ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.65

ОБ УСЛОВИЯХ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ПО СУББОТИНУ[1]

В. В. Богданов, Ю. С. Волков

Для решения задачи интерполяции с условиями сохранения кусочной монотонности и выпуклости применяются параболические сплайны. Установлены достаточные условия кусочной монотонности и выпуклости интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину, приведены численные примеры.

Ключевые слова: сплайн второй степени, интерполяция, формосохранение.

V. V. Bogdanov, Yu. S. Volkov. Shape preservation conditions under interpolation by Subbotin's parabolic splines.

Parabolic splines are applied to solve an interpolation problem with the conditions of preserving the piecewise monotonicity and convexity. Sufficient conditions are established for the piecewise monotonicity and convexity of Subbotin's quadratic interpolation splines, and numerical examples are given.

Keywords: quadratic spline, interpolation, shape preservation.

MSC: 65D05, 65D07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-102-113

Введение

Формосохраняющей интерполяцией принято называть сохранение интерполянтом геометрических характеристик интерполируемой функции, под которыми чаще всего понимают монотонность и выпуклость. Задачи монотонной и выпуклой интерполяции хорошо изучены, для классических сплайнов второй и третьей степеней установлены эффективные достаточные условия [1–4]. Однако весьма актуальной и малоизученной является задача интерполяции данных, содержащих перемены направлений монотонности и выпуклости. Начало исследованиям в этом направлении было положено работой Ю. С. Завьялова [5], из которой сразу следуют достаточные условия сохранения кусочной выпуклости для кубических сплайнов. Решение же задачи интерполяции с условием сохранения кусочной монотонности [6] потребовало привлечения нового представления классических кубических сплайнов [7; 8] и развития [9] идей работы [5].

В настоящей работе для решения задачи интерполяции с условиями сохранения кусочной монотонности и выпуклости, т. е. задачи комонотонной и ковыпуклой интерполяции, мы применяем параболические сплайны. Установлены достаточные условия кусочной монотонности и выпуклости интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину [10], приведены численные примеры.

1. Системы определяющих уравнений

Пусть в узлах сетки

$$\boldsymbol{X}: \ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-07530).

отрезка $[a, b]$ известны значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, а на концах отрезка — еще и производные $f'_a = f'(a)$, $f'_b = f'(b)$. Нам удобно для дальнейшего определить кратные дополнительные узлы $x_{-1} = x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n = b$. Шаг сетки обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = -1, \ldots, n$.

Характер монотонности исходных данных определяется знаками разделенных разностей $\delta_i = f[x_i, x_{i+1}]$, $i = -1, \ldots, n$. Отметим, что крайние значения суть заданные значения производных на концах отрезка: $\delta_{-1} = f'_a$, $\delta_n = f'_b$. Характер выпуклости данных определяют знаки вторых разделенных разностей $\Delta_i = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$.

Параболический сплайн по Субботину [10, гл. 2] интерполирует заданные значения и имеет узлы в точках y_i таких, что

$$y_i = (x_{i-1} + x_i)/2, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad y_0 = a, \quad y_{n+1} = b.$$

Параболические интерполяционные сплайны по Субботину, как и классические кубические, являются нелокальными, и для нахождения каких-либо определяющих их параметров необходимо решать трехдиагональные системы уравнений. В. Л. Мирошниченко показал [1; 2], что если в качестве параметров выбирать узловые значения первой либо второй производной, то эти же системы можно использовать и для получения условий монотонности и выпуклости. Основным инструментом получения условий монотонности и выпуклости явилась лемма Мирошниченко [1, Lemma 1] о неотрицательном решении трехдиагональной системы с диагональным преобладанием. В дальнейшем был предложен более простой путь получения условий монотонности и выпуклости, состоящий в использовании систем уравнений относительно коэффициентов разложения первой или второй производной сплайна по B-сплайнам соответствующей степени [3; 4; 11], правда, пришлось усилить [3; 12] лемму Мирошниченко.

Преимущество нового подхода заключается в том, что параметрами сплайна выступают коэффициенты разложения первой или второй производной интерполяционного сплайна по B-сплайнам, поэтому положительность этих производных, т. е. монотонность и выпуклость сплайна, сразу следует из положительности определяемых параметров сплайна. А лемма Мирошниченко и ее усиления дают достаточные условия положительности таких параметров при положительных правых частях соответствующих систем уравнений (компонентами правых частей выступают разделенные разности $\{\delta_i\}$ или $\{\Delta_i\}$).

Теперь считаем, что в последовательностях разделенных разностей $\{\delta_i\}$ и $\{\Delta_i\}$ обязательно есть перемены знаков. Задача состоит в нахождении условий, при которых первая или вторая производная интерполирующей функции будет наследовать характер изменения знаков соответствующих разделенных разностей. Например, если в последовательности $\{\delta_i\}$ после l положительных значений идут отрицательные, то и производная интерполянта в окрестности узла x_l должна однократно поменять знак с “+” на “−”. Нас интересуют условия, гарантирующие выполнение указанного свойства.

Ограничимся рассмотрением случая, когда в последовательностях разделенных разностей ровно одна смена знака, т. е. выполнены условия

$$\delta_{-1} > 0, \ldots, \delta_{l-1} > 0, \quad \delta_l < 0, \ldots, \delta_n < 0, \tag{2}$$

или

$$\Delta_0 > 0, \ldots, \Delta_{l-1} > 0, \quad \Delta_l < 0, \ldots, \Delta_n < 0. \tag{3}$$

Для наших целей воспользуемся представлением первой и второй производной параболического сплайна в виде разложения по B-сплайнам [4]:

$$s'(x) = \sum_{i=-1}^{n} \alpha_i N_{i,2}(x), \tag{4}$$

$$s''(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i N_{i,1}(x), \tag{5}$$

Здесь $N_{i,1}(x)$, $N_{i,2}(x)$ — B-сплайны первого и второго порядков соответственно, т. е. нулевой и первой степени. Сетку узлов сплайна при этом мы считаем расширенной влево и вправо кратными дополнительными узлами $y_{-1} = a$, $y_{n+2} = b$.

Коэффициенты разложений $\alpha_{-1}, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_0, \ldots, \beta_n$ определяются из выведенных в [4, системы (1.6),(1.7)] систем уравнений, характеризующих условия интерполяции. Эти системы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{-1} = \delta_{-1}, \\ &\lambda_i\alpha_{i-1} + (2 + \mu_i + \lambda_{i+1})\alpha_i + \mu_{i+1}\alpha_{i+1} = 4\delta_i,\ i = 0, \ldots, n-1, \\ &\alpha_n = \delta_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &3\beta_0 + \beta_1 = 8\Delta_0, \\ &\mu_i\beta_{i-1} + 3\beta_i + \lambda_i\beta_{i+1} = 8\Delta_i,\ i = 1, \ldots, n-1, \\ &\beta_{n-1} + 3\beta_n = 8\Delta_n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь обозначено

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Если мы желаем, чтобы параболический сплайн по Субботину $s(x)$, производная которого представлена в виде (4), отражал характер поведения данных (2) и менял направление монотонности с возрастания на убывание, то в последовательности коэффициентов $\{\alpha_i\}$ также должна быть смена знаков с “$+$” на “$-$”. Поскольку носителем B-сплайна $N_{i,2}(x)$ является интервал $[y_i, y_{i+2}]$, то значение производной $s'(x)$ в любой точке промежутка $[y_i, y_{i+1}]$ определяется лишь двумя коэффициентами α_{i-1} и α_i. Ясно, что если эти коэффициенты одного знака, то и значения $s'(x)$ на всем промежутке $[y_i, y_{i+1}]$ будут этого же знака. Если же они разных знаков, то $s'(x)$ как линейная функция обязательно меняет знак на $[y_i, y_{i+1}]$. Таким образом, справедливо утверждение.

Лемма 1. *Если в последовательности коэффициентов представления* (4) *присутствует смена знака, а именно выполнены условия*

$$\alpha_{-1} > 0, \ldots, \alpha_{k-1} > 0, \quad \alpha_k < 0, \ldots, \alpha_n < 0,$$

то существует единственная точка $\xi \in [y_k, y_{k+1}]$ *такая, что* $s'(x) \geq 0$ *для* $x \in [a, \xi]$, $s'(x) \leq 0$ *для* $x \in [\xi, b]$.

Вторая производная параболического сплайна по Субботину (5) является кусочно-постоянной и ее значение в каждой точке определяется лишь одним коэффициентом B-сплайн-разложения — значение β_i определяет $s''(x)$ на $[y_i, y_{i+1}]$. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *Если в последовательности коэффициентов представления* (5) *присутствует смена знака, а именно выполнены условия*

$$\beta_0 > 0, \ldots, \beta_{k-1} > 0, \quad \beta_k < 0, \ldots, \beta_n < 0,$$

то в точке y_k *вторая производная сплайна меняет знак, т.е.* $s''(x) \geq 0$ *для* $x \in [a, y_k]$, $s''(x) \leq 0$ *для* $x \in [y_k, b]$.

При выполнении условий (2) интерполируемая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ также обязана менять направление монотонности с возрастания на убывание, причем эта точка максимума может лежать на промежутке $[x_{l-1}, x_{l+1}]$. В условиях леммы 1 точка локального максимума сплайна $s(x)$ принадлежит промежутку $[y_k, y_{k+1}]$, который только при $k = l$ будет содержаться в $[x_{l-1}, x_{l+1}]$. Таким образом, наша задача сохранения интерполяционным параболическим сплайном по Субботину кусочной монотонности данных состоит в определении условий, при которых знаки набора коэффициентов $\{\alpha_i\}$ (знаковая схема) совпадут с набором знаков последовательности $\{\delta_i\}$ (мы используем термин 'наследование знаковой схемы').

Если в данных присутствует смена направления выпуклости, т. е. выполнены условия (3), то интерполируемая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ также обязана менять направление выпуклости с выпуклости вниз на выпуклость вверх, причем точка перегиба лежит на промежутке $[x_{l-2}, x_{l+1}]$. В условиях леммы 2 точкой перегиба сплайна будет узел y_k, он может принадлежать $[x_{l-2}, x_{l+1}]$ при $k = l-1, l, l+1$. Наилучшее положение будет при $k = l$, что соответствует положению точки перегиба сплайна $s(x)$ в среднем из узлов промежутка $[x_{l-2}, x_{l+1}]$ возможного положения точки перегиба интерполируемой функции. В этом случае задача сохранения кусочной выпуклости при интерполяции состоит в наследовании набором коэффициентов $\{\beta_i\}$ знаковой схемы последовательности $\{\Delta_i\}$.

2. Наследование решением системы знаковой схемы ее правой части

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d} \tag{8}$$

с трехдиагональной матрицей $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ порядка m ($a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$). Матрица $\boldsymbol{A}$ имеет только неотрицательные элементы, а в векторе правой части $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_m)^T$ элементы меняют знак с "+" на "−", а именно

$$d_1 > 0, \ldots, d_{l-1} > 0, \quad d_l < 0, \ldots, d_m < 0. \tag{9}$$

Нас интересует вопрос, при каких условиях знаки компонент решения $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)^T$ будут соответствовать знакам компонент правой части, т. е. будет выполнено

$$z_1 > 0, \ldots, z_{l-1} > 0, \quad z_l < 0, \ldots, z_m < 0. \tag{10}$$

Отметим, что мы рассматриваем случай обязательного наличия в системах неравенств (9) и (10) смены знаков, т. е. l может принимать значения $2, \ldots, m$.

Идея получения условий наследования решением системы (8) полностью положительной знаковой схемы правой части заключается в сведении задачи к системе с матрицей монотонного вида [13, § 23]. В лемме Мирошниченко [1, Lemma 1] такое сведение осуществлено путем домножения слева обеих частей равенства (8) на некоторую трехдиагональную матрицу $\boldsymbol{G}$. В нашем же случае матрица $\boldsymbol{G}$ будет немного сложнее.

Следуя [6], введем пятидиагональную матрицу $\boldsymbol{G} = (g_{ij})_{i,j=1}^m$ порядка m, определяемую через элементы матрицы $\boldsymbol{A}$, у которой вне трех основных диагоналей могут быть ненулевыми не более двух элементов

$$g_{l-2,l} = \frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}}{w_l} \quad \text{при } l > 2, \quad g_{l+1,l-1} = \frac{a_{l,l-1}a_{l+1,l}}{w_l} \quad \text{при } l < m,$$

где $w_l = a_{l-1,l-1}a_{l,l} - a_{l-1,l}a_{l,l-1}$. На главной диагонали все элементы равны 1, а на примыкающих диагоналях элементы задаются выражениями

$$\begin{aligned}
&g_{i,i-1} = -\frac{a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}}, \quad i \neq l, l+1; \quad g_{i,i+1} = -\frac{a_{i,i+1}}{a_{i+1,i+1}}, \quad i \neq l-2, l-1;\\
&g_{l-2,l-1} = -\frac{a_{l-2,l-1}a_{l,l}}{w_l} \quad \text{при } l > 2, \quad g_{l+1,l} = -\frac{a_{l-1,l-1}a_{l+1,l}}{w_l} \quad \text{при } l < m,\\
&g_{l-1,l} = g_{l,l-1} = 0.
\end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы трехдиагональная система* (8) *с неотрицательными элементами, диагональным преобладанием и правой частью* $\boldsymbol{d}$*, удовлетворяющей условию* (9)*, имела решение* $\boldsymbol{z}$*, подчиненное условию* (10)*, достаточно, чтобы для компонент вектора* $\boldsymbol{Gd}$ *выполнялись неравенства*

$$(\boldsymbol{Gd})_1 > 0, \dots, (\boldsymbol{Gd})_{l-1} > 0, \quad (\boldsymbol{Gd})_l < 0, \dots, (\boldsymbol{Gd})_m < 0. \tag{11}$$

Доказательство. Утверждение теоремы можно получить, опираясь на работу [5], мы же будем проводить рассуждения следуя работе [6], в которой рассмотрен случай диагонального преобладания по столбцам.

Рассмотрим диагональную матрицу $\boldsymbol{D}$ с диагональными элементами, являющимися знаками элементов вектора $\boldsymbol{d}$, т. е. $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\operatorname{sign} d_1, \dots, \operatorname{sign} d_m)$. Поэтому все компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{Dd}$ будут положительными. Вектор $\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Dz}$ также будет отличаться от $\boldsymbol{z}$ лишь изменением знаков у компонент, начиная с номера l. Тогда систему уравнений (8) можно переписать в виде

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\boldsymbol{d}}, \tag{12}$$

где $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{DAD}$. Условие теоремы о наследовании решением $\boldsymbol{z}$ системы уравнений (8) знаковой схемы правой части $\boldsymbol{d}$ теперь равносильно положительности компонент решения $\tilde{\boldsymbol{z}}$ системы (12).

Матрица $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ трехдиагональная с положительной главной диагональю и отличается от исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ лишь знаками двух элементов вне главной диагонали, а именно,

$$\tilde{a}_{l-1,l} = -a_{l-1,l}, \quad \tilde{a}_{l,l-1} = -a_{l,l-1}.$$

Значит, $\tilde{\boldsymbol{A}}$, как и $\boldsymbol{A}$, — матрица с диагональным преобладанием.

Домножим обе части системы (12) на матрицу $\tilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{DGD}$, в результате приходим к системе уравнений

$$\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{d}}. \tag{13}$$

Покажем, что матрица этой системы $\bar{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{A}}$ является матрицей монотонного вида.

Известно (см., например, [14, с. 334]), что матрица с диагональным преобладанием будет матрицей монотонного вида, если

$$a_{i,i} > 0, \quad a_{i,j} \le 0 \quad (j \ne i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрица $\bar{\boldsymbol{A}} = (\bar{a}_{ij})$ имеет почти пятидиагональную структуру, вне пяти диагоналей находятся только один или два ненулевых элемента. Для удобства введем фиктивные величины

$$\begin{aligned}
&a_{0,0} = a_{m+1,m+1} = 1,\\
&a_{i,j} = 0 \quad (i \ne j) \quad \text{при } i < 1 \text{ или } j < 1 \text{ или } i > m \text{ или } j > m,\\
&\bar{a}_{1,-1} = \bar{a}_{2,0} = \bar{a}_{m-1,m+1} = \bar{a}_{m,m+2} = 0.
\end{aligned}$$

Элементы главной диагонали имеют вид

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{i,i} = -\frac{a_{i-1,i}a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}} + a_{i,i} - \frac{a_{i,i+1}a_{i+1,i}}{a_{i+1,i+1}}, \quad i \ne l-2, l-1, l, l+1;\\
&\bar{a}_{l-2,l-2} = -\frac{a_{l-3,l-2}a_{l-2,l-3}}{a_{l-3,l-3}} + a_{l-2,l-2} - \frac{a_{l,l}a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{w_l} \quad \text{при } l > 2,\\
&\bar{a}_{l-1,l-1} = -\frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{a_{l-2,l-2}} + a_{l-1,l-1}, \quad \bar{a}_{l,l} = -\frac{a_{l,l+1}a_{l+1,l}}{a_{l+1,l+1}} + a_{l,l},\\
&\bar{a}_{l+1,l+1} = -\frac{a_{l-1,l-1}a_{l,l+1}a_{l+1,l}}{w_l} + a_{l+1,l+1} - \frac{a_{l+1,l+2}a_{l+2,l+1}}{a_{l+2,l+2}} \quad \text{при } l < m.
\end{aligned}$$

Элементами первых диагоналей, примыкающих к главной, являются нули, кроме, может быть, двух, которые неположительны: $\bar{a}_{l-1,l} = -a_{l-1,l}$, $\bar{a}_{l,l-1} = -a_{l,l-1}$. На вторых примыкающих диагоналях стоят только неположительные элементы

$$\bar{a}_{i,i-2} = -\frac{a_{i,i-1}a_{i-1,i-2}}{a_{i-1,i-1}}, \quad i \neq l, l+1; \quad \bar{a}_{i,i+2} = -\frac{a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}}{a_{i+1,i+1}}, \quad i \neq l-2, l-1;$$
$$\bar{a}_{l-2,l} = 0 \quad \text{при } l > 2, \quad \bar{a}_{l-1,l+1} = 0 \quad \text{при } l < m, \quad \bar{a}_{l,l-2} = \bar{a}_{l+1,l-1} = 0.$$

На третьих примыкающих диагоналях при $2 < l < m$ ненулевыми могут быть только два элемента, которые также неположительны:

$$\bar{a}_{l+1,l-2} = -\frac{a_{l-1,l-2}a_{l,l-1}a_{l+1,l}}{w_l}, \quad \bar{a}_{l-2,l+1} = -\frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}a_{l,l+1}}{w_l}.$$

Остальные элементы матрицы $\bar{\boldsymbol{A}}$ равны нулю. Таким образом, в каждой строке не более трех ненулевых элементов, и все элементы, не лежащие на главной диагонали, неположительны.

Теперь проверим, что сумма элементов матрицы $\bar{\boldsymbol{A}}$ в каждой строке положительна, что будет означать наличие диагонального преобладания и положительность диагональных элементов. Нам достаточно это проверить лишь для строк с номерами $l-2$, $l-1$, l, $l+1$, для остальных строк такая проверка проведена в [1]. Начнем рассмотрение со строки с номером $l-1$, имеем

$$\bar{a}_{l-1,l-3} + \bar{a}_{l-1,l-1} + \bar{a}_{l-1,l} = -\frac{a_{l-1,l-2}a_{l-2,l-3}}{a_{l-2,l-2}} - \frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{a_{l-2,l-2}} + a_{l-1,l-1} - a_{l-1,l}$$
$$= (-a_{l-2,l-3} + a_{l-2,l-2} - a_{l-2,l-1})\frac{a_{l-1,l-2}}{a_{l-2,l-2}} + (-a_{l-1,l-2} + a_{l-1,l-1} - a_{l-1,l}).$$

Полученное выражение положительно, поскольку ввиду диагонального доминирования матрицы $\boldsymbol{A}$ слагаемые в скобках положительны. Аналогично вычисляется сумма элементов в строке с номером l.

Далее рассмотрим строку с номером $l-2$ (при $l > 2$), в этом случае

$$\bar{a}_{l-2,l-4} + \bar{a}_{l-2,l-2} + \bar{a}_{l-2,l+1}$$
$$= -\frac{a_{l-2,l-3}a_{l-3,l-4}}{a_{l-3,l-3}} - \frac{a_{l-3,l-2}a_{l-2,l-3}}{a_{l-3,l-3}} + a_{l-2,l-2} - \frac{a_{l,l}a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{w_l} - \frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}a_{l,l+1}}{w_l}$$
$$= (-a_{l-3,l-4} + a_{l-3,l-3} - a_{l-3,l-2})\frac{a_{l-2,l-3}}{a_{l-3,l-3}} + (-a_{l-2,l-3} + a_{l-2,l-2} - a_{l-2,l-1})$$
$$+ (-a_{l-1,l-2} + a_{l-1,l-1} - a_{l-1,l})\frac{a_{l-2,l-1}a_{l,l}}{w_l} + (-a_{l,l-1} + a_{l,l} - a_{l,l+1})\frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}}{w_l}.$$

Положительность выражений в скобках также обеспечивается диагональным преобладанием, что приводит к положительности всего выражения. Аналогичным образом проверяется положительность суммы элементов строки $l+1$.

Итак, мы установили, что матрица системы (13) является матрицей монотонного вида. Поэтому, если компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{d}}$ правой части неотрицательны, то вектор $\tilde{\boldsymbol{z}}$ решения тоже будет иметь только неотрицательные компоненты. А это эквивалентно совпадению знаковых схем векторов $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{G}\boldsymbol{d}$, поскольку $\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{G}\boldsymbol{d}$ и $\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}$. Таким образом, при выполнении (11) знаковые схемы векторов $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{z}$ совпадают. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 1 будет справедливым, если в соотношениях (9)–(11) использовать нестрогие неравенства (следует из предельного перехода). Однако равенство нулю компонент вектора $\boldsymbol{d}$ не позволяет получить правильный (в смысле наследования) знак компонент вектора $\boldsymbol{G}\boldsymbol{d}$, а, следовательно, и вектора решения $\boldsymbol{z}$. Например, если только одна компонента d_i $(i < l-1)$ равна нулю, то соответствующая компонента $(\boldsymbol{G}\boldsymbol{d})_i$ вектора $\boldsymbol{G}\boldsymbol{d}$ будет строго отрицательной, т. е. неравенства (11) выполняться не будут (даже нестрогие). Поэтому теорема останется содержательной, если допустить нестрогие неравенства только в (10) и (11), но в этом случае слово "наследование" имеет неоднозначный смысл.

3. Условия комонотонности и ковыпуклости

Вернемся к нашей задаче формосохранения при интерполяции параболическим сплайном по Субботину. Мы считаем, что интерполируемые данные таковы, что в последовательностях разделенных разностей $\{\delta_i\}$ и/или $\{\Delta_i\}$ есть перемены знаков, т. е. выполнены условия (2), (3). Рассмотренные системы определяющих уравнений (6) и (7) являются трехдиагональными и присутствует диагональное преобладание, следовательно, можно применить теорему 1. Выполнение неравенств (11) для этих систем является условием наследования векторами коэффициентов $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ знаковых схем векторов $\{\delta_i\}$, $\{\Delta_i\}$. В этом случае леммы 1 и 2 говорят о наследовании сплайном формы данных. Таким образом, справеливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Если направление монотонности данных меняется с возрастания на убывание, т. е. выполнены условия* (2)*, то параболический сплайн по Субботину $s(x)$ будет комонотонным при выполнении следующих условий*:

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta_1 \geq 0,$$

$$\delta_i - \frac{\lambda_i}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}\delta_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\delta_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, l-3,$$

$$\delta_{l-2} - \frac{\lambda_{l-2}}{2+\mu_{l-3}+\lambda_{l-2}}\delta_{l-3} - \frac{\mu_{l-1}(2+\mu_l+\lambda_{l+1})}{\omega_l}\delta_{l-1} + \frac{\mu_{l-1}\mu_l}{\omega_l}\delta_l \geq 0,$$

$$\delta_{l-1} - \frac{\lambda_{l-1}}{2+\mu_{l-2}+\lambda_{l-1}}\delta_{l-2} \geq 0, \quad \delta_l - \frac{\mu_{l+1}}{2+\mu_{l+1}+\lambda_{l+2}}\delta_{l+1} \leq 0,$$

$$\delta_{l+1} + \frac{\lambda_l\lambda_{l+1}}{\omega_l}\delta_{l-1} - \frac{\lambda_{l+1}(2+\mu_{l-1}+\lambda_l)}{\omega_l}\delta_l - \frac{\mu_{l+2}}{2+\mu_{l+2}+\lambda_{l+3}}\delta_{l+2} \leq 0,$$

$$\delta_i - \frac{\lambda_i}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}\delta_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\delta_{i+1} \leq 0, \quad i = l+2, \ldots, n-2,$$

$$\delta_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta_{n-2} - \frac{1}{4}\delta_n \leq 0,$$

где $\omega_l = (2+\mu_{l-1}+\lambda_l)(2+\mu_l+\lambda_{l+1}) - \mu_l\lambda_l$.

Теорема 3. *Если направление выпуклости данных меняется с выпуклости вниз на выпуклость вверх, т. е. выполнены условия* (3)*, то параболический сплайн по Субботину $s(x)$ будет ковыпуклым при выполнении следующих условий:*

$$\Delta_0 - \frac{1}{3}\Delta_1 \geq 0,$$

$$\Delta_i - \frac{\mu_i}{3}\Delta_{i-1} - \frac{\lambda_i}{3}\Delta_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, l-3,$$

$$\Delta_{l-2} - \frac{\mu_{l-2}}{3}\Delta_{l-3} - \frac{3\lambda_{l-2}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_l + \frac{\lambda_{l-2}\lambda_{l-1}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_l \geq 0,$$

$$\Delta_{l-1} - \frac{\mu_{l-1}}{3}\Delta_{l-2} \geq 0,$$

$$\Delta_{l+1} + \frac{\mu_l\mu_{l+1}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_{l-1} - \frac{3\mu_{l+1}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_l - \frac{\lambda_{l+1}}{3}\Delta_{l+2} \leq 0,$$

$$\Delta_l - \frac{\lambda_l}{3}\Delta_{l+1} \leq 0,$$

$$\Delta_i - \frac{\mu_i}{3}\Delta_{i-1} - \frac{\lambda_i}{3}\Delta_{i+1} \le 0, \quad i = l+2, \dots, n-1,$$

$$\Delta_n - \frac{1}{3}\Delta_{n-1} \le 0.$$

З а м е ч а н и е. В случае обратной перемены направлений монотонности и выпуклости, т. е. смены знаков в последовательностях разделенных разностей с “$-$” на “$+$” в утверждениях теорем 2 и 3 знаки неравенств меняются на противоположные.

Если в интерполируемых данных отсутствует перемена направлений монотонности, т. е. данные строго монотонны, то в соответствии с [4, теорема 3], параболический сплайн по Субботину будет монотонным при выполнении условий

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta_1 \ge 0,$$

$$\delta_i - \frac{\lambda_i}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}\delta_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\delta_{i+1} \ge 0, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

$$\delta_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta_{n-2} - \frac{1}{4}\delta_n \ge 0.$$

Отметим, что эти условия, как и условия теорем 2 и 3, всего лишь достаточные и не являются необходимыми. Вместе с тем, если $f'(x) > 0$ на $[a, b]$ и есть возможность выбора точек интерполяции, то путем загущения сетки, т. е. введения дополнительных точек интерполяции, всегда можно добиться выполнения этих достаточных условий монотонности. Покажем, что этого можно добиться даже при равномерном распределении данных.

Теорема 4. *Пусть $f \in C^1[a, b]$ и $f'(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда найдется такое значение шага сетки h, что параболический сплайн по Субботину $s(x)$, интерполирующий $f(x)$ на любой равномерной сетке* (1) *с шагом $h_i \le h$, будет возрастающим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку сетка равномерная, то достаточно добиться выполнения условий

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{1}{6}\delta_1 \ge 0, \tag{14}$$

$$\delta_i - \frac{1}{6}\delta_{i-1} - \frac{1}{6}\delta_{i+1} \ge 0, \quad i = 1, \dots, n-2, \tag{15}$$

$$\delta_{n-1} - \frac{1}{6}\delta_{n-2} - \frac{1}{4}\delta_n \ge 0. \tag{16}$$

Пусть $K > 0$ будет число такое, что $f'(x) \ge K$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда имеем

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{1}{6}\delta_1 = f[x_0, x_1] - \frac{1}{4}f'_a - \frac{1}{6}f[x_1, x_2] = \frac{7}{12}f[x_0, x_1] + \frac{1}{4}(f[x_0, x_1] - f'_a) + \frac{1}{6}(f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2])$$

$$\ge \frac{7}{12}K - \frac{1}{4}\omega(f'; h) - \frac{1}{6}\cdot 2\omega(f'; h) = \frac{7}{12}K - \frac{7}{12}\omega(f'; h),$$

где $\omega(f'; h)$ — модуль непрерывности функции $f'(x)$. Поскольку $\omega(f'; h) \to 0$ при $h \to 0$, то начиная с некоторого h неравенство (14) будет выполняться. Подобным образом показывается выполнение неравенств (15) и (16). Теорема доказана.

Отметим, что неравенства (15) для равномерной сетки гарантировано выполняются, если соседние разделенные разности отличаются не более чем в 3 раза.

Достаточные условия теоремы 2 (условия кусочной монотонности) в сравнении с условиями строгой монотонности усложняются. Смена направления монотонности в l-м узле приводит к появлению “нестандартных” неравенств (с номерами $l-2$, $l-1$, l, $l+1$). Следовательно, если расширять утверждение теоремы 2 на случай нескольких перемен направления монотонности данных, то номера компонент, соответствующих смене знаков в последовательности разделенных разностей $\{\delta_i\}$, должны быть достаточно удалены друг от друга, т. е. участки знакопостоянства должны состоять не менее чем из четырех разностей. Среди набора неравенств, формирующих условия кусочной монотонности, для каждой смены направления монотонности будут четыре обозначенных “нестандартных” неравенства.

Но даже для одной перемены направления монотонности мы не можем гарантировать выполнения условий на густой сетке. Условия кусочной монотонности более капризны, наличие точек локального экстремума интерполируемой функции ведет к тому, что разделенные разности, вычисленные по значениям вблизи точки экстремума, могут быть нулевыми или близкими к нулю, что препятствует выполнению условий кусочной монотонности.

Аналогичные рассуждения справедливы и относительно кусочной выпуклости.

Наряду с интерполяционными параболическими сплайнами по Субботину распространены сплайны по Марсдену [15]. В отличие от сплайна по Субботину для сплайна по Марсдену задается сетка узлов сплайна, а условия интерполяции ставятся в узлах вспомогательной сетки между узлами исходной. Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в целом эти два разных сплайна обладают различными аппроксимативными свойствами. Несмотря на принципиальные различия интерполянтов, между сплайнами по Субботину и по Марсдену существует тесная связь, и между аппроксимативными свойствами этих разных конструкций был переброшен своеобразный мостик [16], — матрицы систем определяющих уравнений в одном подходе являются транспонированными от соответствующих матриц в другом. Явный вид линейных систем уравнений относительно коэффициентов разложения по B-сплайнам как первой производной интерполяционного сплайна по Марсдену, так и второй производной приведен в [4, с. 147–148]. Так например, матрицам систем уравнений (6) и (7) для параболического сплайна по Субботину будут соответствовать транспонированные матрицы систем относительно коэффициентов разложения второй и, соответственно, первой производных по B-сплайнам интерполяционного сплайна по Марсдену. Поэтому можно легко установить аналоги теорем 2 и 3 для сплайнов по Марсдену. Скажем, что система неравенств теоремы 3 превращается в достаточные условия кусочной монотонности для интерполяционных сплайнов по Марсдену при замене вторых разделенных разностей от исходных данных на первые.

4. Численные примеры

Для иллюстрации работы условий комонотонности параболического сплайна по Субботину рассмотрим интерполяцию функции $f(x) = 1 - (e^{15|x|} - e^{-15|x|})/(e^{15} - e^{-15})$ на отрезке $[-1, 1]$. При интерполяции значений $f(x)$, заданных на сетке из 11 узлов, сплайн с хорошей точностью восстанавливает $f(x)$ (рис. 1а), однако он не наследует геометрическую форму интерполируемой функции. На графике производной (рис. 1б) можно увидеть нежелательные осцилляции вблизи точки $x = 0$.

Условия комонотонности теоремы 2, гарантирующие наследование формы, нарушаются — выполняются только крайние из неравенств. Сетка достаточно редка для сильно меняющейся функции, соседние разделенные разности отличаются более чем в 10 раз (см. таблицу).

Значения разделенных разностей функции $f(x)$ на сетке из 11 узлов

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ_i	3.8	4.8	0.2	0.02	$5.9\cdot10^{-4}$	$3.1\cdot10^{-5}$	$-3.1\cdot10^{-5}$	$-5.9\cdot10^{-4}$	-0.02	-0.2	-4.8	-3.8

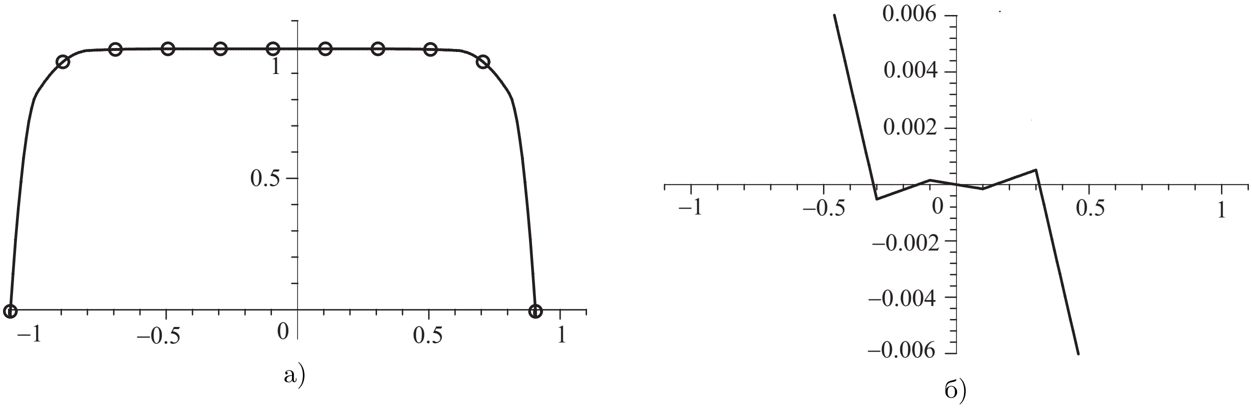

Рис. 1. Интерполяция параболическим сплайном на сетке из 11 узлов, условия теоремы 2 нарушены; а) сплайн; б) производная.

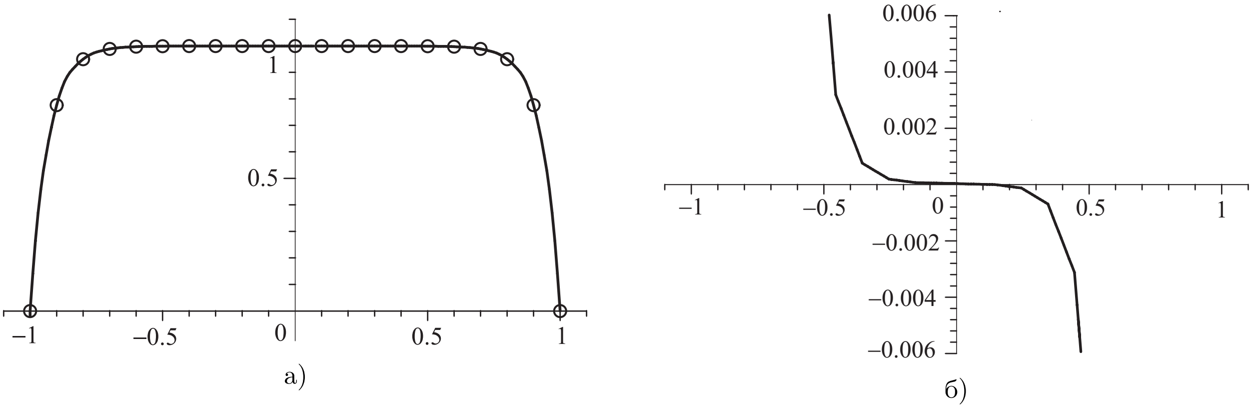

Рис. 2. Интерполяция параболическим сплайном на сетке из 21 узла, условия теоремы 2 выполнены; а) сплайн; б) производная.

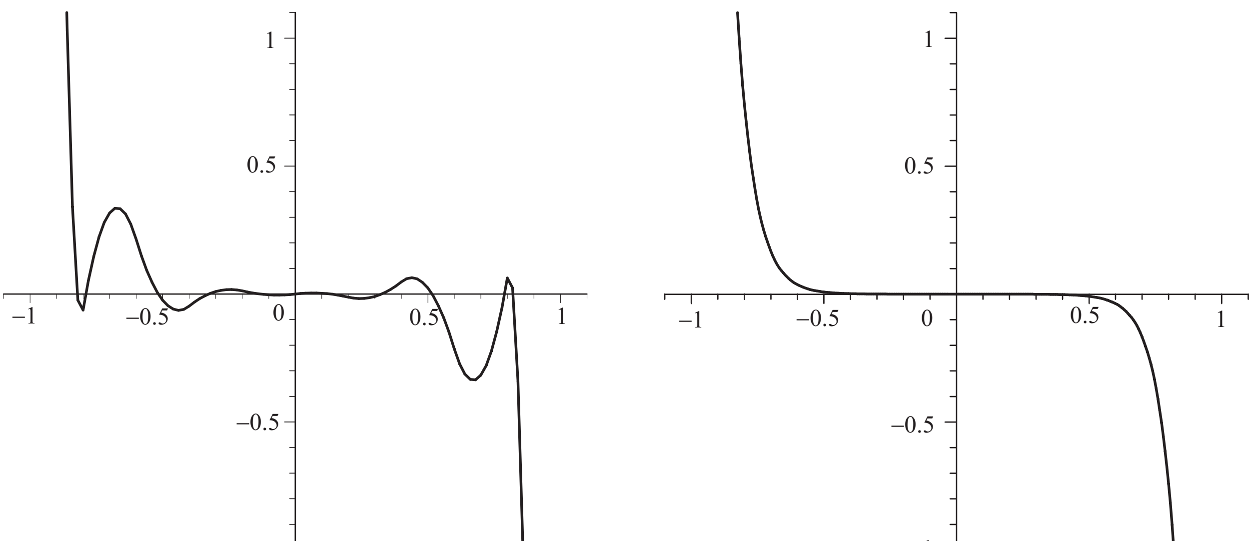

Рис. 3. Интерполяция кубическим сплайном: а) производная сплайна на сетке из 11 узлов, условия нарушены; б) производная сплайна на сетке из 31 узла, условия выполнены.

Проверка условий комонотонности при интерполяции значений на более густой сетке из 21 узла (рис. 2а) показывает, что они уже выполняются (отношение соседних разностей не более 5). Поэтому гарантированно сплайн, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке из 21 узла, является комонотонным, что иллюстрируется графиком его производной (рис. 2б).

Полученные в [6, терема 4] аналогичные условия для классического кубического сплайна (гладкости C^2 с узлами, совпадающими с точками интерполяции) на этих же данных для сетки из 11 узлов также не выполняются. Проверка условий комонотонности показала, что на сетке из 21 узла условия все еще не выполняются. Увеличение количества узлов сетки до 31 узла уже приводит к выполнению условий. На рис. 3а и 3б изображена производная кубического сплайна на сетке из 11 узлов и сетке из 31 узла соответственно.

Отметим, что условия комонотонности для кубического сплайна более жесткие, чем для параболического, труднее добиться их выполнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miroshnichenko V. L.** Convex and monotone spline interpolation // Constructive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984. P. 610–620.
2. **Мирошниченко В. Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов // Вычислительные системы: сб. ст. / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1991. Вып. 142: Сплайны и их приложения. С. 3–14.
3. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами / Ю. С. Волков, В. В. Богданов, В. Л. Мирошниченко, В. Т. Шевалдин // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 836–844.
4. **Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.** Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
5. **Завьялов Ю. С.** О неотрицательном решении системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1303–1307.
6. **Богданов В. В.** Достаточные условия комонотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C^2 // Мат. тр. 2011. Т. 14, № 2. С. 3–13.
7. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционых кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.
8. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.
9. **Богданов В. В.** Достаточные условия неотрицательности решения системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 544–550.
10. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
11. **Волков Ю. С.** О монотонной интерполяции кубическими сплайнами // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 14–24.
12. **Богданов В. В., Волков Ю. С.** Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.
13. **Collatz L.** Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin: Springer-Verlag, 1964. 371 p.
14. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
15. **Marsden M.** Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 5. P. 903–906.
16. **Волков Ю. С.** Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.

Богданов Владимир Васильевич
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: bogdanov@math.nsc.ru

Поступила 15.09.2016

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент, зам. директора
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Miroshnichenko V. L. Convex and monotone spline interpolation. *Constructive Theory of Function, Proc. Int. Conf., Varna, 1984*, Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984, pp. 610–620.
2. Miroshnichenko V. L. Sufficient conditions for monotonicity and convexity of parabolic spline interpolants. *Siberian Adv. Math.*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 101–107.
3. Volkov Yu. S., Bogdanov V. V., Miroshnichenko V. L., Shevaldin V. T. Shape-preserving interpolation by cubic splines. *Math. Notes.*, 2010, vol. 88, no. 6, pp. 798–805.
4. Volkov Yu. S., Shevaldin V. T. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 145–152 (in Russian).
5. Zav'yalov Yu. S. On a nonnegative solution of a system of equations with a nonstrictly jacobian matrix. *Sib. Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1143–1147.
6. Bogdanov V. V. Sufficient conditions for the comonotone interpolation of cubic C^2 splines. *Sib. Adv. Math.*, 2012, vol. 22, no. 3, pp. 153–160.
7. Volkov Yu. S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 65, no. 1, pp. 13–15.
8. Volkov Yu. S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 215–224.
9. Bogdanov V. V. Sufficient conditions for the nonnegativity of solutions to a system of equations with a nonstrictly jacobian matrix. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 425–430.
10. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splajny v vychislitelnoj matematike* (Splines in numerical mathematics). Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p. (in Russian).
11. Volkov Y.S. On monotone interpolation by cubic splines. *Vychisl. Tekhn.*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 14–24 (in Russian).
12. Bogdanov V.V., Volkov Yu.S. Selection of parameters of generalized cubic splines with convexity preserving interpolation. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 1, pp. 5–22 (in Russian).
13. Collatz L. *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik.* Berlin: Springer-Verlag, 1964, 371 p.
14. Zav'yalov Y.S., Kvasov, B.I., Miroshnichenko, V.L. *Metody splajn-funkcij* (Methods of spline functions). Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p. (in Russian).
15. Marsden M. Quadratic spline interpolation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 80, no. 5, pp. 903–906.
16. Volkov Yu. S.Interpolation by splines of even degree according to Subbotin and Marsden. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 7, pp. 994–1012.

V. V. Bogdanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: e-mail: bogdanov@math.nsc.ru .

Yu. S. Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: volkov@math.nsc.ru .