ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.856

ВАРИАНТ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Г. Жадан

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования в стандартной постановке. Для ее решения предлагается вариант двойственного симплекс-метода, обобщающий соответствующий метод для задач линейного программирования. Приводится описание перехода из одной крайней точки допустимого множества в другую крайнюю точку. Дается обоснование сходимости метода.

Ключевые слова: линейная задача полуопределенного программирования, двойственная задача, крайние точки, двойственный симплекс-метод.

V. G. Zhadan. A variant of the dual simplex method for a linear semidefinite programming problem.

A linear semidefinite programming problem in the standard statement is considered, and a variant of the dual simplex method is proposed for its solution. This variant generalizes the corresponding method for linear programming problems. The transfer from an extreme point of the feasible set to another extreme point is described. The convergence of the method is proved.

Keywords: linear semidefinite programming problem, dual problem, extreme points, dual simplex method.

MSC: 90C22

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-90-100

Введение

Линейные задачи полуопределенного программирования являются важным обобщением задач линейного программирования [1; 2]. В свою очередь они представляют собой частный случай задач конического программирования, где переменные должны принадлежать замкнутому выпуклому конусу (в полуопределенном программировании в качестве такого конуса берется конус симметричных положительно полуопределенных матриц). Многие выпуклые нелинейные задачи математического программирования, а также задачи дискретной и комбинаторной оптимизации сводятся к указанным постановкам [3; 4]. Поэтому понятен интерес к численным методам решения таких задач.

К настоящему времени наиболее хорошо разработаны методы внутренней точки, главным образом аффинно-масштабирующего типа [4]. Наряду с ними были предложены обобщения прямого симплекс-метода, причем как для задач полуопределенного программирования, так и для задач конического программирования [5–7].

Одна из трудностей при перенесении симплекс-метода на задачи полуопределенного программирования в стандартной постановке заключается в том, что количество ограничений типа равенства, как правило, не является “треугольным” числом, т. е. числом элементов симметричной матрицы, стоящих на диагонали и под диагональю. Это требует специального перехода из одной крайней точки допустимого множества в другую крайнюю точку в данной ситуации. Возможный способ такого перехода в прямом симплекс-методе был описан в [8]. В настоящей работе аналогичный прием используется при обобщении двойственного симплекс-метода.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-01-08259), а также при содействии Программы ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1) и Программы РАН I.33 П.

Работа состоит из трех разделов. В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся условия оптимальности. В разд. 2 и 3 рассматривается отдельно переход из одной крайней точки допустимого множества двойственной задачи в другую крайнюю точку в зависимости от того, выполняется ли неравенство, связывающее ранг матрицы двойственной невязки с числом ограничений в задаче, как равенство или нет. В конце разд. 3 дается обоснование локальной сходимости метода.

1. Постановка задачи и условия оптимальности

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n. Пусть, кроме того, $\mathbb{S}^n_+$ — подмножество из $\mathbb{S}^n$, состоящее из положительно полуопределенных матриц. Множество $\mathbb{S}^n_+$ является конусом в $\mathbb{S}^n$. Для указания на то, что матрица $M \in \mathbb{S}^n$ положительно полуопределена, будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$. Конус $\mathbb{S}^n_+$ не является полиэдральным, его размерность равняется “треугольному” числу $n_\triangle = n(n+1)/2$.

Скалярное (внутреннее) произведение между двумя матрицами M_1 и M_2, обозначаемое $M_1 \bullet M_2$, определяется следующим образом: $M_1 \bullet M_2 = \operatorname{tr}(M_1^T M_2)$, т.е. сумма всех произведений элементов матриц M_1 и M_2, стоящих на одинаковых позициях. Если M_1 и M_2 — две положительно полуопределенные матрицы из $\mathbb{S}^n$, то $M_1 \bullet M_2 \geq 0$ и $M_1 \bullet M_2 = 0$ в том и только в том случае, когда $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0_{nn}$. Конус $\mathbb{S}^n_+$ является самосопряженным [4].

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\min\ C \bullet X, \quad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad X \succeq 0. \tag{1.1}$$

Здесь все матрицы C, X и A_i, $1 \leq i \leq m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$. Относительно матриц A_i, $1 \leq i \leq m$, считаем, что они линейно независимы.

Двойственной к (1.1) является задача

$$\max\ \langle b, u \rangle, \quad V = V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \succeq 0, \tag{1.2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, угловые скобки обозначают обычное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что обе задачи (1.1) и (1.2) имеют решения и $b \neq 0_m$.

Пусть $\mathcal{F}_D$ — допустимое множество в двойственной задаче (1.2), т.е.

$$\mathcal{F}_D = \left\{ [u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n_+ \colon V = V(u) \right\}.$$

Проекцией $\mathcal{F}_D$ на пространство $\mathbb{R}^m$ является множество

$$\mathcal{F}_{D,u} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \colon [u, V] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } V \in \mathbb{S}^n_+ \right\}.$$

Условия оптимальности для пары задач (1.1) и (1.2) заключаются в существовании $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$, удовлетворяющих следующей системе равенств:

$$X \bullet V = 0, \quad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad V = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i. \tag{1.3}$$

Представим данные равенства в несколько ином виде, используя операцию векторизации матриц.

Для квадратной матрицы M порядка n обозначим через $\operatorname{vec} M$ вектор-столбец длины n^2, являющийся прямой суммой столбцов M. Если матрица M — симметричная, то вместо $\operatorname{vec} M$ целесообразно пользоваться вектором-столбцом $\operatorname{svec} M$, имеющим меньшую размерность $n_\triangle$. В него помещаются нижние части столбцов M, начинающиеся с диагонального элемента, причем все внедиагональные элементы умножаются на $\sqrt{2}$. Тогда скалярное произведение $M_1 \bullet M_2$

между двумя матрицами $M_1 \in \mathbb{S}^n$ и $M_2 \in \mathbb{S}^n$ записывается как обычное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n_\triangle}$, т. е. $M_1 \bullet M_2 = \langle \operatorname{svec} M_1, \operatorname{svec} M_2 \rangle$. Таким образом, равенства (1.3) с помощью векторных представлений матриц принимают вид:

$$\langle \operatorname{svec} X, \operatorname{svec} V \rangle = 0, \quad \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X = b, \quad \operatorname{svec} V = \operatorname{svec} C - \mathcal{A}_{svec}^T u. \tag{1.4}$$

Здесь через $\mathcal{A}_{svec}$ обозначена матрица размера $m \times n_\triangle$ со строками $\operatorname{svec} A_i$, $1 \le i \le m$.

Ниже рассматривается численный метод решения задачи (1.2), а следовательно и (1.1), основанный на решении системы (1.4) специальным образом. Его можно трактовать как обобщение двойственного симплекс-метода для задач линейного программирования. В нем все точки итерационного процесса в пространстве $\mathbb{R}^m$ принадлежат границе множества $\mathcal{F}_{D,u}$ и являются крайними точками этого множества.

Возьмем точку $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, которой соответствует двойственная невязка $V = V(u)$. Пусть $\operatorname{rank} V = s$ и пусть $s_\triangle = s(s+1)/2$ — s-е “треугольное” число. Для того чтобы u была *крайней* точкой множества $\mathcal{F}_{D,u}$, необходимо, чтобы ранг матрицы V удовлетворял неравенству $s_\triangle \le n_\triangle - m$ (см. [4]). Поскольку здесь присутствуют “треугольные” числа и между соседними “треугольными” числами существуют разрывы, может оказаться, что для конкретных n и m из определения задачи (1.1) данное неравенство выполняется только как строгое. Назовем крайнюю точку u *регулярной*, если $s_\triangle = n_\triangle - m$. Иначе, когда $s_\triangle < n_\triangle - m$, крайнюю точку u назовем *нерегулярной*.

2. Итерация в регулярной точке

Пусть задана начальная крайняя точка $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ и строится последовательность крайних точек $\{u_k\}$, причем таким образом, что соответствующие значения целевой функции в задаче (1.2) монотонно возрастают от итерации к итерации.

Предположим, что $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ — текущая крайняя точка, в которой матрица двойственной невязки $V = V(u)$ имеет ранг $s < n$. Для матрицы V справедливо разложение $V = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица; θ — вектор собственных значений V. Так как V — матрица неполного ранга, то матрицу H и вектор θ можно разбить на две части в соответствии с нулевыми и положительными собственными значениями V. Считаем для определенности, что это разбиение имеет вид

$$H = [H_B, H_N], \quad \theta = [\theta_B, \theta_N], \quad \theta_B = 0_r, \quad \theta_N > 0_s, \quad r = n - s. \tag{2.1}$$

В соответствии с (2.1) разложим пространство $\mathbb{S}^n$ на два линейных подпространства $\mathbb{S}^n_B$ и $\mathbb{S}^n_N$. Второе подпространство $\mathbb{S}^n_N$ состоит из таких матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых только правый нижний блок порядка s может содержать ненулевые элементы. Первое подпространство $\mathbb{S}^n_B$, напротив, состоит из матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых правый нижний блок нулевой. Эти два подпространства ортогональны друг другу, и любую матрицу $M \in \mathbb{S}^n$ можно представить как $M = M_1 + M_2$, где $M_1 \in \mathbb{S}^n_B$, $M_2 \in \mathbb{S}^n_N$.

Если перейти от матрицы V к матрице $V^H = H^T V H$, т. е. к представлению V в базисе, задаваемом столбцами ортогональной матрицы H, то для V^H получаем: $V^H = V^H_B + V^H_N$, где

$$V^H_B = H^T V_B H = 0_{nn}, \quad V^H_N = H^T V_N H = \begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sr} \\ 0_{rs} & D(\theta_N) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Аналогичным образом будем поступать и с другими матрицами X, C и A_i, $1 \le i \le m$, т. е. переходить от них к матрицам $X^H = H^T X H$, $C^H = H^T C H$, $A^H_i = H^T A_i H$, разбивая каждую из них на две составляющие матрицы. Например,

$$X^H = X^H_B + X^H_N, \quad X^H_B = \begin{bmatrix} H_B^T X H_B & H_B^T X H_N \\ H_N^T X H_B & 0_{rr} \end{bmatrix}, \quad X^H_N = \begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sr} \\ 0_{rs} & H_N^T X H_N \end{bmatrix}.$$

Матрица X_B^H оказывается матрицей окаймления, если ее внедиагональные блоки ненулевые. Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ — крайняя в том и только в том случае, когда матрицы $A_{i,B}^H$, $1 \le i \le m$, линейно независимы [4].

Поскольку $X \bullet V = \mathrm{tr}\ V^H X^H = V^H \bullet X^H$, то первое равенство из (1.4) может быть переписано как $\langle \mathrm{svec}\, X, \mathrm{svec}\, V\rangle = \langle \mathrm{svec}\, X^H, \mathrm{svec}\, V^H\rangle = 0$. Кроме того, данное равенство эквивалентно следующему:

$$\langle \mathrm{svec}\, X^H, \mathrm{svec}\, V^H\rangle = \langle \mathrm{svec}\, X_B^H, \mathrm{svec}\, V_B^H\rangle + \langle \mathrm{svec}\, X_N^H, \mathrm{svec}\, V_N^H\rangle = 0. \tag{2.3}$$

Если учесть, что в точке u соответствующие матрицы V_B^H и V_N^H имеют вид (2.2), то вектор $\mathrm{svec}\, V_B^H$ — нулевой, а вектор $\mathrm{svec}\, V_N^H$ равняется $\mathrm{svec}\, D(\theta)$, т. е. у него первые $n_\triangle - s_\triangle$ компоненты также нулевые. Поэтому равенство (2.3) заведомо будет выполняться, если матрица X^H такова, что соответствующая матрица X_N^H нулевая. Число $n_\triangle - s_\triangle$ играет важную роль и всюду ниже обозначается символом l.

Пусть u не является оптимальным решением двойственной задачи (1.2), и нам желательно перейти в новую крайнюю точку $\bar{u}$ с большим значением целевой функции. Считаем сначала для простоты, что u — регулярная крайняя точка. В этом случае $m = l$.

Наряду с разбиением матрицы $M \in \mathbb{S}^n$ на компоненты $M_B \in \mathbb{S}^n_B$ и $M_N \in \mathbb{S}^n_N$ нам потребуется разбиение вектора $\mathrm{svec}\, M$ на два подвектора, а именно $\mathrm{svec}\, M = [\mathrm{svec}_B M, \mathrm{svec}_N M]^T$, где первая компонента $\mathrm{svec}_B M$ имеет размерность l, вторая компонента $\mathrm{svec}_N M$ — размерность $s_\triangle$. В частности, $\mathrm{svec}\, V^H = \left[\mathrm{svec}_B V^H, \mathrm{svec}_N V^H\right]^T$, причем с учетом регулярности точки u справедливы равенства

$$\mathrm{svec}_B V^H = \mathrm{svec}_B V_B^H = 0_m, \quad \mathrm{svec}_N V^H = \mathrm{svec}_N V_N^H = \mathrm{svec}\, D(\theta_N) \in \mathbb{R}^{s_\triangle}.$$

Пусть $\mathcal{A}_{svec}^H$ — $(m \times n_\triangle)$-матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}\, A_i^H$, $1 \le i \le m$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}_{svec_B}^H$ — подматрица матрицы $\mathcal{A}_{svec}^H$, состоящая из ее первых m столбцов, т. е. из строк $\mathrm{svec}_B\, A_i^H$. Второе равенство из условий оптимальности (1.4) с использованием введенных обозначений может быть переписано в эквивалентной векторной форме как $\mathcal{A}_{svec}^H\, \mathrm{svec}\, X^H = b$. Если теперь потребовать, чтобы $\mathrm{svec}_N X^H = 0_{s_\triangle}$, то данное равенство сведется к системе линейных уравнений относительно вектора $\mathrm{svec}_B\, X^H$:

$$\mathcal{A}_{svec_B}^H\, \mathrm{svec}_B X^H = b. \tag{2.4}$$

Так как u — крайняя точка, то матрица этой системы неособая. Поэтому, разрешая систему (2.4), получаем

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}_{svec_B}^H\right)^{-1} b. \tag{2.5}$$

Для всей матрицы $X^H \in \mathbb{S}^n$ векторное представление следующее:

$$\mathrm{svec}\, X^H = \mathrm{svec}\, X_B^H = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{A}_{svec_B}^H\right)^{-1} b \\ 0_{s_\triangle} \end{bmatrix}.$$

Отсюда, в частности, следует, что у матрицы X^H правый нижний блок порядка s — нулевой. Поэтому у нее обязательно найдутся отрицательные собственные значения, если она оказывается матрицей окаймления.

В случае, когда матрица X^H, а следовательно и подобная ей матрица X, — положительно полуопределенная, получаем, что точка u вместе с соответствующей слабой двойственной переменной $V(u)$ составляют решение двойственной задачи (1.2), поскольку выполнены все условия оптимальности (1.3). Точка X будет решением исходной задачи (1.1).

Далее предполагаем, что X не является положительно полуопределенной матрицей. Обратимся к ее разложению $X = QD(\eta)Q^T$, где Q — ортогональная матрица; η — вектор собственных значений матрицы X, совпадающих с собственными значениями матрицы $X^H = X_B^H$. Проводя векторизацию матрицы X, с помощью известной формулы

$$\mathrm{vec}\ M_1 M_2 M_3 = (M_3^T \otimes M_1)\, \mathrm{vec}\ M_2, \tag{2.6}$$

где знак $\otimes$ означает произведение матриц по Кронекеру, получаем $\mathrm{vec}\, X = (Q \otimes Q)\,\mathrm{vec}\; D(\eta)$.

Перейдем в данной формуле от $\mathrm{vec}\; X$ и $\mathrm{vec}\; D(\eta)$ к $\mathrm{svec}\, X$ и $\mathrm{svec}\, D(\eta)$. Для этого нам потребуются специальные *элиминационные* и *дуплицирующие* матрицы (см. [9]), которые мы обозначим как $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n$. Обе матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ являются матрицами полного ранга и имеют соответственно размеры $n_\triangle \times n^2$ и $n^2 \times n_\triangle$. Если M — симметричная матрица порядка n, то $\mathrm{svec}\, M = \widetilde{\mathcal{L}}_n \,\mathrm{vec}\; M$, $\mathrm{vec}\; M = \widetilde{\mathcal{D}}_n \mathrm{svec}\, M$. Используя введенные матрицы, получаем

$$\mathrm{svec}\, X = \widetilde{\mathcal{L}}_n (Q \otimes Q)\,\mathrm{vec}\; D(\eta) = \widetilde{\mathcal{L}}_n (Q \otimes Q) \widetilde{\mathcal{D}}_n\, \mathrm{svec}\, D(\eta).$$

Заметим, что $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ несколько отличаются от элиминационных и дуплицирующих матриц $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ из [9], а именно: $\widetilde{\mathcal{L}}_n = \mathrm{Diag}\,(\mathrm{svec}\, E_n)\, \mathcal{L}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n \mathrm{Diag}^{-1} (\mathrm{svec}\, E_n)$. Здесь E_n — квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице, $\mathrm{Diag}\,(a)$ — диагональная матрица с вектором a на диагонали.

Пусть q_i, $1 \le i \le n$, — столбцы ортогональной матрицы Q (собственные векторы матрицы X). Тогда X можно записать также в следующем матричном и векторном виде:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i q_i q_i^T, \quad \mathrm{vec}\; X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \left(q_i \otimes q_i \right). \tag{2.7}$$

Предположим, что η^k — отрицательное собственное значение матрицы X и q_k — соответствующий собственный вектор. Перейдем в новую точку $\bar{u}$, положив

$$\bar{u} = u - \alpha \Delta u, \tag{2.8}$$

где $\alpha > 0$. От вектора $\Delta u \in \mathbb{R}^m$ потребуем, чтобы он удовлетворял системе линейных уравнений

$$\left(\mathcal{A}^H_{svec_B} \right)^T \Delta u = \mathrm{svec}_B\, Q^H_k. \tag{2.9}$$

Здесь и ниже $Q^H_k = H^T Q_k H$, $Q_k = q_k q_k^T$. Симметричная матрица Q_k — положительно полуопределенная и имеет единичный ранг.

Поскольку матрица $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ неособая, то, разрешая данную систему, находим

$$\Delta u = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B} \right)^{-T} \mathrm{svec}_B\, Q^H_k, \tag{2.10}$$

где используется условное обозначение $M^{-T} = (M^T)^{-1}$.

Утверждение 1. *Вектор q_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(H_N)$, порожденному столбцами матрицы H_N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если допустить, что $q_k = H_N z$ для некоторого ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^s$, то должно выполняться $X q_k = X H_N z = \eta^k H_N z$. Отсюда после умножения этого равенства слева на матрицу H_N^T получаем $H_N^T X H_N z = \eta^k z$, что невозможно, поскольку матрица $H_N^T X H_N$ нулевая.

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Так как ненулевой вектор q_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(H_N)$, то его можно представить в виде

$$q_k = H_B q_k^{H,B} + H_N q_k^{H,N}, \tag{2.11}$$

причем обязательно $q_k^{H,B} = H_B^T q_k \neq 0_r$. Если $q_k^{H,N} = H_N^T q_k = 0_s$, то $q_k = H_B q_k^{H,B}$, и матрица Q_k оказывается принадлежащей грани $\mathcal{G}^*_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)$, которая является сопряженной к минимальной грани $\mathcal{G}_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)$ конуса $\mathbb{S}^n_+$, содержащей точку $V = V(u)$.

Рассмотрим вопрос о том, как изменится значение целевой функции в двойственной задаче (1.2) при переходе в новую точку $\bar{u}$.

Утверждение 2. *Имеет место следующая формула для приращения значения целевой функции в двойственной задаче*:

$$\langle b, \bar{u}\rangle = \langle b, u\rangle - \alpha\eta^k > \langle b, u\rangle. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле пересчета (2.8) $\langle b, \bar{u}\rangle = \langle b, u\rangle - \alpha\langle b, \Delta u\rangle$. Но

$$\langle b, \Delta u\rangle = \langle b, \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-T} \operatorname{svec}_B Q_k^H\rangle = \langle \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-1} b, \operatorname{svec}_B Q_k^H\rangle$$
$$= \langle \operatorname{svec}_B X_B^H,\ \operatorname{svec}_B Q_k^H\rangle = \langle \operatorname{svec} X_B^H, \operatorname{svec} Q_k^H\rangle = \langle \operatorname{vec}\ X_B^H, \operatorname{vec}\ Q_k^H\rangle.$$

Здесь мы учли, что у вектора $\operatorname{svec} X_B^H$ последние $s_\triangle$ компоненты нулевые.

Поскольку $X_B^H = X^H$, то согласно (2.7) $X^H = \sum\limits_{i=1}^m \eta^i Q_i^H$, где $Q_i^H = H^T q_i q_i^T H$. Тогда, используя (2.6), получаем: $\operatorname{vec} X_B^H = (H^T \otimes H^T) \sum\limits_{i=1}^m \eta^i \operatorname{vec}(q_i q_i^T) = (H \otimes H)^T \sum\limits_{i=1}^m \eta^i (q_i \otimes q_i)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\operatorname{vec}\ Q_k^H = (H \otimes H)^T (q_k \otimes q_k)$, приходим к $\langle \operatorname{vec}\ X_B^H, \operatorname{vec}\ Q_k^H\rangle = \eta^k$. Таким образом, выполнено (2.12).

Утверждение доказано.

Введем в рассмотрение матрицу $\Delta V^H = \sum_{i=1}^m (\Delta u)^i A_i^H$ и разобьем ее на две составляющие матрицы: $\Delta V^H = \Delta V_B^H + \Delta V_N^H$. Для первой матрицы ΔV_B^H получаем

$$\operatorname{svec}_B \Delta V_B^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \Delta u = \operatorname{svec}_B Q_k^H. \tag{2.13}$$

Поскольку правый нижний блок у матриц $A_{i,B}$, $1 \le i \le m$, нулевой, то из (2.13) следует, что $\Delta V_B^H = (Q_k^H)_B$. Отметим, что у матрицы $(Q_k^H)_B$ правый нижний блок также нулевой. Вычислим далее ΔV_N^H. Снова проводя векторизацию, получаем

$$\operatorname{svec}_N \Delta V_N^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_N}\right)^T \Delta u = \left(\mathcal{A}^H_{svec_N}\right)^T \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-T} \operatorname{svec}_B Q_k^H. \tag{2.14}$$

Формуле пересчета (2.8) соответствует формула пересчета слабой двойственной переменной

$$\bar{V}^H(\alpha) = V^H(\bar{u}) = V^H(u) + \alpha\Delta V^H. \tag{2.15}$$

Утверждение 3. *Существует* $\bar{\alpha} > 0$ *такое, что* $\bar{V}^H(\alpha) \succeq 0$ *для любого* $0 < \alpha \le \bar{\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся представлением (2.11) вектора q_k. Тогда вектор $q_k^H = H^T q_k$ разбивается на два подвектора: $q_k^H = \left[q_k^{H,B}, q_k^{H,N}\right]^T$, где $q_k^{H,B} \in \mathbb{R}^r$; $q_k^{H,N} \in \mathbb{R}^s$, причем $q_k^{H,B} \ne 0_r$. Представим также матрицу-приращение ΔV^H в блочном виде:

$$\Delta V^H = \begin{bmatrix} \Omega_{BB} & \Omega_{BN} \\ \Omega_{NB} & \Omega_{NN} \end{bmatrix},$$

в которой диагональные блоки Ω_{BB} и Ω_{NN} имеют соответственно порядки r и s. Так как $\Delta V_B^H = (Q_k^H)_B$, то $\Omega_{BB} = q_k^{H,B}(q_k^{H,B})^T$ и $\Omega_{BN} = (\Omega_{NB})^T = q_k^{H,B}(q_k^{H,N})^T$. Матрица Ω_{NN} имеет векторное представление (2.14). Поэтому согласно (2.2) и (2.15)

$$\bar{V}^H(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha q_k^{H,B}\left(q_k^{H,B}\right)^T & \alpha q_k^{H,B}\left(q_k^{H,N}\right)^T \\ \alpha q_k^{H,N}\left(q_k^{H,B}\right)^T & D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Добавляя и вычитая в правом нижнем блоке матрицу $\alpha q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$, получаем еще одно представление матрицы $\bar{V}^H(\alpha)$, а именно:

$$\bar{V}^H(\alpha) = \alpha Q_k^H + \begin{bmatrix} 0_{rr} & 0_{rs} \\ 0_{sr} & D(\theta_N) + \alpha\widetilde{\Omega}_{NN} \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

где $\widetilde{\Omega}_{NN} = \Omega_{NN} - q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$.

Матрица единичного ранга Q_k^H является положительно полуопределенной. Кроме того, принимая во внимание, что $\theta_N > 0_s$, приходим к выводу, что правая нижняя подматрица $\widetilde{Y}_{NN}(\alpha) = D(\theta_N) + \alpha\widetilde{\Omega}_{NN}$ во второй матрице в (2.17) будет оставаться положительно определенной при α достаточно малом. Следовательно, можно указать такое $\bar{\alpha} > 0$, для которого $\bar{V}^H(\alpha) \succeq 0$ для всех $0 < \alpha \le \bar{\alpha}$.

Утверждение доказано.

Замечание. Если матрица Ω_{NN} такова, что $\Omega_{NN} \succeq q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$, то матрица $\widetilde{\Omega}_{NN}$, а следовательно и матрица $\widetilde{Y}_{NN}(\alpha)$, являются положительно полуопределенными для всех $\alpha > 0$. В этом случае двойственная задача (1.2) не имеет решения.

Предположим далее, что у матрицы $\widetilde{\Omega}_{NN}$ имеются отрицательные собственные значения, т. е. неравенство $\Omega_{NN} \succeq q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$ не выполняется. В этом случае верхняя оценка на максимальное $\bar{\alpha}$, сохраняющее положительную полуопределенность матрицы $\bar{V}^H(\alpha)$, получается как то минимальное α, при котором впервые у матрицы $\widetilde{Y}_{NN}(\alpha)$ появляется нулевое собственное значение.

Можно уточнить оценку на максимально возможное $\bar{\alpha}$. В самом деле, опять из-за того, что $\theta_N > 0_s$, правая нижняя матрица $Y_{NN}(\alpha) = D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}$ остается положительно определенной при α достаточно малом. Поэтому вся матрица $\bar{V}^H(\alpha)$, как видно из (2.16), будет положительно полуопределенной, если дополнение по Шуру матрицы $Y_{NN}(\alpha)$, т. е. матрица

$$\bar{Y}_{NN}(\alpha) = \alpha \left\{ q_k^{H,B} \left(q_k^{H,B}\right)^T - \alpha q_k^{H,B} \left(q_k^{H,N}\right)^T \left[D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}\right]^{-1} q_k^{H,N} \left(q_k^{H,B}\right)^T \right\},$$

также является положительно полуопределенной.

Понятно, что это условие выполняется, если вектор $q_k^{H,N}$ нулевой. Матрица $\bar{V}^H$ в этом случае становится блочно-диагональной. Далее считаем, что $q_k^{H,N}$ отличен от нулевого вектора. Обозначая $p(\alpha) = \left(q_k^{H,N}\right)^T \left[D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}\right]^{-1} q_k^{H,N}$, получаем, что

$$\bar{Y}_{NN}(\alpha) = \alpha\left[1 - \alpha p(\alpha)\right] q_k^{H,B} \left(q_k^{H,B}\right)^T.$$

Матрица $\bar{Y}_{NN}$ также остается положительно полуопределенной при α достаточно малом. Отсюда делаем вывод, что $\bar{\alpha}$ определяется из двух условий. Первое условие — это то минимальное α (обозначим его $\bar{\alpha}_1$), при котором у матрицы $Y_{NN}(\alpha)$ впервые появляется нулевое собственное значение. Второе условие заключается в выполнении неравенства $\alpha \le p(\alpha)^{-1}$. Если оказывается, что оно впервые нарушается при некотором $\bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1$, то верхняя оценка на $\bar{\alpha}$ следующая: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_2$. Иначе $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$.

3. Итерация в нерегулярной точке

Предположим теперь, что точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ является нерегулярной, т. е. ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет строгому неравенству $s_\triangle < n_\triangle - m$. В этом случае система (2.4) становится недоопределенной. Возьмем тогда в качестве $\mathrm{svec}_B X^H$ решение (2.4) с минимальной нормой

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \left[\mathcal{A}^H_{svec_B} \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T\right]^{-1} b. \tag{3.1}$$

Оно принадлежит пространству строк матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Общее решение системы (2.4) имеет следующий вид: $\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \left[\mathcal{A}^H_{svec_B} \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T\right]^{-1} b + g$, где g — произвольный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Если $m + p = l$, то размерность нуль-пространства $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ равняется p. Ниже считаем, что $p < s$. Такие нерегулярные точки u, в которых ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет неравенству $s_\triangle + s > n_\triangle - m$, в дальнейшем называются *квазирегулярными*.

Рассмотрим матрицу $X = HX^H H^T$. Она подобна матрице $X^H = X^H_B$, вектор $\mathrm{svec}_B\, X^H$ которой определяется равенством (3.1). Пусть η^k — отрицательное собственное значение матрицы X, ему соответствует собственный вектор q_k. Как и в регулярной точке u, вектор q_k не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{R}(H_N)$.

Система (2.9) для определения направления Δu в этом случае становится переопределенной. Поэтому рассмотрим другой, более общий, способ нахождения Δu. Перейдем от Δu к направлению ΔV в V-пространстве, которое будем искать в следующем виде:

$$\Delta V = [q_k \; H_N] \begin{bmatrix} 1 & w^T \\ w & \Delta Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k^T \\ H_N^T \end{bmatrix} = Q_k + q_k w^T H_N^T + H_N w q_k^T + H_N \Delta Z H_N^T. \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta Z \in \mathbb{S}^s$, $w \in \mathbb{R}^s$.

Потребуем, чтобы вектор w выбирался следующим образом: $w = Wy$, где все столбцы $w_j \in \mathbb{R}^s$, $1 \le j \le p$, матрицы W линейно независимы, $y \in \mathbb{R}^p$. Кроме того, потребуем, чтобы векторы $h_{w_j} = H_N w_j$, $1 \le j \le p$, были ортогональны вектору q_k, т. е.

$$\langle q_k, h_{w_j} \rangle = \langle H_N^T q_k, w_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le p. \tag{3.3}$$

Все векторы h_{w_j}, $1 \le j \le p$, принадлежат подпространству $\mathcal{R}(H_N)$.

Наряду с (3.2) имеет место связь между ΔV и Δu, а именно $\Delta V = \sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i$. Приравнивая между собой это представление для ΔV и (3.2), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i = Q_k + q_k y^T W^T H_N^T + H_N W y q_k^T + H_N \Delta Z H_N^T.$$

Проведем его векторизацию. Предварительно обозначим для сокращения записи:

$$W_N = H_N W, \quad U_{W_N, q_k} = W_N \otimes q_k + q_k \otimes W_N, \quad \mathcal{H}_N = H_N \otimes H_N.$$

Тогда с учетом того, что $\mathrm{vec}\; y^T = \mathrm{vec}\; y = y$, получаем

$$\mathcal{A}_{vec}^T \Delta u - U_{W_N, q_k} y - \mathcal{H}_N \,\mathrm{vec}\; \Delta Z = \mathrm{vec}\; Q_k. \tag{3.4}$$

Перепишем далее равенство (3.4) в базисе, задаваемом ортогональной матрицей H. Для этого умножим его слева на матрицу $(H \otimes H)^T = H^T \otimes H^T$. Так как

$$(H^T \otimes H^T)(H_N \otimes H_N) = \begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(rn)s^2} \\ \mathrm{Diag}\left(\begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

и $U^H_{W_N, q_k} = (H^T \otimes H^T) U_{W_N, q_k} = W_N^H \otimes q_k^H + q_k^H \otimes W_N^H$, где $q_k^H = H^T q_k$, $W_N^H = H^T W_N$, то имеем

$$(\mathcal{A}^H_{vec})^T \Delta u - \left\{ U^H_{W_N, q_k} y + \Gamma^H \,\mathrm{vec}\; \Delta Z \right\} = \mathrm{vec}\; Q_k^H, \tag{3.6}$$

где Γ^H — матрица, стоящая в правой части (3.5).

Столбцы матриц $U^H_{W_N, q_k}$ и Γ^H соответствуют симметричным матрицам (в случае матрицы Γ^H единственные единичные элементы в столбце стоят на позициях диагональных элементов). В силу указанного обстоятельства систему (3.6) можно переписать следующим образом:

$$(\mathcal{A}^H_{svec})^T \Delta u - \widetilde{U}^H_{W_N, q_k} y - \widetilde{\Gamma}^H \mathrm{svec}\, \Delta Z = \mathrm{svec}\, Q_k^H, \tag{3.7}$$

где $\widetilde{U}^H_{W_N,q_k} = \widetilde{\mathcal{L}}_n U^H_{W_N,q_k}$; $\widetilde{\Gamma}^H = \widetilde{\mathcal{L}}_n \Gamma^H \widetilde{\mathcal{D}}_s$. Заметим, что матрица $\widetilde{\Gamma}^H$ размера $n_\triangle \times s_\triangle$ такова, что ее верхняя подматрица размера $l \times s_\triangle$ нулевая. Система (3.7) есть система $n_\triangle$ линейных уравнений относительно $n_\triangle$ переменных: Δu, y и $\operatorname{svec}\Delta Z$. Если матрица этой системы

$$\mathcal{M} = \left[(\mathcal{A}^H_{svec})^T \vdots -\widetilde{U}^H_{W_N,q_k} \vdots -\widetilde{\Gamma}^H\right]$$

неособая, то она имеет единственное решение.

Предположим далее, что матрица $\mathcal{M}$ неособая. Так как матрицы A_i, $1 \le i \le m$, линейно независимы, то матрица $\mathcal{A}^H_{svec}$ имеет полный ранг, равный m. Более того, поскольку u — крайняя точка множества $\mathcal{F}_{D,u}$, матрица $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ размера $m \times l$ также имеет ранг m, т. е. полный ранг по строкам.

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольная матрица размера $p \times l$, строками которой являются линейно независимые векторы из нуль-пространства матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Составим с использованием матриц $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ и $\mathcal{K}$ квадратную матрицу

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}^H_{svec_B} & 0_{ls_\triangle} \\ 0_{s_\triangle l} & I_{s_\triangle} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{A}}^H_{svec_B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^H_{svec_B} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix},$$

причем матрица $\bar{\mathcal{A}}^H_{svec_B}$ по своему определению является неособой. Если умножить систему (3.7) слева на неособую матрицу $\mathcal{Q}$, то ее решение не изменится.

Обозначим через $\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$ верхнюю подматрицу матрицы $\widetilde{U}^H_{W_N,q_k}$ размера $l \times p$. Имеем после умножения (3.7) на первую строку матрицы $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{W}\Delta u = \mathcal{A}^H_{svec_B}\left[\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k} y + \operatorname{svec}_B Q^H_k\right], \quad \mathcal{K}\left[\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k} y + \operatorname{svec}_B Q^H_k\right] = 0_p, \tag{3.8}$$

где $\mathcal{W} = \mathcal{A}^H_{svec_B}(\mathcal{A}^H_{svec_B})^T$.

Квадратная матрица $\mathcal{W}$ порядка m неособая, поэтому

$$\Delta u = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k} y + \operatorname{svec}_B Q^H_k\right]. \tag{3.9}$$

Если квадратная матрица $\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$ порядка p неособая, то, разрешая вторую систему (3.8), получаем $y = -\left(\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^{-1}\mathcal{K}\operatorname{svec}_B Q^H_k$. После подстановки найденного y в выражение (3.9) для Δu приходим к

$$\Delta u = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[I_l - \mathcal{P}\right]\operatorname{svec}_B Q^H_k, \quad \mathcal{P} = \widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\left(\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^{-1}\mathcal{K}. \tag{3.10}$$

Вычислим теперь изменение значения целевой функции в двойственной задаче (1.2) вдоль направления Δu.

Утверждение 4. *Пусть для столбцов w_j матрицы W, $1 \le j \le p$, выполняются равенства* (3.3). *Тогда двойственная целевая функция в точке $\bar{u}$ принимает значение* (2.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем после подстановки Δu из (3.10):

$$\begin{aligned}\langle b, \Delta u\rangle &= \langle b, \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[I_l - \mathcal{P}\right]\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle = \langle(\mathcal{A}^H_{svec_B})^T\mathcal{W}^{-T}b, \operatorname{svec}_B Q^H_k - \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle \\ &= \langle\operatorname{svec}_B X^H, \operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle - \langle\operatorname{svec}_B X^H, \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle \\ &= \langle\operatorname{vec}X, \operatorname{vec}Q_k\rangle - \langle\operatorname{svec}_B X^H, \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle = \eta^k - \langle\operatorname{svec}_B X^H, \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Рассмотрим более подробно матрицу $\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$, предварительно уточнив вид матрицы $U^H_{W_N,q_k}$. Поскольку $W^H_N = [0_{rs} \vdots W]^T$, то i-й столбец матрицы $W^H_N \otimes q^H_k$ есть $\operatorname{vec}\left[0_{nr} \vdots w_i \otimes q^H_k\right]$,

$1 \le i \le p$. Поэтому у матрицы $W_N^H \otimes q_k^H$ верхняя подматрица размера $(rn) \times p$ нулевая. Следовательно, у матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}_n(W_N^H \otimes q_k^H)$ верхняя подматрица размера $l \times p$ также будет нулевой. Таким образом, матрица $\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$ совпадает с верхней $(l \times p)$-подматрицей матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}_n(q_k^H \otimes W_N^H)$.

Вычислим p-мерный вектор $z = \left(\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^T \operatorname{svec}_B X^H$. Так как последние $s_\triangle$ элементы вектора $\operatorname{svec} X^H$ нулевые, то j-й элемент вектора z определяется как

$$z^j = \langle \widetilde{\mathcal{L}}_n \left(q_k^H \otimes (H^T H_N w_j)\right), \operatorname{svec} X^H \rangle = \langle q_k^H \otimes (H^T H_N w_j), \operatorname{vec} X^H \rangle$$

$$= \langle (H \otimes H)\left((H^T q_k) \otimes (H^T H_N w_j)\right), \operatorname{vec} X \rangle = \langle q_k \otimes (H_N w_j), \operatorname{vec} X \rangle$$

$$= (q_k \otimes (H_N w_j))^T \operatorname{vec} X = \left(q_k^T \otimes (H_N w_j)^T\right) \operatorname{vec} X.$$

Отсюда с учетом условия (3.3) и равенства $\operatorname{vec} X = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta^i (q_i \otimes q_i)$ получаем

$$z^j = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \left(q_k^T \otimes (w_j^T H_N^T)\right)(q_i \otimes q_i) = \eta^k w_j^T H_N^T q_k = 0.$$

Следовательно $z = 0_p$, что приводит к равенству

$$\langle \operatorname{svec}_B X_B^H, \mathcal{P} \operatorname{svec}_B Q_k^H \rangle = \left\langle \left(\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^T \operatorname{svec}_B X_B^H, \left(\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^{-1} \mathcal{K} \operatorname{svec}_B Q_k^H \right\rangle = 0.$$

Осталось воспользоваться равенством (3.11).

Утверждение доказано.

Рассмотрим в заключение вопрос о сходимости метода. Мы скажем, что задача (1.2) *квазирегулярная*, если все крайние точки из $\mathcal{F}_{D,u}$ регулярные или квазирегулярные. Предполагаем дополнительно, что в качестве отрицательного собственного значения η^k на каждом шаге берется максимальное по модулю значение.

Теорема. *Пусть задача* (1.2) *является квазирегулярной, начальная точка* $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ *такова, что множество* $\mathcal{F}_{D,u}(u_0) = \{u \in \mathcal{F}_{D,u} \colon \langle b, u \rangle \ge \langle b, u_0 \rangle\}$ *ограничено. Тогда двойственный симплекс-метод порождает последовательность точек* $\{u_k\} \subset \mathcal{F}_{D,u}(u_0)$, *которая либо конечна, и тогда последняя точка есть решение* (1.2), *либо* $\{u_k\}$ *бесконечна, и тогда любая ее предельная точка также является решением* (1.2).

Доказательство. Ограничимся рассмотрением только случая, когда последовательность $\{u_k\}$ бесконечная. Так как она ограниченная, то у нее существуют предельные точки. Пусть $u_{k_s} \to \bar{u}$. Точка $\bar{u}$ является крайней.

Последовательности $\{u_k\}$ соответствует последовательность матриц $\{V_k\}$, где $V_k = V(u_k)$. Ранг таких матриц в крайних точках ограничен. Это приводит к тому, что все соответствующие матрицы H_N также ограничены по норме (Фробениуса), т. е. принадлежат компактному множеству. Поэтому из $\{V_{k_s}\}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой матрицы H_N сходятся к некоторой матрице $\bar{H}_N$. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{V_{k_s}\}$ обладает этим свойством и ранг у всех матриц H_N один и тот же. Обозначим через $\bar{H}$ ортогональную матрицу, у которой вторая компонента есть $\bar{H}_N$.

Если обратиться к матрице $\mathcal{A}^{\bar{H}}_{svec_B}$, входящей в систему (2.4) для определения вектора $\operatorname{svec}_B X^{\bar{H}}$ в точке $\bar{u}$, то, поскольку $\bar{u}$ — крайняя точка, данная матрица имеет полный ранг, совпадающий с рангом по строкам. Отсюда приходим к выводу, что решения системы (2.4), а именно векторы $\operatorname{svec}_B X^{H_{k_s}}$, определяемые либо (2.5), либо (3.1), сходятся к $\operatorname{svec}_B \bar{X}^{\bar{H}}$.

Матрица $\bar{X}$ должна быть положительно полуопределенной, так как иначе у $\bar{X}$ имеется отрицательное собственное значение. Но собственные значения матриц непрерывны по Липшицу. Поэтому у матриц X_{k_s}, достаточно близких к $\bar{X}$, также существуют отрицательные собственные значения. Отсюда следует, что на этих итерациях должен осуществляться переход из точек u_{k_s} в последующие точки u_{k_s+1} с шагом α_{k_s} и с увеличением значения целевой функции на величину $-\alpha_{k_s}\bar{\eta}_{k_s}$, где $\bar{\eta}_{k_s}$ — максимальная по модулю отрицательная компонента вектора η_{k_s}. Однако из-за ограниченности векторов Δu_k шаги α_{k_s} не могут стремиться к нулю. Поэтому на некоторой k_s-й итерации обязательно получим, что $\langle b, u_{k_s+1}\rangle > \langle b, \bar{u}\rangle$; это в силу монотонного увеличения значений целевой функции вдоль траектории противоречит сходимости $\{u_{k_s}\}$ к $\bar{u}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
2. **Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 347 с.
3. **Vandenberghe L., Boyd S.** Semidefinite programming // SIAM Review. 1996. Vol. 38, № 1. P. 49–95.
4. Handbook of Semidefinite Programming / eds. H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 656 p.
5. **Lasserre J. B.** Linear programming with positive semi-definite matreces // Math. Problems in Engineering. 1996. Vol. 2. P. 499–522.
6. **Pataki G.** Cone-LP’s and semidefinite programs: geometry and simplex-type method // Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5). Vancouver, 1996. P. 1–13.
7. **Косолап А. И.** Симплекс-метод для решения задач полуопределенного программирования // Вестн. Донец. нац. ун-та. 2009. Вып. 2. С. 365–369. (Сер. A: Естественные науки.)
8. **Жадан В. Г.** Об одном варианте симплекс-метода для линейной задачи полуопределенного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 117–127.
9. **Магнус Я. Р., Нейдеккер Ч.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.

Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
профессор
главный науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына
ФИЦ “Информатика и управление” РАН
e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 16.05.2016