0\leqslant i\leqslant N-k}\left|\sum_{j=k}^{N}\left(c_i^k - c_{j-k}^k\right)a_{i,j-n}^k\right|.$$

Матрица $\boldsymbol{A}_k$ ленточная с $2n+1$ ненулевыми элементами в строке, поэтому

$$\left\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\right\| \leqslant \max_{|i-j|\leqslant n}\left|c_i^k - c_j^k\right| \leqslant \max_{|i-j|\leqslant n}\left|k!f[x_i,\ldots,x_{i+k}] - k!f[x_j,\ldots,x_{j+k}]\right|.$$

По свойству разделенных разностей

$$k!f[x_i,\ldots,x_{i+k}] = f^{(k)}(\tau_i) \tag{17}$$

для некоторого $\tau_i \in (x_i, x_{i+k})$, следовательно,

$$\left|f^{(k)}(\tau_i) - f^{(k)}(\tau_j)\right| \leqslant \left(|i-j| + k\right)\omega\left(f^{(k)};\bar{h}\right).$$

Поэтому $\left\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\right\| \leqslant (n+k)\omega\left(f^{(k)};\bar{h}\right)$, и для решения системы (16) справедливы неравенства

$$\left\|\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{c}^k\right\| \leqslant \left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\right\| \leqslant (n+k)\left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|\omega\left(f^{(k)};\bar{h}\right).$$

Комбинируя последнюю оценку с (15), получаем

$$\left|s^{(k)}(x) - s_k(x)\right| \leqslant (n+k)\left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|\omega\left(f^{(k)};\bar{h}\right). \tag{18}$$

Теперь найдем отклонение вспомогательного сплайна $s_k(x)$ от $f^{(k)}(x)$. Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда

$$\begin{aligned}
\left|s_k(x) - f^{(k)}(x)\right| &= \left|\sum_{j=i-2n}^{i+1}\left[c_{j+n-k}^k - f^{(k)}(x)\right]N_{j,n+1-k,\delta}(x)\right| \\
&= \left|\sum_{j=i-2n}^{i+1}\Big[k!f[x_{j+n-k},\ldots,x_{j+n}] - f^{(k)}(x)\Big]N_{j,n+1-k,\delta}(x)\right| \\
&\leqslant \max_{i-2n\leqslant j\leqslant i+1}\left|f^{(k)}(\tau_{j+n-k}) - f^{(k)}(x)\right| \;\leqslant\; (n+k)\,\omega\left(f^{(k)};\bar{h}\right),
\end{aligned} \tag{19}$$

где в соответствии с (17) $\tau_{j+n-k} \in (x_{j+n-k}, x_{j+n})$.

Наконец, итоговая оценка (14) складывается из оценок (18) и (19), т. е.

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant \big\|s^{(k)} - s_k\big\|_\infty + \big\|s_k - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant (n+k)\Big[\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| + 1\Big]\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big).$$

Поскольку

$$\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| + 1 \leqslant \big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| + \big\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| \leqslant 2\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\|,$$

то приходим к оценке (14) с $C = 2(n+k)$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для k-й производной погрешности в задаче общей интерполяции полиномиальным сплайном $s(x)$ степени n с узлами на сетке δ функции $f(x) \in C^k[a,b]$, $0 \leqslant k \leqslant n$, в узлах сетки Δ справедлива оценка*

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant C\big\|(\boldsymbol{B}_{k+1}^T)^{-1}\big\|\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{B}_k$ — матрица системы (9), константа C зависит только от k и n, но не от расположения или количества узлов сеток Δ и δ.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $k \leqslant n-1$. Поскольку сплайн $s(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in C^k[a,b]$ в узлах сетки Δ, то по теореме Ролля не далее, чем на $k+1$ интервалах сетки Δ от произвольной точки x существует точка θ такая, что $s^{(k)}(\theta) = f^{(k)}(\theta)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\big|s^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\big| &\leqslant \big|s^{(k)}(x) - s^{(k)}(\theta)\big| + \big|f^{(k)}(\theta) - f^{(k)}(x)\big| \\ &\leqslant \left|\int\limits_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)d\tau\right| + (k+1)\,\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big).\end{aligned} \tag{21}$$

Разложим сплайн $s^{(k+1)}(x)$ в базисе из L_1-нормализованных B-сплайнов

$$s^{(k+1)}(x) = \beta^{(k+1)}_{-n+k+1}M_{-n+k+1,n-k,\delta}(x) + \ldots + \beta^{(k+1)}_{N-n}M_{N-n,n-k,\delta}(x).$$

Тогда, используя условие нормировки B-сплайнов, получаем

$$\left|\int\limits_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)d\tau\right| \leqslant \sum_j \big|\beta_j^{(k+1)}\big|,$$

причем в сумме присутствует не более $2n+1$ слагаемых в силу того, что точки θ и x разнесены не более, чем на $k+1$ интервалов сетки, и на любом интервале сетки Δ в разложении $(k+1)$-й производной по B-сплайнам на сетке δ ненулевых слагаемых не более $2n-k+1$. Указанное обстоятельство позволяет записать неравенство

$$\left|\int\limits_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant (2n+1)\big\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\big\|. \tag{22}$$

Из системы уравнений (9) следует

$$\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\| \leqslant \big\|(\boldsymbol{B}_{k+1}^T)^{-1}\big\| \cdot \|\boldsymbol{d}_{k+1}\|,$$

а для компонент d_i^{k+1} вектора правой части этой системы справедливы оценки

$$\big|d_i^{k+1}\big| = k!\,\big|f[y_{i+1},\ldots,y_{i+k+1}] - f[y_i,\ldots,y_{i+k}]\big| = \big|f^{(k)}(\tau_{i+1}) - f^{(k)}(\tau_i)\big| \leqslant (k+1)\;\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big), \tag{23}$$

где τ_j — некоторые точки из интервалов (x_j, x_{j+k}). В результате имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\| \leqslant (k+1)\big\|(\boldsymbol{B}_{k+1}^T)^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big). \tag{24}$$

Теперь требуемая оценка (20) непосредственно следует из (21), (22) и (24).

Осталось рассмотреть случай $k = n$. Если предыдущие рассуждения опирались на теорему Ролля, то сейчас ее применять уже нельзя, так как функция $s^{(n)}(x)$ является разрывной; однако в этом случае возможно применение расширенной теоремы Ролля.

Так как сплайн $s(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в узлах сетки Δ, то в любых последовательных $n-1$ интервалах сетки существует по меньшей мере одна точка, в которой значения $s^{(n-1)}(x)$ и $f^{(n-1)}(x)$ совпадают. Следовательно, производная порядка $n-1$ от функции погрешности $e(x) = s(x) - f(x)$, являющаяся абсолютно непрерывной, в любых последовательных n интервалах сетки по меньшей мере дважды обращается в нуль. Тогда по расширенной теореме Ролля (см., например, [16, p. 29]) не далее, чем на $n+1$ интервалах сетки от любой точки $x \in [a,b]$ найдется точка $\theta \in [a,b]$, в которой либо $e^{(n)}(\theta) = 0$, либо $e^{(n)}(\theta - 0)$ и $e^{(n)}(\theta + 0)$ имеют разные знаки.

Тогда в силу непрерывности $f^{(n)}(x)$ имеем

$$\big|s^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\big| \leqslant \big|s^{(n)}(x) - s^{(n)}(\theta \pm 0)\big| + \big|s^{(n)}(\theta \pm 0) - f^{(n)}(\theta)\big| + \big|f^{(n)}(\theta) - f^{(n)}(x)\big|.$$

Причем, если $e^{(n)}(\theta) = 0$, то среднее слагаемое в правой части равно 0, в противном случае точка θ совпадает с каким-либо узлом сплайна (в других точках $s^{(n)}(x)$ разрывов не имеет), скажем, $\theta = \xi_j$, и условие различия знаков $e^{(n)}(\theta - 0)$ и $e^{(n)}(\theta + 0)$ позволяет утверждать, что

$$\big|s^{(n)}(\theta \pm 0) - f^{(n)}(\theta)\big| \leqslant \big|\beta_j^{(n+1)}\big| \leqslant \|\boldsymbol{\beta}^{n+1}\|.$$

Следовательно,

$$\big|s^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\big| \leqslant (n+2)\big\|\boldsymbol{\beta}^{n+1}\big\| + (n+1)\,\omega\big(f^{(n)};\bar{h}\big).$$

Оценивая норму вектора $\boldsymbol{\beta}^{n+1}$ из системы уравнений (9) при $k = n+1$, с учетом (23) получаем (20) и для $k = n$.

Теорема полностью доказана.

В монографии [3] С. Б. Стечкиным и Ю. Н. Субботиным выписана система уравнений относительно значений производной сплайна второй степени в узлах интерполяции. Матрица имеет диагональное преобладание, и норма обратной матрицы может быть оценена константой (см. теорему 1). Однако, хотя там и рассмотрены две разные сетки, случай не совсем общий — узлы сеток перемежаются. Всевозможные системы уравнений для сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену получены в [17].

Наличие диагонального преобладания позволяет легко установить оценки нормы обратной матрицы и оценить погрешность интерполяции. Однако уже в классической задаче интерполяции для сплайнов степени выше третьей диагональное преобладание в системах уравнений отсутствует. Некоторой альтернативой диагональному преобладанию может выступать свойство вполне неотрицательности. В работе [18] предложен метод оценивания нормы обратной вполне неотрицательной матрицы. Этому посвящена и работа [19].

В частном случае классической задачи интерполяции для сплайнов нечетной степени (сетки Δ и δ совпадают) известно [20], что для всех производных k (кроме двух средних) нормы обратных матриц нельзя ограничить константой, не зависящей от сетки, что означает возможную расходимость процесса интерполяции для соответствующих производных. Обзор результатов сходимости приведен в работе [21].

Представляет интерес вопрос: можно ли за счет выбора сеток узлов сплайнов δ улучшить аппроксимационные свойства интерполяции, например, получить сходимость процесса интерполяции для каких-либо производных кроме двух средних?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967. 284 p.
2. **Волков Ю. С.** Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.
3. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. **Волков Ю. С.** Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычисл. системы. Вып. 106: Приближение сплайнами / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1984. С. 41–56.
6. **Волков Ю. С.** О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычисл. системы. Вып. 159: Сплайн-функции и их приложения / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1997. С. 3–18.
7. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционых кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.
8. **Волков Ю. С.** Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34.
9. **Волков Ю. С.** Безусловная сходимость еще одной средней производной для интерполяционных сплайнов нечетной степени // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 5. С. 592–594.
10. **Волков Ю. С.** О сходимости процесса интерполяции для производных полного сплайна // Укр. мат. вiсн. 2012. Т. 9, № 2. С. 278–296.
11. **Schoenberg I. J., Whitney A.** On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 74, no. 2. P. 246–259.
12. **Boor C. de.** A practical guide to splines. New York: Springer, 1978. 392 p.
13. **Boor C. de, Lyche T., Schumaker L. L.** On calculating with B-splines, II. Integration // Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 3 / eds. L. Collatz, H. Werner, G. Meinardus. (Tagung, Math. Forschungsinst, Oberwolfach, 1975). Basel: Birkhäuser, 1976. P. 123–146. (Internat. Ser. Numer. Math.; vol. 30).
14. **Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.** Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 359 с.
15. **Boor C. de, Pinkus A.** Backward error analysis for totally positive linear systems // Numer. Math. 1977. Vol. 27, no. 4. P. 485–490.
16. **Schumaker L. L.** Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981. 553 p.
17. **Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.** Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
18. **Boor C. de** On the convergence of odd-degree spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1968. Vol. 1, no. 4. P. 452–463.
19. **Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.** Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.
20. **Boor C. de** On bounding spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1975. Vol. 14, no. 3. P. 191–203.
21. **Волков Ю. С., Субботин Ю. Н.** 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зам. директора
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Поступила 14.06.2016

REFERENCES

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The theory of splines and their applications.* New York: Academic Press, 1967, 284 p.
2. Volkov Yu. S. Interpolation by splines of even degree according to Subbotin and Marsden. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 7, pp. 994–1012.
3. Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. *Splajny v vychislitelnoj matematike* (Splines in computational mathematics). Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p. (in Russian).
4. Zavialov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splajn funkcij* (Methods of spline-functions). Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p. (in Russian).
5. Volkov Yu. S. Divergence of interpolating splines of odd degree. *Vychisl. Sistemy. Vol.* 106 : *Approximation by spline*, Novosibirsk, 1984, pp. 41–56 (in Russian).
6. Volkov Yu. S. On the construction of the interpolation polynomial splines. *Vychisl. Sistemy. Vol.* 159 : *Spline functions and their applications*, Novosibirsk, 1997, pp. 3–18 (in Russian).
7. Volkov Yu. S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 65, no. 1, pp. 13–15.
8. Volkov Yu. S. Totally positive matrices in the methods of constructing interpolation splines of odd degree. *Siberian Adv. Math.*, 2005, vol. 15, no. 4, pp. 96–125.
9. Volkov Yu. S. Unconditional convergence of one more middle derivative for odd degree spline interpolation. *Dokl. Math.*, 2005, vol. 71, no. 2, pp. 250–252.
10. Volkov Yu. S. Convergence analysis of an interpolation process for the derivatives of a complete spline. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 1, pp. 101–114.
11. Schoenberg I. J., Whitney A. On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1953, vol. 74, no. 2, pp. 246–259.
12. Boor C. de. *A practical guide to splines.* New York: Springer, 1978, 392 p.
13. Boor C. de, Lyche T., Schumaker L. L. On calculating with B-splines, II. Integration. *Numerische Methoden der Approximationstheorie*, Band 3, Eds. L. Collatz, H. Werner, G. Meinardus, Basel: Birkhäuser, 1976, Internat. Ser. Numer. Math., vol. 30, pp. 123–146.
14. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Gantmacher F. R., Krein M. G. *Oscillyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskih sistem* (Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems). Providence: Amer. Math. Soc., 2002, 310 p.
15. Boor C. de, Pinkus A. Backward error analysis for totally positive linear systems. *Numer. Math.*, 1977, vol. 27, no. 4, pp. 485–490.
16. Schumaker L. L. *Spline functions: basic theory.* New York: Wiley, 1981, 553 p.
17. Volkov Yu. S., V. Shevaldin T. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 145–152 (in Russian).
18. Boor C. de. On the convergence of odd-degree spline interpolation. *J. Approxim. Theory*, 1968, vol. 1, no. 4, pp. 452–463.
19. Volkov Yu. S., Miroshnichenko V. L. Norm estimates for the inverses of matrices of monotone type and totally positive matrices. *Siberian Math. J.*, 2009. Vol. 50, no. 6, pp. 982–987.
20. Boor C. de. On bounding spline interpolation. *J. Approxim. Theory*, 1975, vol. 14, no. 3, pp. 191–203.
21. Volkov Yu. S., Subbotin Yu. N. Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. S222–S237.

Yu. S. Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: volkov@math.nsc.ru .