ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.544

БИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ[1]

Г. А. Дубосарский

Предложен метод решения основной краевой задачи для бигармонических функций, состоящий в ортогонализации специальной системы функций и рассмотрения рядов Фурье по полученной системе. Доказано, что построенные ряды сходятся внутри области. Также на основе ортогонализированной системы построены бигармонические всплески и установлено, что ряды всплесков сходятся равномерно в области вместе с границей.

Ключевые слова: бигармоническая функция, краевая задача, всплески.

G. A. Dubosarskii. Biharmonic wavelets and their applications.

We propose a solution method for the basic boundary value problem for biharmonic functions. In this method, a special system of functions is orthogonalized and Fourier series in this system are considered. It is proved that the constructed series converge inside the domain. Biharmonic wavelets are constructed based on the orthogonalized system. It is established that series of wavelets converge uniformly in the domain with boundary.

Keywords: biharmonic function, boundary value problem, wavelets.

MSC: 31B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-76-89

Введение

Данная статья продолжает цикл работ, посвященный решению основных задач математической физики в областях, которые получаются путем удаления из круга малых непересекающихся кругов, не налегающих на границу внешнего круга. В работах [1; 2] были построены ортогональные и неортогональные всплески, удобные для решения задачи Дирихле. Задача Дирихле состоит в восстановлении вещественной гармонической функции внутри области по ее известным граничным значениям. В [2; 3] были построены ортогональные и неортогональные всплески для решения задачи Неймана. Эта задача заключается в восстановлении вещественной гармонической функции по известным производным по нормали к границе области. В данной статье мы построим всплески, удобные для решения основной краевой задачи для бигармонических функций, состоящей в определении функции внутри области по известным граничным значениям и производным по нормали к границе области.

Отметим, что при построении всплесков мы будем опираться на статью [4], в которой Ю. Н. Субботиным и Н. И. Черных были построены гармонические всплески в единичном круге, центральном и нецентральном кольцах. Далее эти идеи были перенесены в работе [5] на случай бигармонических функций в круге и центральном кольце.

Обозначим через $C_r(a)$ окружность с центром в точке a радиуса r. Будем также использовать обозначение $B_r(a) = \{z\colon |z-a| < r\}$. Рассмотрим область комплексной плоскости $\widetilde{K} = \widetilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \dots, z_m, r_m)$, получающуюся путем удаления из единичного круга m попарно не пересекающихся и не налегающих на границу внешнего круга кругов. Точнее, область $\widetilde{K}$ ограничена окружностями $C_{r_k}(z_k)$, $k = \overline{0,m}$, где $z_0 = 0, r_0 = 1$, $|z_k| + r_k < 1, k = \overline{1,m}$, и

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

$|z_k - z_l| > r_k + r_l, k \neq l$. Основная краевая задача для бигармонических функций в области $\widetilde{K}$ запишется в следующем виде:

$$\Delta^2 u(z) \equiv 0, \quad z \in \widetilde{K},$$

$$u(z_k + r_k e^{ix}) = \varphi_k(x), \quad k = \overline{0, m},$$

$$\left.\frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\right|_{r=r_k} = \psi_k(x), \quad k = \overline{0, m}.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а функции φ_k, ψ_k являются непрерывными.

В разд. 2 сформулированы специальные представления гармонических и бигармонических функций в области $\widetilde{K}$ и дано описание рассматриваемого в работе класса бигармонических функций. В разд. 3 определена специальная система бигармонических функций, которая образует всюду плотное множество в пространстве решений основной краевой задачи. Далее путем ортогонализации этой системы функций относительно специального скалярного произведения в том же разделе построена новая ортогональная система функций. Также в разд. 3 сформулированы теоремы об асимптотике функций построенной ортогональной системы и о сходимости ряда Фурье по этой системе для бигармонической функции внутри области. В разд. 4 на основе построенной ортогональной системы и всплесков работы [4] построены бигармонические всплески. Далее сформулирована теорема о сходимости ряда по гармоническим всплескам в замыкании области. В разд. 5 доказываются необходимые вспомогательные утверждения.

1. Специальные представления гармонической и бигармонической функций

Нам потребуются следующие два утверждения о представлении гармонической и бигармонической функций. Они справедливы только при предположении гармоничности (бигармоничности) функции в области $\widetilde{K}$ без условия о существовании граничных значений. Доказательство существования разложения в утверждении 1 можно найти в [6], а единственность проверяется так же, как в лемме 2.1 работы [7].

Утверждение 1. *Пусть функция $u(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|, \tag{1.1}$$

где $u_0(z)$ — гармоническая в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u(z) = 0, k = \overline{1, m}$, и $A_k, k = \overline{1, m}$, — некоторые вещественные константы.

Используя предыдущее утверждение, в разд. 5 мы установим справедливость следующего представлении бигармонической функции в области $\widetilde{K}$.

Утверждение 2. *Пусть функция $u(z)$ является бигармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + |z|^2 v_0(z) + \sum_{k=1}^{m} |z - z_k|^2 v_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k| + \sum_{k=1}^{m} B_k |z - z_k|^2 \ln|z - z_k|, \tag{1.2}$$

где $u_0(z), v_0(z)$ — гармонические функции в $B_1(0)$, функции $u_k(z), v_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = 0$, $v_k(\infty) = 0, k = \overline{1, m}$, и A_k, B_k, $k = \overline{1, m}$, — вещественные константы.

Везде далее будем предполагать, что бигармоническая функция непрерывна в замыкании $\widetilde{K}$ вместе со своими производными по x и y. Кроме этого потребуем, чтобы компоненты u_k и v_k разложения (1.2) функции $u(z)$ также были непрерывны вместе со своими производными первого порядка в замыкании $\widetilde{K}$.

2. Ортогональная система функций

В работе [2] было установлено, что следующая система функций

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \ln|z-z_l|,\ \ \mathrm{Re} z^k,\ \ \mathrm{Im} z^k,\ \ \mathrm{Re}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ -\mathrm{Im}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ l=\overline{1,m},\ \ k\in\mathbb{N}\Big\} \tag{2.1}$$

является всюду плотным множеством в любом пространстве $h_p(\widetilde{K})$ типа Харди ($1\le p\le\infty$) гармонических в $\widetilde{K}$ и суммируемых на границе $\widetilde{K}$ функций. Чтобы построить всюду плотное множество в пространстве бигармонических функций, решим для каждой функции $f(x)$ из предыдущей системы (2.1) уравнение $\Delta u(z)=f(x)$ (это удобно сделать, записав оператор Лапласа в полярных координатах). После указанных операций, а также после некоторых элементарных операций (например, умножения функции на константу) и добавления всех решений к системе (2.1), мы получим следующую систему функций:

$$\Big\{h_0^0(z)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ g_0^0(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}|z|^2,\ \ h_0^l(z)=\ln|z-z_l|,\ \ g_0^l(z)=|z-z_l|^2\ln|z-z_l|,$$

$$h_k^0(z)=\mathrm{Re} z^k,\ \ g_k^0(z)=|z|^2\mathrm{Re} z^k,\ \ \widetilde{h}_k^0(z)=\mathrm{Im} z^k,\ \ \widetilde{g}_k^0=|z|^2\mathrm{Im} z^k,$$

$$h_k^l(z)=\mathrm{Re}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ g_k^l(z)=|z-z_l|^2\mathrm{Re}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,$$

$$\widetilde{h}_k^l(z)=-\mathrm{Im}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ \widetilde{g}_k^l(z)=-|z-z_l|^2\mathrm{Im}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ l=\overline{1,m},\ \ k\in\mathbb{N}\Big\}. \tag{2.2}$$

Строго доказать, что система функций (2.2) является всюду плотным множеством в пространстве бигармонических в $\widetilde{K}$ функций, можно будет с помощью утверждения 2, которое мы докажем далее в разделе 5.

Рассмотрим следующее произведение для бигармонических в $\widetilde{K}$ функций:

$$(u,v)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}u(z_k+r_ke^{ix})v(z_k+r_ke^{ix})dx+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u(z_k+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}\frac{\partial v(z_k+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}dx. \tag{2.3}$$

Выпишем функции системы (2.2) в следующем порядке:

$$h_0^0(z),g_0^0(z),h_0^1(z),g_0^1(z),h_0^2(z),\dots,h_0^m(z),g_0^m(z),$$
$$h_1^0(z),g_1^0(z),\widetilde{h}_1^0(z),\widetilde{g}_1^0(z),h_1^1(z),g_1^1(z),\widetilde{h}_1^1(z),\widetilde{g}_1^1(z),\dots$$
$$h_1^m(z),g_1^m(z),\widetilde{h}_1^m(z),\widetilde{g}_1^m(z),$$
$$h_2^0(z),g_2^0(z),\widetilde{h}_2^0(z),\widetilde{g}_2^0(z),h_2^1(z),g_2^1(z),\widetilde{h}_2^1(z),\widetilde{g}_2^1(z),$$
$$\dots,h_2^m(z),g_2^m(z),\widetilde{h}_2^m(z),\widetilde{g}_2^m(z),\dots \tag{2.4}$$

и ортогонализируем их относительно произведения (2.3). Полученную систему функций будем нумеровать так же, как и исходную и обозначать заглавными буквами:

$$H_0^0(z),G_0^0(z),H_0^1(z),G_0^1(z),H_0^2(z),\dots,H_0^m(z),G_0^m(z),$$
$$H_1^0(z),G_1^0(z),\widetilde{H}_1^0(z),\widetilde{G}_1^0(z),H_1^1(z),G_1^1(z),\widetilde{H}_1^1(z),\widetilde{G}_1^1(z),\dots. \tag{2.5}$$

Будем также нумеровать функции систем (2.4) и (2.5) в том же порядке последовательными натуральными числами и обозначать через t_k и T_k соответственно. Наконец, на основании системы (2.2) построим еще следующую систему функций:

$$\Big\{\mathbb{H}_0^0(z)\equiv 1,\ \ \mathbb{G}_0^0(z)=|z|^2,\ \ \mathbb{H}_0^l(z)=\ln|z-z_l|,\ \ \mathbb{G}_0^l(z)=|z-z_l|^2\ln|z-z_l|,$$

$$\mathbb{H}_k^0(z) = \frac{\mathrm{Re} z^k}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \mathbb{G}_k^0(z) = \frac{(k^2+1)|z|^2 \mathrm{Re} z^k - (k+1)^2 \mathrm{Re} z^k}{2\sqrt{k^2+1}},$$

$$\widetilde{\mathbb{H}}_k^0(z) = \frac{\mathrm{Im} z^k}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \widetilde{\mathbb{G}}_k^0(z) = \frac{(k^2+1)|z|^2 \mathrm{Im} z^k - (k+1)^2 \mathrm{Im} z^k}{2\sqrt{k^2+1}},$$

$$\mathbb{H}_k^l(z) = \frac{\mathrm{Re}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{\sqrt{1+k^2/r_l^2}}, \quad \mathbb{G}_k^l(z) = \frac{(1+k^2/r_l^2)|z-z_l|^2 \mathrm{Re}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k - (r_l^2+k^2-2k)\mathrm{Re}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{2r_l\sqrt{1+k^2/r_l^2}},$$

$$\widetilde{\mathbb{H}}_k^l(z) = -\frac{\mathrm{Im}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{\sqrt{1+k^2/r_l^2}},$$

$$\left.\widetilde{\mathbb{G}}_k^l(z) = \frac{-(1+k^2/r_l^2)|z-z_l|^2 \mathrm{Im}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k + (r_l^2+k^2-2k)\mathrm{Im}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{2r_l\sqrt{1+k^2/r_l^2}}\right\}, \tag{2.6}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $l = \overline{1,m}$. Функции системы (2.6) были найдены из следующих соображений. Каждая функция в (2.6) получается путем умножения функции системы (2.2) на число или является линейной комбинацией двух функций из (2.2). Введем следующие произведения при $l = \overline{0,m}$:

$$(u,v)_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(z_l + r_l e^{ix}) v(z_l + r_l e^{ix}) dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l} \frac{\partial v}{\partial r}(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l} dx.$$

Коэффициенты перед функциями были найдены так, чтобы при $l = \overline{0,m}, k, k' \in \mathbb{N}$, выполнялись равенства

$$(\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l, \overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_{k'}^l)_l = \delta_{k,k'}, \quad (\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_k^l, \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_{k'}^l)_l = \delta_{k,k'}, \quad (\mathbb{H}_k^l, \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_{k'}^l)_l = 0, \quad (\widetilde{\mathbb{H}}_k^l, \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_{k'}^l)_l = 0. \tag{2.7}$$

Будем нумеровать функции системы (2.6) последовательными натуральными числами, как и функции системы (2.2), и полученную после перенумерации систему обозначим через $\mathbb{T}_n(z)$.

Через τ, $0 < \tau < 1$, обозначим величину

$$\tau = \max\Big\{|z_k| + r_k, \frac{r_k}{1-|z_k|}, \frac{r_k}{|z_k - z_l| - r_l} : k, l = \overline{1,m}, k \neq l\Big\}. \tag{2.8}$$

Будем говорить, что для последовательности положительных чисел a_n и функций $f_n(z)$, определенных в $\widetilde{K}$, выполняется $f_n(z) = O(a_n), n \to \infty$, если $\sup_{z \in \widetilde{K}} |f_n(z)| \leq Ca_n$ при положительной константе C, зависящей только от геометрии области $\widetilde{K}$.

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема об асимптотическом поведении функций системы (2.5). Она доказывается по аналогии с доказательством теоремы 1 в [1] с помощью леммы 3, которая будет сформулирована и доказана в разд. 5. Поэтому доказательство самой теоремы 1 в работе не приводится.

Теорема 1. *Пусть число τ определено по формуле* (2.8). *Для числа τ', удовлетворяющего неравенствам $\tau < \tau' < 1$, и для функций из систем* (2.5) *и* (2.6) *при $l = \overline{0,m}$ и $k \to \infty$ справедливы оценки*

$$\overset{(\sim)}{H}{}_k^l(z) = \overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l(z) + O(\tau'^k), \quad \overset{(\sim)}{G}{}_k^l(z) = \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_k^l(z) + O(\tau'^k).$$

Сопоставим бигармонической в $\widetilde{K}$ функции $u(z)$ ряд

$$\sum_{l=0}^{m}\left\{H_0^l(u,H_0^l)+G_0^l(u,G_0^l)\right\}+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{H_k^l(u,H_k^l)+\widetilde{H}_k^l(u,\widetilde{H}_k^l)+G_k^l(u,G_k^l)+\widetilde{G}_k^l(u,\widetilde{G}_k^l)\right\}. \quad (2.9)$$

По аналогии с доказательством теоремы 2 в [1], пользуясь леммой 3 из разд. 5, можно установить следующую теорему (ее доказательство тоже не приведено в работе).

Теорема 2. *Для бигармонической функции $u(z)$ ряд (2.9) будет равномерно сходиться на любом компакте в области $\widetilde{K}$.*

3. Бигармонические всплески

Чтобы добиться сходимости не только внутри области $\widetilde{K}$ (как в случае ряда (2.9)), но и на границе, на основании системы (2.5) построим новую систему всплесков. Построение будем основывать на всплесках из статьи [4].

Для этого нам потребуется функция Мейера $\widehat{\theta}(\omega)$. Рассмотрим неотрицательную четную, дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$, которая удовлетворяет требованиям

$$\widehat{\varphi}(\omega)\equiv 1 \text{ при } |\omega|\le\frac{1-\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}(\omega)\equiv 0 \text{ при } |\omega|\ge\frac{1+\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2} \text{ нечетна при } |\omega|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

где $0<\varepsilon\le 1/3$. Функция $\widehat{\theta}(\omega)$ неотрицательна и определяется соотношением $\widehat{\theta}^2(\omega)=\widehat{\varphi}^2(\omega/2)-\widehat{\varphi}^2(\omega)$. Заметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\theta}(\omega)\subseteq\{\omega\in\mathbb{R}:(1-\varepsilon)/2<|\omega|<1+\varepsilon\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ — четная и дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Перейдем теперь к построению гармонических всплесков, являющихся базисом пространств $C[0,2\pi]$ и $L_p[0,2\pi], 1\le p<\infty$. Выпишем всплески статьи [4] в явном виде

$$w_0(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}},\quad w_n(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\cos\nu x,\quad \widetilde{w}_n(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\sin\nu x,$$

где

$$\theta_\nu^n=2^{(2-j)/2}\widehat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\sin\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j},\quad n=2^{j-1}+k,\quad j\in\mathbb{N},\quad k=0,1,\dots,2^{j-1}-1.$$

Заметим, что система функций $\left\{1/\sqrt{2},\cos nx,\sin nx,n\in\mathbb{N}\right\}$ ортогональна относительно произведения $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ и система $\{w_0(x),w_n(x),\widetilde{w}_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ также ортогональна. Это эквивалентно некоторым соотношениям на коэффициенты θ_ν^n. Таким образом, преобразование произвольной системы $\{\gamma_0,\gamma_n,\widetilde{\gamma}_n,n\in\mathbb{N}\}$, переводящее γ_0 в γ_0 и $\overset{(\sim)}{\gamma}_n$ — в $\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{\gamma}_\nu$ сохраняет свойство ортонормированности системы.

Мы можем применить это преобразование при каждом $l=\overline{0,m}$ к системам функций $\{H_0^l(z),H_n^l(z),\widetilde{H}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\}$, $\{G_0^l(z),G_n^l(z),\widetilde{G}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\}$ и получим ортонормированные системы функций (ортогональные между собой)

$$\{\mathcal{H}_0^l(z),\mathcal{H}_n^l(z),\widetilde{\mathcal{H}}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\},\quad \{\mathcal{G}_0^l(z),\mathcal{G}_n^l(z),\widetilde{\mathcal{G}}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\},$$

где функции строятся по правилу

$$\mathcal{H}_0^l(z)=H_0^l(z),\quad \overset{(\sim)}{\mathcal{H}}{}_n^l(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{H}{}_\nu^l(z),\quad \mathcal{G}_0^l(z)=G_0^l(z),\quad \overset{(\sim)}{\mathcal{G}}{}_n^l(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{G}{}_\nu^l(z).$$

Теперь сопоставим по аналогии с (2.9) бигармонической в $\widetilde{K}$ функции $u(z)$ ряд

$$\sum_{l=0}^{m}\{\mathcal{H}_0^l(u,\mathcal{H}_0^l)+\mathcal{G}_0^l(u,\mathcal{G}_0^l)\}+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathcal{H}_k^l(u,\mathcal{H}_k^l)+\widetilde{\mathcal{H}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{H}}_k^l)+\mathcal{G}_k^l(u,\mathcal{G}_k^l)+\widetilde{\mathcal{G}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{G}}_k^l)\}.$$

Введем для бигармонической функции $u(z)$ частичную сумму $S_n(z;u)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(\cdot;u) = \sum_{l=0}^{m}\{\mathcal{H}_0^l(u,\mathcal{H}_0^l) + \mathcal{G}_0^l(u,\mathcal{G}_0^l)\} + \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\{\mathcal{H}_k^l(u,\mathcal{H}_k^l) + \widetilde{\mathcal{H}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{H}}_k^l) + \mathcal{G}_k^l(u,\mathcal{G}_k^l) + \widetilde{\mathcal{G}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{G}}_k^l)\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 4 в [1] с помощью теоремы 1 проверяется, что справедлива следующая теорема, доказательство которой мы здесь не приводим.

Теорема 3. *Для бигармонической функции $u(z)$ частичные суммы $S_n(\cdot;u)$ сходятся равномерно в замыкании области $\widetilde{K}$.*

4. Вспомогательные результаты

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 2. Докажем *существование* разложения (1.2). Для бигармонической $u(z)$ функция Δu — гармоническая. Для нее справедливо разложение (1.1):

$$\Delta u = \sum_{k=0}^{m} f_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z-z_k|, \tag{4.1}$$

где $f_0(z)$ — гармоническая в $B_1(0)$, $f_k(z)$ — в $\mathbb{C}\setminus\overline{B_{r_k}(z_k)}$ и выполнено $f_k(\infty)=0, k=\overline{1,m}$.

Рассмотрим разложение функции f_0 в гармонический ряд

$$f_0(re^{ix}) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\alpha_k r^k \cos kx + \beta_k r^k \sin kx\Big)$$

и введем гармоническую функцию v_0 следующим образом:

$$v_0(re^{ix}) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(4k+4)\Big(\alpha_k r^k \cos kx + \beta_k r^k \sin kx\Big).$$

Прямым вычислением проверяется, что $\Delta(|z|^2 v_0(z)) = f_0(z)$. Аналогичным образом находятся гармонические функции $v_k(z), k=\overline{1,m}$, такие, что $\Delta(|z-z_k|^2 v_k(z)) = f_k(z)$ и $v_k(\infty)=0$. Откуда, пользуясь тем, что $\Delta(|z-z_k|^2\ln|z-z_k| - |z|^2) = 4\ln|z-z_k|$ и (4.1), получаем, что

$$\Delta\Big(u - |z|^2 v_0(z) - \sum_{k=1}^{m}|z-z_k|^2 v_k(z) + \frac{m}{4}|z|^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}A_k|z-z_k|^2\ln|z-z_k|\Big) = 0.$$

Осталось применить к гармонической функции

$$u - |z|^2 v_0(z) - \sum_{k=1}^{m}|z-z_k|^2 v_k(z) + \frac{m}{4}|z|^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}A_k|z-z_k|^2\ln|z-z_k|$$

утверждение 1 и получить требуемое разложение.

Докажем теперь *единственность* разложения (1.2). Проверим ее сначала для случая, когда $\widetilde{K}$ является центральным кольцом, ограниченным окружностями $C_\rho(0)$ и $C_1(0)$ при $\rho<1$.

В этом случае представление (1.2) будет иметь вид

$$u = u_0 + |z|^2 v_0 + u_1 + |z|^2 v_1 + A\ln|z| + B|z|^2\ln|z|. \tag{4.2}$$

Разложим функции u_l, v_l $(l=0,1)$ в гармонические ряды

$$u_l(re^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\{a_k^l\cos kx + b_k^l \sin kx\}, \quad v_l(re^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\{c_k^l\cos kx + d_k^l\sin kx\}. \tag{4.3}$$

Нам достаточно доказать однозначность представления (4.2) в случае, когда $u(z) \equiv 0$. Подставляя формулы (4.3) в (4.2) и приравнивая к нулю ряды на окружностях $C_\rho(0)$ и $C_1(0)$, а также их производные по r (т. е. фактически решая основную задачу для бигармонических функций в центральном кольце), получаем системы уравнений для коэффициентов. Более подробно эта процедура будет описана при доказательстве леммы 2. Из этих систем можно найти, что все коэффициенты равны нулю. Тем самым, однозначность для центрального кольца доказана.

Проверим теперь *единственность в общем случае*. Установим, что функции u_0 и v_0 в представлении (1.2) определяются единственным образом. Доказательство однозначности других компонент разложения (1.2) проводится аналогично. Пусть выполнено разложение (1.2). Выберем число ρ, $0 < \rho < 1$ так, чтобы все круги $\overline{B_{r_k}(z_k)}$ $(k = \overline{1,m})$, лежали внутри $B_\rho(0)$. Рассмотрим кольцо, ограниченное окружностями $C_\rho(0)$ и $C_{\rho'}(0)$ при $\rho < \rho' < 1$.

Исходя из области определения функций в разложении (1.2), получаем, что $u - u_0 - |z|^2 v_0$ является бигармонической вне $\overline{B_\rho(0)}$. Следовательно, $u - u_0 - |z|^2 v_0$ представима в виде

$$u - u_0 - |z|^2 v_0 = U_1 + |z|^2 V_1,$$

где $U_1(z)$, $V_1(z)$ являются гармоническими вне $B_\rho(0)$. Следовательно, там же существуют гармонические функции $\widetilde{U}_1(z)$, $\widetilde{V}_1(z)$ такие, что $\widetilde{U}_1(\infty) = 0$, $\widetilde{V}_1(\infty) = 0$ и выполняются равенства $U_1(z) = A \ln |z| + \widetilde{U}_1(z)$, $V_1(z) = B \ln |z| + \widetilde{V}_1(z)$. Таким образом,

$$u = u_0 + |z|^2 v_0 + U_1 + |z|^2 V_1 = u_0 + |z|^2 v_0 + \widetilde{U}_1 + |z|^2 \widetilde{V}_1 + A \ln |z| + B|z|^2 \ln |z|. \tag{4.4}$$

В кольце разложение (4.2) единственно. Исходя из этого и представления (4.4), мы заключаем, что функции u_0 и v_0 в кольце определяются единственным образом. Доказательство можно считать законченным. □

Справедливость следующей леммы, которая потребуется при доказательстве леммы 3 данной работы, устанавливается аналогично доказательству леммы 5 в [3]. Ее смысл в том, что система (2.6) является "почти ортонормированной" относительно произведения (2.3) с точностью до малой величины, стремящейся к нулю со скоростью геометрической прогрессии.

Лемма 1. *Для функций системы* (2.6) *и произведения* (2.3) *равномерно по* l *при* $\tau < \tau' < 1$ $(\tau$ *определено в* (2.8)$)$ *при* $k \to \infty$ *выполняются оценки*

$$(\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^s_k, \overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^j_l) = \delta_{k,l}\delta_{s,j} + O(\tau'^k), \quad (\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^s_k, \mathbb{G}^j_l) = O(\tau'^k),$$

$$(\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}^s_k, \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}^j_l) = \delta_{k,l}\delta_{s,j} + O(\tau'^k), \quad (\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^s_k, \widetilde{\mathbb{G}}^j_l) = O(\tau'^k).$$

Эти оценки можно переписать в виде $(\mathbb{T}_k, \mathbb{T}_l) = \delta_{k,l} + O(\tau'^{k/(4m+4)})$, *где* $\mathbb{T}_k$ *даны после* (2.7).

Для дальнейшего, используя (1.2), найдем представление бигармонических в $\widetilde{K}$ функций с помощью (2.4) – (2.6). Разложим соответствующие функции $u_l(z_l + r_l e^{ix})$, $v_l(z_l + r_l e^{ix})$ при $l = \overline{0,m}$ в ряды Фурье

$$u_l(z_l + r_l e^{ix}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_0^l + \sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^l \cos kx + \widetilde{\gamma}_k^l \sin kx\}, \tag{4.5}$$

$$v_l(z_l + r_l e^{ix}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0^l + \sum_{k=1}^{\infty}\{\sigma_k^l \cos kx + \widetilde{\sigma}_k^l \sin kx\}, \tag{4.6}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\gamma_0^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \tag{4.7}$$

$$\sigma_0^l = (v_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k = (v_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}. \tag{4.8}$$

Поскольку для функций системы (2.2) выполняются равенства $h_0^0(e^{ix}) = 1/\sqrt{2}$, $h_k^0(e^{ix}) = \cos kx$ и $\widetilde{h}_k^0(e^{ix}) = \sin kx$, в $\widetilde{K}$ при $l = \overline{0,m}$ в силу (4.5), (4.6) выполняются соотношения

$$u_l(z) = \gamma_0^l h_0^l(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l(z) + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l(z)\}, \tag{4.9}$$

$$v_l(z) = \sigma_0^l h_0^l(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_k^l h_k^l(z) + \widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{h}_k^l(z)\}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) и равенства $|z - z_l|^2 \overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z) = \overset{(\sim)}{g}{}^l_k(z)$ следует, что

$$|z - z_l|^2 v_l(z) = \sigma_0^l g_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_k^l g_k^l + \widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{g}_k^l\}. \tag{4.11}$$

Функции $\overset{(\sim)}{h}{}^l_k$ и $\overset{(\sim)}{g}{}^l_k = \overset{(\sim)}{h}{}^l_k |z - z_l|^2$ системы (2.2) легко выражаются через функции $\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^l_k$ и $\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}^l_k$ системы (2.6). Действительно, из (2.2) и (2.6) следуют соотношения

$$\overset{(\sim)}{h}{}^l_k = \begin{cases} \sqrt{1+k^2}\, \overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^0_k, & l = 0, \\ \sqrt{1 + \dfrac{k^2}{r_l^2}}\, \overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^l_k, & l = \overline{1,m}, \end{cases}$$

$$\overset{(\sim)}{g}{}^l_k = O(k)(\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^l_k + \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}^l_k), \quad k \to \infty.$$

Из (4.9) и (4.11) находим

$$u_l = \gamma_0^l \mathbb{H}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{O(k) \gamma_k^l \mathbb{H}_k^l + O(k) \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l\}, \tag{4.12}$$

$$v_l |z - z_l|^2 = O(1)\sigma_0^l \mathbb{H}_0^l + O(1)\widetilde{\sigma}_0^l \mathbb{G}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{O(k)\sigma_k^l \mathbb{H}_k^l + O(k)\widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l + O(k)\sigma_k^l \mathbb{G}_k^l + O(k)\widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{\mathbb{G}}_k^l\right\}, \tag{4.13}$$

где множители $O(k)$ перед $\gamma_k^l, \ldots, \widetilde{\sigma}_k^l$ зависят только от k и r_l. Перепишем (4.12) и (4.13) в виде

$$u_l = \beta_0^l \mathbb{H}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\beta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\beta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l\}, \tag{4.14}$$

$$v_l |z - z_l|^2 = \eta_0^l \mathbb{H}_0^l + \chi_0^l \mathbb{G}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\eta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\eta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l + \chi_k^l \mathbb{G}_k^l + \widetilde{\chi}_k^l \widetilde{\mathbb{G}}_k^l\}. \tag{4.15}$$

В силу (1.2) (с учетом (4.7)–(4.10) и (2.2)) выполняются равенства

$$0 = u_l(\infty) = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2} = v_l(\infty) = (v_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2}, \quad l = \overline{1,m},$$

и, следовательно, выполняются соотношения $\gamma_0^l = 0$, $\sigma_0^l = 0$, $l = \overline{1,m}$.

Используя утверждение 2, равенства (4.9), (4.10) и то, что $|z - z_l|^2 \overset{(\sim)}{h}{}^l_k = \overset{(\sim)}{g}{}^l_k$, где $\overset{(\sim)}{g}{}^l_k$ определены в (2.2), получаем, что в $\widetilde{K}$ выполняется

$$u = \sum_{l=0}^{m} \gamma_0^l h_0^l + \sum_{l=0}^{m} \sigma_0^l g_0^l + \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l\} + \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_k^l g_k^l + \widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{g}_k^l\}, \tag{4.16}$$

где $\gamma_0^l = A_l$, $\sigma_0^l = B_l$. Таким образом, $u = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t_k$, где t_k определены ниже формулы (2.5).

Из (1.2), (4.14), (4.15) следует, что в $\widetilde{K}$ также справедливо представление

$$u = \sum_{l=0}^{m} \Big(\beta_0^l \mathbb{H}_0^l + \eta_0^l \mathbb{H}_0^l + \chi_0^l \mathbb{G}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\beta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\beta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\eta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\eta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l + \chi_k^l \mathbb{G}_k^l + \widetilde{\chi}_k^l \widetilde{\mathbb{G}}_k^l\} \Big). \quad (4.17)$$

Перепишем (4.17) в терминах функций $\mathbb{T}_k$, введенных после формулы (2.7):

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbb{T}_k. \quad (4.18)$$

Введем частичные суммы $s_n(\cdot; u)$ и $s_n^*(\cdot; u)$

$$s_n(\cdot; u) = \sum_{k=1}^{n} (u, T_k) T_k, \quad s_n^*(\cdot; u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{T}_k, \quad (4.19)$$

где T_k и $\mathbb{T}_k$ определены ниже выражений (2.5) и (2.7), соответственно, а произведение $(\cdot,\cdot)$ введено в (2.3).

Введем следующую норму:

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_1} + \sum_{k=0}^{m} \Big\| \frac{u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} \Big\|_{L_1}. \quad (4.20)$$

Лемма 2. *Пусть функция $u(z)$ является бигармонической в $\widetilde{K}$, тогда для коэффициентов $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^l$ ряда (4.16) выполняются соотношения*

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l = O(k)\|u\|_1, \quad \overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^l = O(k)\|u\|_1, \quad k \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем оценку на $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^0$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^0$. Остальные коэффициенты $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^l$, $l = \overline{1,m}$, оцениваются аналогично. Рассмотрим круг $B_\rho(0)$ такой, что $0 < \rho < 1$ и $B_\rho(0)$ содержит внутри себя все круги $B_{r_k}(z_k), k = \overline{1,m}$. В центральном кольце, образованном окружностями $C_1(0)$ и $C_\rho(0)$ для бигармонических в K функций, справедливо утверждение 2 с $m = 1$. Откуда получаем, что существуют функции $u_0^*(z)$, $u_1^*(z)$, $v_0^*(z)$, $v_1^*(z)$ и константы A^* и B^* такие, что

$$u(z) = u_0^*(z) + u_1^*(z) + |z|^2 v_0^*(z) + |z|^2 v_1^*(z) + A^* \ln|z| + B^*|z|^2 \ln|z|,$$

где $u_0^*(z)$ и $v_0^*(z)$ гармонические в $B_1(0)$, $u_1^*(z)$ и $v_1^*(z)$ гармонические вне $\overline{B_\rho(0)}$, $u_1^*(\infty) = v_1^*(\infty) = 0$. В этом центральном кольце ряд, представляющий $u(z)$ (см. (4.16)), имеет вид

$$u(re^{ix}) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \frac{b_0 r^2}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + \widetilde{a}_k \sin kx) + \sum_{k=1}^{\infty} r^{k+2} (b_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{r^k} (a_{-k} \cos kx + \widetilde{a}_{-k} \sin kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{r^{k-2}} (b_{-k} \cos kx + \widetilde{b}_{-k} \sin kx) + A \ln r + Br^2 \ln r, \quad (4.21)$$

где коэффициенты $\overset{(\sim)}{a}{}_k$ и $\overset{(\sim)}{b}{}_k$ согласно (4.7), (4.8) в случае, когда $\widetilde{K}$ является центральным кольцом, определяются по формулам

$$a_0 = (u_0^*(e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{a}{}_k = (u_0^*(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \quad (4.22)$$

$$b_0 = (v_0^*(\rho e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{b}_k = (v_0^*(\rho e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \tag{4.23}$$

$$\overset{(\sim)}{a}_{-k} = (u_1^*(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{b}_{-k} = (v_1^*(\rho e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}.$$

Докажем теперь, что в (4.16) при $k \geq 0$ выполняются равенства

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^0 = \overset{(\sim)}{a}_k, \qquad \overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^0 = \overset{(\sim)}{b}_k. \tag{4.24}$$

В силу (1.2) в $\widetilde{K}$, а следовательно, и в кольце $B_1(0)\backslash\overline{B_\rho(0)}$, справедливо равенство

$$u(z) = u_0(z) + \Big(\sum_{k=1}^m u_k(z) + \sum_{k=1}^m A_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big|\Big) + |z|^2 v_0(z)$$

$$+ |z|^2\Big(\sum_{k=1}^m v_k(z) + \sum_{k=1}^m B_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big|\Big) + \Big(\sum_{k=1}^m A_k\Big)\ln|z| + \Big(\sum_{k=1}^m B_k\Big)|z|^2\ln|z|.$$

Учитывая, что разложение типа (1.2) в кольце тоже однозначно, и принимая во внимание области определения функций, мы заключаем, что справедливы соотношения

$$u_0^*(z) = u_0(z), \quad v_0^*(z) = v_0(z) \ \text{— в} \ B_1(0), \tag{4.25}$$

$$u_1^*(z) = \sum_{k=1}^m u_k(z) + \sum_{k=1}^m A_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big|, \quad v_1^*(z) = \sum_{k=1}^m v_k(z) + \sum_{k=1}^m B_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big| \ \text{— вне} \ \overline{B_\rho(0)},$$

$$A^* = \sum_{k=1}^m A_k, \qquad B^* = \sum_{k=1}^m B_k.$$

Из формул (4.7), (4.22) и (4.25) следует, что

$$\gamma_0^0 = (u_0(e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2} = (u_0^*(e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2} = a_0,$$

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^0 = (u_0(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2} = (u_0^*(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2} = \overset{(\sim)}{a}_k.$$

Аналогичным образом с помощью (4.8) и (4.23) проверяется, что $\overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^0 = \overset{(\sim)}{b}_k$ при $k \geq 0$.

Разложим следующие функции в ряды Фурье:

$$u(e^{ix}) \sim A_0^0 + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(0)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(0)} \sin kx), \quad u(\rho e^{ix}) \sim A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(1)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(1)} \sin kx), \tag{4.26}$$

$$\frac{u(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1} \sim A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(2)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(2)} \sin kx), \tag{4.27}$$

$$\frac{u(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=\rho} \sim A_0^{(3)} + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(3)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(3)} \sin kx). \tag{4.28}$$

Подставляя $r = 1$ и $r = \rho$ в (4.21) и приравнивая коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$ в формулах (4.21) и (4.26), получаем уравнения

$$a_k + \rho^k a_{-k} + b_k + \rho^k b_{-k} = A_k^{(0)}, \quad \rho^k a_k + a_{-k} + \rho^{k+2} b_k + b_{-k} = A_k^{(1)}. \tag{4.29}$$

Дифференцируя (4.21) по r, подставляя $r = 1$ и $r = \rho$ и приравнивая коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$ в получившемся ряду и (4.27), (4.28), получаем

$$\begin{gathered} ka_k - k\rho^k a_{-k} + (k+2)b_k - (k-2)\rho^k b_{-k} = A_k^{(2)}, \\ k\rho^{k-1}a_k - k\rho^{-1}a_{-k} + (k+2)\rho^{k+1}b_k - (k-2)\rho b_{-k} = A_k^{(3)}. \end{gathered} \tag{4.30}$$

Аналогичные уравнения мы получим для $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$. Решив систему из уравнений (4.29) и (4.30) (решение не будем выписывать ввиду его громоздкости) и принимая во внимание (4.24), для каждой их четырех величин $\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k$ можно получить, что

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k, \overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k = \overset{(\sim)}{a}_k, \overset{(\sim)}{b}_k = O(k)\max\Big\{|\overset{(\sim)}{A}{}^{(0)}_k|, |\overset{(\sim)}{A}{}^{(1)}_k|, |\overset{(\sim)}{A}{}^{(2)}_k|, |\overset{(\sim)}{A}{}^{(3)}_k|\Big\}, \quad k \to \infty. \tag{4.31}$$

Поскольку $\overset{(\sim)}{A}{}^{(l)}_k$ являются коэффициентами Фурье, выполняются неравенства

$$|\overset{(\sim)}{A}{}^{(0)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u(e^{ix})|dx, \quad |\overset{(\sim)}{A}{}^{(1)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u(\rho e^{ix})|dx, \tag{4.32}$$

$$|\overset{(\sim)}{A}{}^{(2)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big|dx, \quad |\overset{(\sim)}{A}{}^{(3)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big|dx. \tag{4.33}$$

Из (4.31)–(4.33) следует, что при $k \to \infty$ выполняются четыре соотношения

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k, \overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k = O(k)\Big(\sum_{k=0}^m \|u(e^{ix})\|_{L_1} + \|u(\rho e^{ix})\|_{L_1} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|_{L_1} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|_{L_1}\Big). \tag{4.34}$$

Функция $u(z)$ восстанавливается в $\widetilde{K}$ через граничные значения и производные по нормали по формуле

$$u(z) = \sum_{k=0}^m \int\limits_0^{2\pi} u(z_k + r_k e^{ix})F_k^{(1)}(x,z)dx + \sum_{k=0}^m \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k} F_k^{(2)}(x,z)dx, \tag{4.35}$$

где $F_k^{(l)}(x,z)$ — ядра, определяемые однозначно по геометрии области $\widetilde{K}$, такие, что $F_k^{(l)}(x,z)$ и $\dfrac{\partial F_k^{(l)}}{\partial r}(x,z)$ непрерывны при $x, z \in \widetilde{K}$, в частности при $z = \rho e^{ix}$. Откуда, дифференцируя (4.35) по r, получаем

$$\begin{gathered} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big| \le \sum_{k=0}^m \int\limits_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|dx \max_{|z|=\rho, x\in[0,2\pi]} \Big|\frac{\partial F_k^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=\rho}(x,z)\Big| \\ + \sum_{k=0}^m \int\limits_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big|dx \max_{|z|=\rho, x\in[0,2\pi]} \Big|\frac{\partial F_k^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=\rho}(x,z)\Big|, \end{gathered}$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|_{L_1} \le C_1\Big(\sum_{l=0}^m \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_1} + \sum_{l=0}^m \Big\|\frac{u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}\Big\|_{L_1}\Big) = C_1\|u\|_1, \tag{4.36}$$

где константа C_1, как и другие константы C_k в работе, положительная и зависящая только от геометрии области $\widetilde{K}$. Аналогичная оценка верна также для $\|u(\rho e^{ix})\|_{L_1}$. Из нее, из (4.34) и (4.36) следует нужная оценка в лемме 2. $\square$

Аналогично доказательству леммы 6 в [1] проверяется справедливость следующей леммы. Однако ее доказательство содержит ряд нюансов, таких как, например, использование леммы 2 и представления (4.17). Поэтому приведем доказательство этой леммы полностью.

Лемма 3. *Пусть* $s_n(\cdot;u)$ *и* $s_n^*(\cdot;u)$ *— суммы, определенные по формулам* (4.19), $\|\cdot\|_1$ *— норма, введенная в* (4.20), *а* τ *— в* (2.8). *При* $\tau<\tau'<1$ *в* $\widetilde{K}$ *выполняется оценка*

$$s_n(\cdot;u)-s_n^*(\cdot;u)=O(\tau'^{(n/(4m+4))})\|u\|_1,\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Пусть $v^*(z)\in h_p(\widetilde{K})$, T_K и t_K определены после (2.5), а $\mathbb{T}_k$ — после (2.7). Поскольку функции $T_s(z), s\in\mathbb{N}$, образуют ортонормированную по (2.3) систему и являются линейными комбинациями функций $t_l(z), l\le s$, то частичная сумма $s_n(\cdot,v^*)$, являющаяся линейной комбинацией функций $t_l(z), l=\overline{1,n}$, однозначно определяется из условия

$$(v^*-s_n(\cdot,v^*),t_k)=0,\quad k=\overline{1,n}. \tag{4.37}$$

Представим сумму $s_n(z,v^*)$ в следующем виде: $s_n(z,v^*)=\sum_{l=1}^n\alpha_l^*t_l(z)$. Тогда из условия (4.37) следует, что коэффициенты α_l^* удовлетворяют системе уравнений

$$A\alpha^*=V^*, \tag{4.38}$$

где A — матрица Грама, $A=((t_l,t_k))_{l,k=1}^n$, $\alpha^*=(\alpha_l^*)_{l=1}^n$, $V^*=((v^*,t_k))_{k=1}^n$. Решение системы уравнений (4.38) записывается в виде $\alpha^*=A^{-1}V^*$.

Оценим следующую норму: $\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)}=\max_{\|V\|_{l_\infty}=1}\|A^{-1}V\|_{l_\infty}$, где $\|(y_1,y_2,\dots,y_n)\|_{l_\infty}=\max_{k=\overline{1,n}}|y_k|$. Пусть $\|V\|_{l_\infty}=\|(V_1,V_2,\dots,V_n)\|_{l_\infty}=1$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $t_k(z), k=\overline{1,n}$, удовлетворяющую условию

$$(v,t_k)=V_k,\quad k=\overline{1,n}. \tag{4.39}$$

Разложим функцию $v(z)$ в ряд по функциям $T_s(z), s=\overline{1,n}$:

$$v(z)=\sum_{s=1}^n(T_s,v)T_s(z). \tag{4.40}$$

Представим функцию $T_s(z)$ в виде

$$T_s(z)=\sum_{l=1}^s\alpha_{l,s}t_l(z). \tag{4.41}$$

Из леммы 2 и того, что $(T_k,T_k)=1$ следует, что $\alpha_{l,s}=O(l)=O(s)$. Пусть $v(z)=\sum_{k=1}^n\alpha_k^vt_k(z)$. Подставив выражение (4.41) в (4.40), мы получим, что $\alpha_l^v=\sum_{s=l}^n(T_s,v)\alpha_{l,s}$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\alpha_l^v|=\left|\sum_{s=l}^n(T_s,v)\alpha_{l,s}\right|\le C_2\sum_{s=l}^n s|(T_s,v)|=C_2\sum_{s=l}^n s\left|\left(\sum_{\nu=1}^s\alpha_{\nu,s}t_\nu,v\right)\right|$$
$$\le C_3\sum_{s=l}^n\sum_{\nu=1}^s s^2|(t_\nu,v)|=O(n^4)\max_\nu|(t_\nu,v)|. \tag{4.42}$$

Учитывая (4.39), (4.42) и $\|V\|_\infty=1$, отсюда получаем оценки $|\alpha_k^v|\le C_4n^4$ $(k=\overline{1,n})$. Заметим, что коэффициенты α_k^v являются решением системы уравнений $A\alpha=V$, где $\alpha=(\alpha_k^v)_{k=1}^n$. Таким образом, из равенства $\|V\|_\infty = 1$, и (4.42) следует, что $\|A^{-1}V\|_\infty = \|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\|_\infty \le C_4 n^4$. Поэтому выполняется неравенство

$$\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} \le C_4 n^4. \tag{4.43}$$

Частичная сумма $s_n(\cdot, u)$ является полиномом наилучшего приближения по гармоникам t_l, $l = \overline{1, n}$, функции $u(z)$ по норме $(\cdot, \cdot)$. Следовательно, сумма $s_n(\cdot; u)$ сохраняет линейные комбинации функций $t_k(z), k = \overline{1, n}$. Отсюда, полагая $v^*(z) = u(z) - s_n^*(z; u)$, выводим, что

$$s_n(\cdot; v^*) = s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u) = s_n(\cdot; u - s_n^*(\cdot; u)). \tag{4.44}$$

Частичная сумма $s_n(\cdot; v^*)$ находится из системы (4.38). В силу оценки (4.43) получаем, что справедливо неравенство

$$\|\alpha^*\|_{l_\infty} \le \|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} \|V^*\|_{l_\infty} \le C_4 n^4 \|V^*\|_{l_\infty}. \tag{4.45}$$

Оценим теперь величину $\|V^*\|_{l_\infty}$. Координаты V_k^* вычисляются по формуле $V_k^* = (v^*, t_k) = (u - s_n^*(\cdot, u), t_k)$. Из (4.18) и второго равенства в (4.19) следует

$$u(z) - s_n^*(z; u) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_l \mathbb{T}_l(z).$$

Из (4.12)–(4.15) и леммы 2 получаем, что в (4.17)

$$\overset{(\sim)}{\beta}{}^l_k = O(k) \overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k = O(k^2)\|u\|_1, \quad \overset{(\sim)}{\eta}{}^l_k = O(k) \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k = O(k^2)\|u\|_1, \quad \overset{(\sim)}{\chi}{}^l_k = O(k) \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k = O(k^2)\|u\|_1. \tag{4.46}$$

Из (4.46) вытекает, что в (4.19) $\lambda_k = O(k^2)\|u\|_1$. Отсюда с помощью леммы 1 с τ', замененной на τ'', $\tau < \tau'' < \tau' < 1$, имеем следующую оценку:

$$(u - s_n^*(\cdot; u), t_k) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_l (\mathbb{T}_l, t_k) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_l O(\tau''^{(l/(4m+4))})$$

$$= \|u\|_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} O(l^2 \tau''^{(l/(4m+4))}) = \|u\|_1 O(n^2 \tau''^{(n/(4m+4))}), \quad n \to \infty,$$

из которой следует, что выполняется оценка

$$\|V^*\|_{l_\infty} = \max_{k=\overline{1,n}} |(v^*, t_k)| = \max_{k=\overline{1,n}} |(u - s_n(\cdot; u), t_k)| = O(n^2 \tau''^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \qquad n \to \infty.$$

Остается только подставить это соотношение в (4.45) и получить

$$\max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| = \|\alpha^*\|_{l_\infty} = O(n^6 \tau''^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \quad n \to \infty. \tag{4.47}$$

Из определения коэффициентов α_k^* следует, что выполняются равенства $s_n(z; u - s_n^*(\cdot; u)) = s_n(z; v^*) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* t_k(z)$. Как следствие из (4.44), (4.47) и соотношения $t_k(z) = O(1)$ в $\widetilde{K}$ выводим

$$s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u) = s_n(u - s_n^*(\cdot; u)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* h_k(z) = \max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| O(n)$$

$$= O(n^7 \tau''^{(n/(4m+4))})\|u\|_1 = O(\tau'^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \quad n \to \infty.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 99–114.
2. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами и их приложения к задачам математической физики// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 109–124.
3. **Дубосарский Г.А.** Неортогональные гармонические всплески и их приложение к решению задачи Неймана// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 136–151.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 281–296.
6. **Голузин Г. М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
7. **Субботин Ю. Н., Черных Н. И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.

Дубосарский Глеб Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: glebUU@mail.ru

Поступила 16.03.2016