

УДК 517.911

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ C-ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Я. Дерр

Задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — производными функций ограниченной вариации «погружается» в пространство обобщенных функций Коломбо. Для коэффициентов — производных ступенчатых функций в явном виде находится решение  $\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)$  задачи Коши в представителях, предел которого при  $\mu \rightarrow +0$  объявляется решением исходной задачи. Так появляется оператор  $\mathbf{T}$ , который ставит в соответствие исходной задаче ее решение в виде правильной функции и который определен сначала лишь на плотном множестве. С помощью известной топологической теоремы о продолжении по непрерывности  $\mathbf{T}$  продолжается до оператора  $\widehat{\mathbf{T}}$  и который определен на всем пространстве функций ограниченной вариации. Решение оказывается правильной функцией.

Ключевые слова: правильные функции, функции ограниченной вариации, распределения, обобщенные функции Коломбо, системы дифференциальных уравнений.

V. Ya. Derr. Differential equations in the algebra of  $C$ -generalized functions.

We consider the Cauchy problem for a system of linear differential equations whose coefficients are derivatives of functions of bounded variation. The problem is immersed in the space of Colombeau generalized functions. If the coefficients are derivatives of step functions, we find an explicit solution  $\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)$  of the Cauchy problem in terms of representatives, and the limit of the solution as  $\mu \rightarrow +0$  is defined to be the solution of the original problem. In this way, we obtain a densely defined (on the space of regulated functions) operator  $\mathbf{T}$ , which associates the Cauchy problem with its solution. Next, using a known topological result on continuous extension, we extend  $\mathbf{T}$  to the operator  $\widehat{\mathbf{T}}$  defined on the entire space of functions of bounded variation. It turns out that the solution is a regulated function.

Keywords: regulated functions, functions of bounded variation, distributions, Colombeau generalized functions, systems of differential equations.

MSC: 34A30, 34A37, 46F05, 46F10, 26A45

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-62-75

### Введение

В работе [1] рассматривается скалярное линейное дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в качестве коэффициента и правой части. Здесь методика работы [1] распространяется на систему  $n$ ,  $n \geq 1$ , таких уравнений.

По традиции (см. пионерские работы [2;3], см также [4–6] и др.) задача Коши для системы линейных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах записывается в виде

$$x' = B'x + f', \quad t \in \mathcal{I}, \quad x(t_0) = x^0. \quad (0.1)$$

Если  $n \times n$ -матрица  $B$  и  $n$ -вектор  $f$  локально абсолютно непрерывны, то  $B'$  и  $f'$  локально суммируемы, и задача Коши (0.1) — классическая задача Каратеодори; под ее решением понимается локально абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая уравнению в (0.1) почти всюду. Если  $B$  и  $f$  не являются локально абсолютно непрерывными, то дифференцирование в (0.1) приходится понимать в каком-либо обобщенном смысле, например, в смысле теории обобщенных функций (распределений), решение, как правило оказывается разрывным, произведение  $B'x$  — некорректным; эта запись в (0.1) становится лишь традиционным символом. Авторы процитированных (и многих других) работ, налагая различные условия на  $B$  и  $f$ , обходят упомянутую проблему каждый по-своему.

В настоящей работе предполагается, что элементы матрицы этой системы и компоненты правой части представляют собой производные в смысле теории обобщенных функций от *правильных* (см. ниже) функций. Задача (0.1) “погружается” в алгебру обобщенных функций Коломбо (см. ниже; см. также [7;8]), где все необходимые операции корректно определены. Далее, решается вопрос о существовании и некоторых свойствах решений — обобщенных функций Коломбо. Затем с помощью корректно определенного предельного перехода осуществляется переход к решению — обычной функции. На этом пути возникает оператор, который ставит в соответствие паре  $(B, f)$  решение задачи (0.1) — обычную функцию. Сначала этот оператор определяется на множестве ступенчатых  $(B, f)$ , затем он продолжается общий случай.

Центральный результат статьи опирается на следующую теорему о продолжении отображения по непрерывности из [9, с. 114].

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A$  — всюду плотное множество в  $X$  и  $f : X \rightarrow Y$  — отображение множества  $A$  в регулярное пространство  $Y$ . Для того чтобы существовало непрерывное отображение  $\hat{f} : X \rightarrow Y$ , продолжающее  $f$ , необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было  $x \in X$ ,  $f(y)$  стремилось к некоторому пределу в  $Y$ , когда  $y$  стремится к  $x$ , оставаясь в  $A$ . Непрерывное продолжение  $\hat{f}$  отображения  $f$  на  $X$  единственно.

В отличие от большинства работ, рассматривающих дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций Коломбо (см., например, [10; 11]) мы получаем в качестве решений задачи (0.1) обычные функции. При этом удалось избежать “геометрических” ограничений на коэффициенты (как это сделано в работах, например, [8; 12; 13]).

### 1. C-обобщенные функции и числа

**1.1.** Для удобства чтения приведем необходимые сведения из [7;8]. Более подробно см. [1].

Пусть  $\mathcal{I} = (\alpha, \beta)$  — промежуток вещественной оси (быть может, полуось или вся ось). Обозначим через  $\mathcal{D}$  множество бесконечно дифференцируемых функций  $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющих компактный в  $\mathcal{I}$  носитель (финитных функций). Для  $k = 1, 2, \dots$  положим

$$\mathcal{A}_k \doteq \left\{ \varphi \in \mathcal{D} : \int_{\mathcal{I}} \varphi(t) dt = 1, \int_{\mathcal{I}} t^i \varphi(t) dt = 0, i = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Множества  $\mathcal{A}_k$  непустые;  $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots \supset \mathcal{A}_k \supset \dots$ ,  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \emptyset$ ;  $\varphi_{\mu} \doteq \frac{1}{\mu} \varphi\left(\frac{t}{\mu}\right)$ ,  $\mu > 0$ . Легко непосредственно убедиться, что  $\varphi_{\mu} \in \mathcal{A}_k$  в том и только том случае, когда  $\varphi \in \mathcal{A}_k$ .

Через  $\mathcal{E}$  обозначим множество отображений  $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что функция  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi, t)$  бесконечно дифференцируема по  $t$  при любой фиксированной  $\varphi \in \mathcal{A}_1$ . Из  $\mathcal{E}$  выделим подмножество “умеренных” элементов

$$\mathcal{E}_{mod} \doteq \left\{ \mathcal{R} \in \mathcal{E} : (\forall [a, b] \subset \mathcal{I}) (\forall m \in \mathbb{N}) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall \varphi \in \mathcal{A}_N) \right. \\ \left. (\exists C, \eta) \left( \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}(\varphi_{\mu}, t) \right| \leq \frac{C}{\mu^N} \quad (0 < \mu < \eta) \right) \right\}.$$

Множество  $\mathcal{E}_{mod}$  — алгебра относительно сложения и умножения функций, а  $\mathfrak{N} \subset \mathcal{E}_{mod}$ ,

$$\mathfrak{N} \doteq \left\{ \mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} : (\forall [a, b] \subset \mathcal{I}) (\forall m \in \mathbb{N}) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall k \in \mathbb{N}, k > N) (\forall \varphi \in \mathcal{A}_k) \right. \\ \left. (\exists C, \eta) \left( \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}(\varphi_{\mu}, t) \right| \leq C \mu^{k-N} \quad (0 < \mu < \eta) \right) \right\}$$

— двусторонний идеал этой алгебры. Элементы фактор-алгебры  $\mathfrak{G} \doteq \mathcal{E}_{mod}/\mathfrak{N}$  называются *C-обобщенными функциями* (в терминологии Коломбо — *новыми обобщенными функциями* [7]). Таким образом, C-обобщенные функции — это классы эквивалентных отображений  $\mathcal{R}(\varphi, t) : \mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2 \iff \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 \in \mathfrak{N}$ .

**1.2.** Производной элемента  $G \in \mathfrak{G}$  называется класс  $\frac{dG}{dt}$ , содержащий производную  $\frac{d\mathcal{R}(\varphi, t)}{dt}$ , где  $\mathcal{R}(\varphi, t)$  — произвольный представитель класса  $G$ . C-обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.

Бесконечно дифференцируемой функции  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  поставим в соответствие класс из  $\mathfrak{G}$ , содержащий в качестве представителя  $\mathcal{R}(\varphi, t) = f(t)$ . Это отображение из алгебры бесконечно дифференцируемых функций в алгебру  $\mathfrak{G}$  инъективно. Образ множества бесконечно дифференцируемых функций при этом вложении обозначим как  $\mathfrak{C}^\infty$ ;  $\mathfrak{C}^\infty$  — подалгебра в  $\mathfrak{G}$ . Локально суммируемые функции специальным образом (см. [1]) вкладываются в  $\mathfrak{G}$ . Образ пространства локально суммируемых (непрерывных) функций при этом вложении обозначим через  $\mathfrak{L}$  ( $\mathfrak{C}$ ).

Класс  $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}$  называется *распределением*, если существует натуральное число  $m$  и локально суммируемая на  $\mathcal{I}$  функция  $f$  такие, что  $\mathfrak{T} = \frac{d^m \mathfrak{f}}{dt^m}$ , где  $\mathfrak{f}$  — класс, порожденный функцией  $f$ . Это приводит к известному определению обобщенной функции Соболева — Шварца (распределению). Например, дельта-функция  $\delta$  определяется как производная от единичной функции  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $f(t) = 1$  при  $t > 0$ ; при этом оказывается  $\mathcal{R}_\delta(\varphi, t) = \varphi(-t)$ .

Пространство распределений (вне его связи с  $\mathfrak{G}$ ) с обычной топологией обозначим через  $\mathcal{D}'$ . Пусть  $\mathbf{V}$  — оператор вложения  $\mathcal{D}'$  и различных его подмножеств в  $\mathfrak{G}$ .

Многие трудности в работе с C-обобщенными функциями обусловлены тем, что  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathcal{D}'$  хоть и являются линейными подпространствами в  $\mathfrak{G}$ , но не являются подалгебрами: класс, порожденный произведением  $f_1 \cdot f_2$ , вообще говоря, не совпадает с произведением классов, порожденных локально суммируемыми функциями  $f_1$  и  $f_2$ ;  $\delta^2 \in \mathfrak{G}$  есть класс, содержащий  $\mathcal{R}(\varphi, t) = \varphi^2(-t)$ , но  $\delta^2 \notin \mathcal{D}'$  (см. [1]).

**1.3** По аналогии с C-обобщенными функциями вводятся C-обобщенные вещественные числа. В алгебре всех функционалов  $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  выделяется подалгебра умеренных элементов, т. е. таких, что

$$(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall \varphi \in \mathcal{A}_1) (\exists C, \eta > 0) \left( |\mathcal{R}(\varphi_\mu)| \leq \frac{C}{\mu^N} \quad (0 < \mu < \eta) \right);$$

двусторонний идеал в этой алгебре образуют функционалы, обладающие свойством

$$(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall k \in \mathbb{N}) (\forall \varphi \in \mathcal{A}_1) (\exists C, \eta > 0) \left( |\mathcal{R}(\varphi_\mu)| \leq C \mu^{k-N} \quad (0 < \mu < \eta) \right).$$

Элементы фактор-алгебры  $\widehat{\mathbb{R}}$  умеренных элементов по этому идеалу называются *C-обобщенными вещественными числами*. Это понятие позволяет говорить о значении C-обобщенной функции в точке, которое полностью совпадает со значением функции в точке только для бесконечно дифференцируемой функции.

## 2. Вспомогательные обозначения, определения и утверждения

**2.1.** Пусть  $X$  — некоторая структура (множество, векторное пространство, алгебра). В дальнейшем  $X^{n \times n}$  ( $X^n$ ) означает  $n \times n$ -матрицу ( $n$ -вектор), элементами которой (компонентами которого) являются элементы  $X$ . Таким образом, будем иметь дело с матрицами из

$$\mathfrak{G}^{n \times n}, \quad \mathfrak{C}^{\infty, n \times n}, \quad \mathfrak{L}^{n \times n}, \quad \mathfrak{C}^{n \times n}, \quad \mathcal{D}'^{n \times n}, \quad \mathcal{D}^{n \times n}, \quad \widehat{\mathbb{R}}^{n \times n}$$

и векторами из

$$\mathfrak{G}^n, \quad \mathfrak{C}^{\infty, n}, \quad \mathfrak{L}^n, \quad \mathfrak{C}^n, \quad \mathcal{D}'^n, \quad \mathcal{D}^n, \quad \widehat{\mathbb{R}}^n,$$

а также с другими матрицами и векторами подобного рода.

Очевидно,  $\mathfrak{G}^{n \times n}$  — алгебра,  $\mathfrak{C}^{\infty, n \times n}$  — ее подалгебра. Оператор вложения  $\mathcal{D}'^n$  ( $\mathcal{D}^{n \times n}$ ) в  $\mathfrak{G}^n$  ( $\mathfrak{G}^{n \times n}$ ) по-прежнему обозначаем одной буквой  $\mathbf{V}$ ; аналогично поступаем и с другими операторами вложения. Так, пишем  $\mathfrak{D}'^n = \mathbf{V}\mathcal{D}'^n$ ,  $\mathfrak{D}^{n \times n} = \mathbf{V}\mathcal{D}^{n \times n}$ .

**2.2.** Функция  $x : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *правильной*, если в каждой точке  $t \in \mathcal{I}$  существуют конечные односторонние пределы

$$x(t+), x(t-), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (2.2)$$

Впервые соответствующий англоязычный термин “regulated”, по-видимому, появился в [14]. Переводчик книги [14] (см.[15]) интерпретировал этот термин как “простые”, что совершенно неприемлемо, поскольку этот термин означает функции, принимающие не более чем счетное множество значений. Ряд авторов употребляет для таких функций термин “прерывистые” (см., например, [16]), что также неприемлемо, так как класс правильных функций содержит непрерывные функции. Применяется и термин “линейчатые” ([17]), также, на наш взгляд, не отражающий существа дела. Термин “правильные функции”, по-видимому, ввел переводчик книги [18] Б. П. Пугачев. Этот термин использовался в статье [19], а также в [20–23] и в последующих работах этих авторов.

Непрерывные, кусочно-непрерывные функции, функции ограниченной вариации являются правильными. Правильные функции, у которых кроме пределов (2.2) существуют также пределы  $x(\alpha+)$ ,  $x(\beta-)$ , являются ограниченными [22] и, следовательно, локально суммируемыми на  $\mathcal{I}$ . Так как непрерывно дифференцируемая функция интегрируема по правильной функции в смысле Римана — Стильтеса [22, с. 65], то для производной  $b'$  от правильной функции  $b$  имеет место представление [1]

$$\mathcal{R}_{b'}(\varphi, t) = (RS) \int_{\mathcal{I}-t} \varphi(s) db(s+t). \quad (2.3)$$

**2.3.** Будем рассматривать два пространства правильных функций. Пусть  $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$  означает множество ограниченных правильных функций, т. е. таких ограниченных функций, что существуют конечные односторонние пределы (2.2), а через  $\mathbf{R}(\mathcal{I})$  обозначим множество правильных функций, у которых наряду с пределами (2.2) существуют также пределы

$$x(\alpha+) \quad (x(-\infty)), \quad x(\beta-) \quad (x(+\infty)).$$

Как уже было отмечено, функции из таких множеств ограничены. Очевидно,  $\mathbf{R}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ ; оба множества являются векторными пространствами над  $\mathbb{R}$ . Введем на них норму

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} |x(t)|. \quad (2.4)$$

Для  $[a, b] \subset \mathcal{I}$  пространства  $\mathbf{R}([a, b]) = \mathbf{R}_b([a, b])$  являются банаховыми относительно нормы (2.4) (см., например, [19; 22]). Полнота пространств  $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ ,  $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$  относительно этой нормы доказана в [1].

Пусть далее  $H(\mathcal{I})$  — множество простых функций  $x : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  (ступенчатых) с конечным множеством  $\mathcal{T}(x)$  точек разрыва,  $H_v(\mathcal{I})$  — множество простых функций с не более чем счетным множеством  $\mathcal{T}(x)$  и сходящимся рядом скачков

$$\sum_{t \in \mathcal{T}(x)} |\sigma_t(x)|, \quad (2.5)$$

$H_b(\mathcal{I})$  — множество ограниченных простых функций с возможно расходящимся рядом скачков (2.5). Очевидно, имеют место включения

$$H(\mathcal{I}) \subset H_v(\mathcal{I}) \subset H_b(\mathcal{I}). \quad (2.6)$$

Нормированные пространства с нормой (2.4) обозначаем соответственно через  $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$ ,  $\mathbf{RH}_v(\mathcal{I})$ ,  $\mathbf{RH}_b(\mathcal{I})$ .

В [15; 19; 22] (см. также [16]) доказано, что пространство  $\mathbf{RH}([a, b])$  плотно в пространстве  $\mathbf{R}_b([a, b]) = \mathbf{R}([a, b])$ . В силу включений (2.6) в  $\mathbf{R}([a, b])$  плотны также пространства  $\mathbf{RH}_v([a, b])$ ,  $\mathbf{RH}_b([a, b])$ . Для открытого интервала ситуация несколько иная: пространства  $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$ ,  $\mathbf{RH}_v(\mathcal{I})$  плотны в пространстве  $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ , однако в пространстве  $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$  множество  $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$  плотным не является. Множество  $\mathbf{RH}_b(\mathcal{I})$  плотно в пространстве  $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$  в топологии равномерной сходимости на отрезках ([1]).

Обозначение  $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$  сохраним за векторным пространством  $H_v(\mathcal{I})$  с нормой (см. (2.5))

$$\|x\| \doteq \sup_{t \in \mathcal{I}} |x(t)| + \sum_{t \in \mathcal{T}(x)} |\sigma_t(x)|; \quad (2.7)$$

относительно этой нормы  $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$  — банахово пространство.

**2.4.** Работа с правильными функциями требует некоторой модификации понятия полной вариации. Пусть  $x \in \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$  ( $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ ). Рассмотрим разбиение  $\mathfrak{d}$  интервала  $\mathcal{I}$ :

$$\alpha < t_0 < t_1 < \dots < t_m < \beta \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta).$$

Составим сумму

$$v_{\mathfrak{d}}(f) \doteq \sum_{k=1}^m |f(t_k-) - f(t_{k-1}+)|.$$

Назовем *полной вариацией*  $x$  величину (или символ  $+\infty$ )

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x) \doteq \sup_{\mathfrak{d}} v_{\mathfrak{d}}(x).$$

Пространство функций, для которых определенная полная вариация конечна, с нормой

$$\|x\| \doteq \sup_{t \in \mathcal{I}} |x(t)| + \bigvee_{\mathcal{I}}(x) \quad (2.8)$$

будет обозначаться как  $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$ . Нетрудно убедиться (см., например, [23, с. 69, 274]), что  $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$  — банахово пространство. Через  $\mathbf{CBV}(\mathcal{I})$  будем обозначать множество непрерывных функций ограниченной вариации как подмножество из  $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ .

Заметим, что норма (2.8) в  $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$  совпадает с нормой (2.7); следовательно,  $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$  — (замкнутое) подпространство пространства  $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$ . По этой причине  $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$  не является плотным в  $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$ .

Векторное пространство функций, для которых полная вариация конечна, относительно нормы (2.4) полным не является. Обозначим это множество, в котором действует норма (2.4), как  $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ . Так как имеют место включения нормированных векторных пространств с нормой (2.4)

$$\mathbf{RH}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{RH}_v(\mathcal{I}) \subset \mathbf{RBV}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}(\mathcal{I}),$$

то  $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$  также плотно в  $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ .

Как известно (см., например, [22, с. 22]), функции  $x \in \mathbf{BV}(\mathcal{I})$  можно единственным образом представить в виде

$$x(t) = x_d(t) + x_c(t), \text{ где } x_d \in H_v(\mathcal{I}), \quad x_c \in \mathbf{CBV}(\mathcal{I}), \quad x_d(\alpha+) = 0, \quad (2.9)$$

называем  $x_c$  *непрерывной*, а  $x_d$  *дискретной составляющей функции*  $x$ . При этом (см., например, [22, с. 26])

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x) = \bigvee_{\mathcal{I}}(x_d) + \bigvee_{\mathcal{I}}(x_c). \quad (2.10)$$

Так как  $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$  и  $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$  как множества представляют собой одно и то же, то о представлении (2.9) можем говорить и для  $x \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ .

Пусть  $x \in \mathbf{CBV}(\mathcal{I})$ , разбиение  $\mathfrak{d}$  определяется так:  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ ,  $\mathcal{I}_k = (t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ ,  $\mathcal{I}_m = (t_{m-1}, t_n)$ ; положим

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^m x(t_k) \chi_{\mathcal{I}_k}(t) \quad (\chi_{\mathcal{I}_k} \text{ — характеристическая функция промежутка } \mathcal{I}_k). \quad (2.11)$$

По теореме Кантора функция  $x$  равномерно непрерывна на любом отрезке из  $\mathcal{I}$ , а в силу существования пределов  $x(\alpha+)$ ,  $x(\beta-)$  можно сделать колебания функции  $x$  вблизи  $\alpha$  и  $\beta$  сколь угодно малыми. Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое разбиение  $\mathfrak{d}$ , что  $w_k(x) \doteq \sup_{t \in \mathcal{I}_k} x(t) - \inf_{t \in \mathcal{I}_k} x(t) < \varepsilon$ ;  $m$  определяется этим  $\varepsilon$ . Так как (см. [23, с. 128])  $\sum_{k=1}^m \chi_{\mathcal{I}_k}(t) = 1$  ( $t \in \mathcal{I}$ ), то  $\|x_m - x\|_{\mathbf{R}(\mathcal{I})} < \varepsilon$ ; кроме того, так как  $x_m \in \mathbf{RH}(\mathcal{I})$ , то ее полная вариация на  $\mathcal{I}$  равна сумме модулей ее скачков (см. [22, с. 26]), и, следовательно,

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x_m) \leq \bigvee_{\mathcal{I}}(x). \quad (2.12)$$

Пусть теперь  $x \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ . Представим  $x$  согласно (2.9); при этом выполняется равенство (2.10). Как показано в [22, с. 53], существует последовательность  $\{x_{dm}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{RH}(\mathcal{I})$  такая, что

$$x_{dm}(t) \rightrightarrows x_d(t), \quad \bigvee_{\mathcal{I}}(x_{dm}) \leq \bigvee_{\mathcal{I}}(x_d). \quad (2.13)$$

Таким образом, суммируя сказанное в двух последних абзацах и учитывая соотношения (2.11)–(2.13), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 1.** *Для любой  $x \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$  существует последовательность  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{RH}(\mathcal{I})$  такая, что  $\|x_m - x\|_{\mathbf{R}(\mathcal{I})} \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ); при этом выполняется неравенство (2.12).*

Пусть теперь  $x = (x_{jk})_{j,k=1}^n$  —  $n \times n$ -матричная функция, элементы которой — функции ограниченной вариации. Назовем *полной вариацией*  $x$  число  $\bigvee_{\mathcal{I}}(x) \doteq \sum_{j,k=1}^n \bigvee_{\mathcal{I}}(x_{jk})$ . При таком соглашении сохраняют свою силу определения (2.11), (2.13), неравенство (2.12), а также утверждение предложения 1, где норма должна быть заменена матричной нормой.

**2.5.** Пусть  $\mathbf{X}$  — одно из пространств, введенных выше. Назовем две функции из  $\mathbf{X}$  эквивалентными, если они различаются только своими значениями в точках разрыва. Легко видеть, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности на  $\mathbf{X}$ . Обозначим через  $\widehat{\mathbf{X}}$  фактор-множество по этому отношению эквивалентности (фактор-пространство). На  $\widehat{\mathbf{X}}$  вводится обычная норма: если  $\widehat{x}$  — класс из  $\widehat{\mathbf{X}}$ , то полагаем  $\|\widehat{x}\| = \inf_{x \in \widehat{x}} \|x\|$ . Если пространство  $\mathbf{X}$  полное, то и фактор-пространство  $\widehat{\mathbf{X}}$  также является полным (см., например, [23, с. 55, 259]). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Пространства  $\widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I})$ ,  $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ ,  $\widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$  банаховы. Множества  $\widehat{\mathbf{RH}}(\mathcal{I})$ ,  $\widehat{\mathbf{RH}}_{\mathbf{v}}(\mathcal{I})$ ,  $\widehat{\mathbf{RBV}}(\mathcal{I})$  плотны в пространстве  $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ .*

(см. также [23, с. 71, 278, 281]). Справедливо и утверждение в [23, с. 72, 281]).

**Предложение 3.** *Пространства  $\mathbf{X}^n$ ,  $\mathbf{X}^{n \times n}$  полны тогда и только тогда, когда полно пространство  $\mathbf{X}$ .*

Выбор конкретной векторной или матричной нормы в зависимости от нормы скалярной функции не является существенным. Пусть норма вектора есть сумма норм координатных функций, а норма матрицы — сумма норм элементов этой матрицы. Условимся одинаково обозначать норму скалярной функции из  $X$ , норму вектора из  $X^n$  и норму матрицы из  $X^{n \times n}$ ; это не приведет ни к какой путанице, так как из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

**2.6.** Следуя [24], введем в  $\mathfrak{G}$  топологию. Пусть  $K$  — компактное подмножество в  $\mathcal{I}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\beta > 0$ . Полагаем

$$Q_{K,k,\beta} \doteq \left\{ G \in \mathfrak{G} : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} \text{ (представитель } G) \text{ такой, что} \right. \\ \left. \forall m \leq k \sup_{t \in K, \varphi \in A_1} \left\| \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}(\varphi_\mu, t) \right\| \leq \beta \right\}.$$

Скажем, что множество  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{G}$  *открытое*, если для каждого  $G \in \mathfrak{V}$  найдутся  $\beta > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и компактное подмножество  $K \subset \mathcal{I}$  такие, что  $G + Q_{K,k,\beta} \subset \mathfrak{V}$ . Эти открытые множества определяют топологию  $\mathfrak{G}$ . Точнее, семейство  $\{G + Q_{K,k,\beta}\}$  образует базу окрестностей  $\mathfrak{G}$ .

Для  $G \in \mathfrak{G}$  полагаем

$$p_{K,k}(G) \doteq \inf \left\{ \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} \text{ (представитель } G) \text{ такой, что} \right. \\ \left. \forall m \leq k \sup_{t \in K, \varphi \in A_1} \left\| \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}(\varphi_\mu, t) \right\| \leq \beta \right\}.$$

На прямом произведении  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$  рассмотрим фильтр  $\mathfrak{U}$ , порожденный множествами

$$U_{K,k,\nu} \doteq \{(G, H) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} : p_{K,k}(G-H) < \nu\} \quad (\nu > 0, k \in \mathbb{N}, K \subset \mathcal{I} \text{ — компактное множество}).$$

Фильтр  $\mathfrak{U}$  определяет на  $\mathfrak{G}$  *равномерную структуру* (см. [9, с. 201]), которая в свою очередь порождает введенную выше топологию. И хотя эта топология не является отделимой на  $\mathfrak{G}$ , на  $\mathfrak{D}'$  она индуцирует отделимую топологию  $\tau^{(')}$ , которая сильнее обычной топологии  $\tau^{(')}$  пространства  $\mathfrak{D}'$  (точнее, ее образа в  $\mathfrak{D}'$  при вложении  $\mathbf{V}$ ) [24, с. 174].

Пусть ниже  $\mathcal{Y}$  означает одно из пространств

$$\mathbf{R}_b(\mathcal{I}), \mathbf{R}(\mathcal{I}), \widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I}), \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I}),$$

образы этих пространств в  $\mathfrak{G}$  при вложении  $\mathbf{V}$  будем обозначать соответствующими готическими буквами; так,  $\mathfrak{Y} = \mathbf{V}\mathcal{Y}$  (см. также выше обозначение  $\mathfrak{L}$ ). Через  $\mathfrak{Y}^{(')}$  обозначим множество производных элементов из  $\mathfrak{Y}$ ;  $\mathfrak{Y}$  и  $\mathfrak{Y}^{(')}$  рассматриваем как топологические (векторные) пространства с топологиями, индуцированными из  $\mathfrak{G}$  (точнее, уже из  $\mathfrak{D}'$ ).

Обозначим  $\mathbf{D}$  — оператор дифференцирования, определенный на  $\mathfrak{G}$ ; точно так же будем обозначать его сужения на  $\mathfrak{D}'$  и  $\mathfrak{Y}$ ; таким образом,  $\mathfrak{Y}^{(')} = \mathbf{D}(\mathfrak{Y})$ .

Пусть  $\tau$  — топология банахова пространства  $\mathcal{Y}$ . Так как вложение  $\mathbf{V} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$  биективно (инъективность обсуждается в [7], сюръективность следует из определения  $\mathfrak{Y}$ ), то в силу соотношений (см., например, [22, с. 78, 270])  $\mathbf{V}(\bigcup_{\gamma} \mathbf{g}_{\gamma}) = \bigcup_{\gamma} (\mathbf{V}\mathbf{g}_{\gamma})$  и  $\mathbf{V}(\bigcap_{\gamma} \mathbf{g}_{\gamma}) = \bigcap_{\gamma} (\mathbf{V}\mathbf{g}_{\gamma})$ .  $\mathbf{V}(\tau)$  образует топологию в  $\mathfrak{Y}$ , которая сильнее топологии  $\tau^{(')}$ , индуцированной в  $\mathfrak{Y}$  из  $\mathfrak{G}$ ; об этой топологии шла речь выше. Таким образом,

$$\mathbf{V}(\tau) \succ \tau^{(')} \succ \tau^{(')}. \quad (2.14)$$

Как уже отмечалось, второе соотношение в (2.14) доказано в [24, с. 174], первое может быть доказано вполне аналогично.

Так как вложение  $\mathbf{V} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$ , очевидно, непрерывно в топологиях  $(\tau, \mathbf{V}(\tau))$ , то оно тем более непрерывно в топологиях  $(\tau, \tau^{(')})$  (см. [9, с. 35]); далее, так как оператор дифференцирования  $\mathbf{D}$  непрерывен в топологиях  $(\tau^{(')}, \tau^{(')})$ , то он тем более непрерывен в топологиях  $(\tau^{(')}, \tau^{(')})$ .

В дальнейшем будут использоваться пространства  $\mathcal{Y}^n$ ,  $\mathfrak{Y}^n$  и др., а также пространства матриц  $\mathfrak{G}^{n \times n}$  и др. Топологии, которые порождаются в этих пространствах  $n$ -векторов и  $n \times n$ -матриц, введенных выше топологиями соответствующих пространств скалярных функций, будем обозначать по-прежнему  $\tau^{(n)}$ ,  $\tau^{(l)}$ ,  $\tau$ ,  $\mathbf{V}(\tau)$ .

### 3. Дифференциальные уравнения с коэффициентами из $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$ и $\mathbf{RH}_v(\mathcal{I})$

**3.1.** Рассмотрим задачу (0.1). В отличие от [8], в настоящей работе предполагается, что  $B \in \mathcal{Y}^{n \times n}$ ,  $f \in \mathcal{Y}^n$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Так же, как и в [8], задача (0.1) “погружается” в пространство  $\mathfrak{G}^n$ . А именно, рассматривается задача

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{B}'(t) \circ \mathfrak{x} + \mathfrak{f}'(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathfrak{x}(t_0) = x^0, \quad (3.1)$$

где  $\mathfrak{B} = \mathbf{V}B$ ,  $\mathfrak{f} = \mathbf{V}f$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  (ср.[1]).

Задаче (3.1) соответствует задача в представителях

$$R'(\varphi, t) = R_{\mathfrak{B}'}(\varphi, t)R(\varphi, t) + R_{\mathfrak{f}'}(\varphi, t), \quad R(\varphi, t_0) = x^0 \quad (t_0 \in \mathcal{I}), \quad (3.2)$$

( $R_{\mathfrak{B}'}(\varphi, t)$  —  $n \times n$ -матрица,  $R(\varphi, t_0)$ ,  $R(\varphi, t)$  —  $n$ -векторы). Пусть задача в представителях (3.2) имеет умеренное решение  $R(\varphi, t)$ , которое является представителем решения  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}^n$  задачи (3.1), и существует обычная  $n$ -вектор-функция  $x$  (возможно, из  $\mathcal{Y}^n$ ) такая, что

$$x(t) \doteq \lim_{\mu \rightarrow 0} R(\varphi_\mu, t). \quad (3.3)$$

Эту  $n$ -вектор-функцию естественно назвать *решением задачи* (0.1).

Обозначим через  $\mathbf{C} : \mathfrak{G}^{n \times n} \times \mathfrak{G}^n \rightarrow \mathfrak{G}^n$  оператор, который ставит в соответствие задаче Коши (3.1) (т.е. паре  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{f})$ ) ее решение  $\mathfrak{x}$  (такое решение существует в силу предположения о существовании умеренного решения задачи в представителях (3.2)); этот оператор естественно назвать *оператором задачи Коши*;  $\mathbf{C}$  — заведомо нелинейный оператор. Через  $\mathbf{P} : \mathfrak{G}^n \rightarrow \mathcal{Y}^n$  обозначим оператор, который ставит в соответствие решению  $\mathfrak{x}$  функцию  $x$ , определяемую соотношением (3.3) (если таковая существует). Если в (3.1)  $\mathfrak{f} = 0$ , то считаем, что  $\mathbf{C} : \mathfrak{G}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{G}^n$ . Таким образом, нуждается в доказательстве не только непрерывность операторов  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{P}$  в топологиях соответственно  $(\tau^{(l)}, \tau^{(n)})$  и  $(\tau^{(n)}, \tau)$ , но и (прежде всего) их существование.

Пусть далее  $\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  переводит пару  $(B, f) \in \mathcal{Y}^{n \times n} \times \mathcal{Y}^n$ , порождающую задачу Коши (0.1), в пару  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{f}) \in \mathfrak{Y}^{n \times n} \times \mathfrak{Y}^n$ ,  $\mathbf{D}$  переводит пару  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{f})$  в пару  $(\mathfrak{B}', \mathfrak{f}') \in \mathfrak{Y}^{(l)n \times n} \times \mathfrak{Y}^{(l)n}$ ,  $\mathbf{C}$  переводит пару  $(\mathfrak{B}', \mathfrak{f}')$ , порождающую задачу Коши (3.1), в решение  $\mathfrak{x}$  этой задачи; наконец,  $\mathbf{P}$  переводит представитель этого решения в решение  $x$  задачи (0.1). Таким образом, оператор  $\mathbf{T} : \mathcal{Y}^{n \times n} \times \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{Y}^n$  в случае, если он существует, ставит в соответствие исходной задаче Коши (0.1) ее решение  $x : x = \mathbf{T}(B, f)$ . Об операторах  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{V}$  речь шла выше. Непосредственное исследование по отдельности операторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{C}$  представляется весьма затруднительным. По этой причине в дальнейшем изучаем непосредственно оператор  $\mathbf{T} : \mathcal{Y}^{n \times n} \times \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{Y}^n$ , не расчлняя его в произведение операторов.

Подход, предлагаемый в настоящей работе, заключается в том, что существование (и определенное рода непрерывность) оператора  $\mathbf{T}$  доказывается сначала для плотного в  $\mathcal{Y}$  множества, а затем с помощью теоремы 1 этот оператор продолжается до непрерывного на все пространство  $\mathcal{Y}$  (см. [9, с. 114]).

### 3.2. Рассмотрим однородную задачу

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x^0, \quad A(t) = B'(t), \quad (3.4)$$

где  $B(t)$  — ступенчатая функция (из  $\mathbf{RH}^{n \times n}(\mathcal{I})$ ). Пусть  $\mathcal{T}(B) \doteq \{c_1, \dots, c_p\}$  — множество точек разрыва  $B$ ,  $S_i(B) \doteq S_i \doteq (\sigma_{ikj})_{k,j=1}^n$  — матрица ее скачков в точке  $c_i$ ,  $i \in \{1 : p\}$ ,



где запись  $i \in \{k : l\}$  означает, что  $i$  может принимать (принимает, пробегает) значения  $k, k+1, \dots, l, k \leq l$ ; при  $k > l$   $\{k : l\} = \emptyset$ ; пусть далее  $\rho(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $\rho(t) = 1$  при  $t > 0$  (при  $t = 0$  значение  $\rho$  не определяем). Тогда можно представить

$$B(t) = \sum_{i=1}^p S_i \rho(t - c_i), \quad A(t) = \sum_{i=1}^p S_i \delta(t - c_i).$$

Пусть сначала матрица  $B$  имеет одну точку разрыва,  $\mathcal{T}(B) = \{c\}$ ,  $S = (\sigma_{kj})_{k,j=1}^n$  — матрица ее скачков в точке  $c$ . Уравнение (3.4) в этом случае принимает вид

$$\dot{x} = S\delta(t - c)x, \quad x(t_0) = x^0 \quad (t_0 < c). \quad (3.5)$$

Решение уравнения в представителях (ср. (3.2))

$$R = e^{\int_{t_0}^t \varphi(-(s-c)) ds} x^0. \quad (3.6)$$

При  $t_0 < t < c$  и  $\mu \rightarrow +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{\int_{t_0}^t \frac{1}{\mu} \varphi\left(-\frac{s-c}{\mu}\right) ds} x^0 = e^{-S \int_{\frac{c-t}{\mu}}^{\frac{c-t_0}{\mu}} \varphi(s) ds} x^0 \rightarrow e^{S \cdot 0} x^0 = Jx^0 = x^0, \quad (3.7)$$

где  $J$  — единичная  $n \times n$ -матрица; при  $t = c$  и  $\mu \rightarrow +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{\int_{t_0}^c \frac{1}{\mu} \varphi\left(-\frac{s-c}{\mu}\right) ds} x^0 = e^{-S \int_{-\frac{t_0-c}{\mu}}^0 \varphi(s) ds} x^0 \rightarrow e^{S \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds} x^0. \quad (3.8)$$

Заметим, что компоненты решения  $x$  в точке разрыва коэффициента суть обобщенные числа,  $x(c) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ ; при  $t > c$  и  $\mu \rightarrow +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{\int_{t_0}^t \frac{1}{\mu} \varphi\left(-\frac{s-c}{\mu}\right) ds} x^0 = e^{-S \int_{-\frac{t-c}{\mu}}^{\frac{t-c}{\mu}} \varphi(s) ds} x^0 \rightarrow e^{S \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds} x_0 = e^S x^0. \quad (3.9)$$

Рассмотрим отдельно случай, когда начальное условие задается в точке разрыва коэффициента,  $t_0 = c$ ; ввиду сказанного выше естественно считать, что  $x^0 \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ . Теперь при  $\mu \rightarrow +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{\int_c^t \frac{1}{\mu} \varphi\left(-\frac{s-c}{\mu}\right) ds} x^0 = e^{-S \int_0^{\frac{t-c}{\mu}} \varphi(s) ds} x^0 \rightarrow \begin{cases} e^{-S \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t < c, \\ e^{S \int_0^0 \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t = c, \\ e^{S \int_{-\infty}^0 \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t > c. \end{cases} \quad (3.10)$$

Для удобства ссылок сформулируем сказанное для случая одной точки разрыва матрицы  $B$  в виде следующего утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $t_0 \leq c$ . Тогда решение задачи (3.5) в смысле п. 3.1 (см.(3.3))

$$a) \text{ при } t^0 < c \text{ дается равенствами } x(t) = (\mathbf{T}(B)) = \begin{cases} x^0 & \text{при } t_0 \leq t < c, \\ e^{S \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t = c, \\ e^S x^0 & \text{при } t > c; \end{cases}$$

$$b) \text{ при } t_0 = c \text{ — равенствами } x(t) = (\mathbf{T}(B)) = \begin{cases} e^{-S \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t < c, \\ e^{S \int_0^0 \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t = c, \\ e^{S \int_{-\infty}^0 \varphi(s) ds} x^0 & \text{при } t > c, \quad \varphi \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$$

Доказательство следует из соотношений (3.6)–(3.10).  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Решение  $x \in \mathcal{Y}^n$  является обычной функцией, только если пренебречь его значениями в точке разрыва коэффициента  $B$  и не задавать начальные условия в этой точке.

В связи с этим замечанием поступим следующим образом (см. [1]). Пусть теперь  $\mathcal{U}$  означает одно из пространств  $\widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I})$  или  $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$  и  $t_0 < c$ . Тогда лемма 1 может быть переформулирована следующим образом.

**Лемма 1bis.** Пусть  $B \in \widehat{\mathbf{R}\mathbf{H}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ ; тогда решение задачи (3.5) в смысле п. 3.1 (см.(3.3)) принадлежит  $\widehat{\mathbf{R}\mathbf{H}}^{n \times n}(\mathcal{I})$  и дается равенствами  $x(t) = (\mathbf{T}(B)) = \begin{cases} x^0 & \text{при } t_0 \leq t < c, \\ e^S x^0 & \text{при } t > c; \end{cases}$

**3.3.** Рассмотрим теперь общий случай задачи (3.4) при  $B \in \widehat{\mathbf{R}\mathbf{H}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ .

**Теорема 2.** Решение задачи (3.4) в смысле п. 3.1 (см.(3.3)) принадлежит  $\widehat{H}^n$  и дается равенствами  $x(t) = (\mathbf{T}(B)) = \begin{cases} x^0 & \text{при } t_0 \leq t < c, \\ e^{S_i} e^{S_{i-1}} \dots e^{S_1} x^0 & \text{при } c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{1 : p-1\}, \\ e^{S_p} e^{S_{p-1}} \dots e^{S_1} x^0 & \text{при } t > c_p. \end{cases}$

Доказательство проведем индукцией по числу  $p$  точек разрыва. При  $p = 1$  утверждение теоремы следует из леммы 1bis. Предположим, что теорема верна для  $\mathcal{T}(B) = \{c_1, \dots, c_p\}$  при некотором  $p$ , и пусть теперь  $\mathcal{T}(B) = \{c_1, \dots, c_p, c_{p+1}\}$ . Достаточно доказать третье равенство. Полагаем

$$x^{0'} \doteq e^{S_p} e^{S_{p-1}} \dots e^{S_1} x^0, \quad c_p < t_{0'} < c_{p+1},$$

и будем решать исходную задачу на множестве  $t > t_{0'}$  при начальном условии  $x(t_{0'}) = x^{0'}$ . Тогда по лемме 1bis при  $t < c_{p+1}$   $x(t) = x^{0'}$ , а при

$$t > c_{p+1} \quad x(t) = e^{S_{p+1}} x^{0'} = e^{S_{p+1}} e^{S_p} e^{S_{p-1}} \dots e^{S_1} x^0.$$

Таким образом, утверждение теоремы верно для  $\mathcal{T}(B) = \{c_1, \dots, c_p, c_{p+1}\}$ . По индукции утверждение теоремы верно для любого натурального  $p$ .  $\square$

Для удобства дальнейшей записи положим  $c_0 = \alpha$ ,  $c_{p+1} = \beta$ ,  $S_0 = S_{p+1} = O$ ,  $O$  — нулевая  $n \times n$ -матрица.

**Следствие.** Решение задачи (3.4) в смысле п. 3.1 (см.(3.3)) может быть записано одной строкой в виде

$$x(t) = (\mathbf{T}(B)) = e^{S_i} e^{S_{i-1}} \dots e^{S_1} e^{S_0} x^0 \quad \text{при } c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0 : p\}.$$

Фундаментальную матрицу  $X$  системы из (3.4) и ее матрицу Коши  $C$  можно представить в виде

$$X(t) = e^{S_i} e^{S_{i-1}} \dots e^{S_1} e^{S_0} \quad \text{при } c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0 : p\}, \quad C(t, s) = X(t)X^{-1}(s) \quad (s \leq t). \quad (3.11)$$

**3.4.** Рассмотрим неоднородную задачу (0.1) при  $B \in \widehat{\mathbf{R}\mathbf{H}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ ,  $f \in \widehat{\mathbf{R}\mathbf{H}}^n(\mathcal{I})$ . Не ограничивая общности, можно считать, что точки разрыва  $B$  и  $f$  совпадают:  $\mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(f) = \{c_1, \dots, c_p\}$ ; пусть далее  $s_i(f)$  означает вектор скачков  $f$  в точке разрыва  $c_i$ ,  $i \in \{1 : p\}$ .

Обычным путем сведем неоднородную задачу Коши (0.1) к задаче Коши для однородной системы: введем дополнительную неизвестную функцию  $x_{n+1} = 1$ ; далее полагаем

$$y = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^\top, \quad y^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, 1)^\top$$

и введем  $(n+1) \times (n+1)$ -матрицу  $M \doteq \left( \begin{array}{c|c} B & f \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ ; в итоге задача Коши (0.1) примет вид

$$y' = M'y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad y(t_0) = y^0; \quad (3.12)$$

при этом матрица скачков  $S_i(M)$  матрицы  $M$  в точке разрыва  $c_i$  будет иметь вид  $S(M) \doteq \left( \begin{array}{c|c} S_i(B) & s_i(f) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ ,  $i \in \{1 : p\}$ .

Применяя теорему 2 к однородной задаче (3.12), с учетом введенных обозначений сразу получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Решение задачи (0.1) в смысле п. 3.1 (см. (3.3)) принадлежит  $\widehat{\mathbf{RH}}^n(\mathcal{I})$  и дается равенствами  $x(t) = (\mathbf{T}(B, f))(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ , где*

$$y(t) = e^{S_i(M)} e^{S_{i-1}(M)} \dots e^{S_1(M)} e^{S_0(M)} y^0 \quad \text{при } c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0 : p\}, \quad y \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n+1}(\mathcal{I}).$$

**Теорема 4.** *Решение  $x$  задачи (0.1) в смысле п. 3.1 (см.(3.3)) при условиях настоящего пункта можно представить обычным способом в виде*

$$x(t) = e^{S_i} e^{S_{i-1}} \dots e^{S_1} e^{S_0} x^0 + \int_{t_0}^t C(t, s) df(s) \quad \text{при } c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0 : p\},$$

где матрица Коши  $C(t, s)$  определяется соотношениями (3.11), а интеграл понимается в смысле работы [21].

**Д о к а з а т е л ь с т в о** заключается в записи решения уравнения в представителях (3.2) по формуле Коши, применении равенства (2.3) и предельной теоремы 12 из [21].  $\square$

Сказанное в этом разделе практически без изменений переносится на случай, когда коэффициенты из  $\widehat{\mathbf{RH}}$  заменяются коэффициентами из  $\widehat{\mathbf{RH}}_{\mathbf{v}}$ .

#### 4. Дифференциальные уравнения с коэффициентами из $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$

**4.1.** Рассмотрим однородную систему (3.4) при  $B \in \widehat{\mathbf{RBV}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ .

**Теорема 5.** *Существует непрерывный оператор  $\widehat{\mathbf{T}} : \widehat{\mathbf{RBV}}^{n \times n}(\mathcal{I}) \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$  такой, что решение  $x$  задачи (3.4) в смысле п. 3.1 (см.(3.3)) существует, единственно и имеет представление  $x(t) = (\widehat{\mathbf{T}}(B))(t)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $B \in \widehat{\mathbf{RBV}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ . В силу плотности  $\widehat{\mathbf{RH}}^{n \times n}(\mathcal{I})$  в  $\widehat{\mathbf{RBV}}^{n \times n}(\mathcal{I})$  и предложения 1 найдется последовательность  $\{B_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \widehat{\mathbf{RH}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ , сходящаяся к  $B$  в  $\widehat{\mathbf{R}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists L > 0) \quad (\forall l > L) \quad \left( \|B_l - B\| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

при  $l, m > L$   $\|B_l - B_m\| < \varepsilon$ ; пусть  $\mathcal{T}(B_l) \cap \mathcal{T}(B_m) = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  ( $p = p(l, m)$ ); найдется натуральное  $L_1 \geq L$  такое, что при  $l, m > L_1$  будут выполняться также неравенства  $\|S_i(B_l) - S_i(B_m)\| < \varepsilon$  ( $i \in \{1 : p\}$ ), а при  $l, m > L_2 \geq L_1$  и неравенства  $\|e^{S_i(B_l)} - e^{S_i(B_m)}\| < \varepsilon$  ( $i \in \{1 : p\}$ ). При этом (см.(2.12))

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(B_l) \leq \bigvee_{\mathcal{I}}(B) \doteq \mathbf{v} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Согласно вышесказанному при  $l, m > L_2$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}(B_l) - \mathbf{T}(B_m)\| &\leq \|e^{S_i(B_l)} e^{S_{i-1}(B_l)} \dots e^{S_1(B_l)} e^{S_0(B_l)} - e^{S_i(B_m)} e^{S_{i-1}(B_m)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)}\| \cdot \|x^0\| \\ &\leq \|e^{S_i(B_l)} e^{S_{i-1}(B_l)} \dots e^{S_1(B_l)} e^{S_0(B_l)} - e^{S_i(B_l)} e^{S_{i-1}(B_m)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{S_i(B_i)} e^{S_{i-1}(B_m)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)} - e^{S_i(B_i)} e^{S_{i-1}(B_i)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)} \\
 & \quad + e^{S_i(B_i)} e^{S_{i-1}(B_i)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)} \\
 & - \dots e^{S_i(B_i)} e^{S_{i-1}(B_i)} \dots e^{S_1(B_i)} e^{S_0(B_m)} - e^{S_i(B_m)} e^{S_{i-1}(B_m)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)} \| \cdot \| x^0 \| \\
 & \leq \| x^0 \| \cdot \max_{1 \leq \nu \leq p} \| e^{S_\nu(B_i)} - e^{S_\nu(B_m)} \| \cdot e^{\mathbf{v}} < \varepsilon \cdot \| x^0 \| \cdot e^{\mathbf{v}},
 \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что последовательность  $\{\mathbf{T}(B_l)\}_{l=1}^\infty$  фундаментальна в банаховом пространстве  $\widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$  и, следовательно, сходится. Это означает, что выполнены условия теорем 1, в силу которой выполнены и утверждения настоящей теоремы. (Здесь  $X - \widehat{\mathbf{RBV}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ ,  $A - \widehat{\mathbf{RH}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ ,  $Y - \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$ ,  $f - \mathbf{T}$ ,  $\widehat{f} - \widehat{\mathbf{T}}$ .)  $\square$

Неоднородную задачу (0.1) при  $B \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n \times n}(\mathcal{I})$ ,  $f \in \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$  так же, как в п. 3.4 сведем к однородной задаче (3.12), к которой применим только что доказанную теорему 5. В итоге придем к следующему утверждению.

**Теорема 6.** *Существует непрерывный оператор  $\widehat{\mathbf{T}}: \widehat{\mathbf{RBV}}^{n \times n}(\mathcal{I}) \times \widehat{\mathbf{RBV}}^n(\mathcal{I}) \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$  такой, что решение  $x$  задачи (0.1) в смысле п. 3.1 см. (3.3) существует, единственно и имеет представление  $x(t) = (\widehat{\mathbf{T}}(B, f))(t)$ .*

**З а м е ч а н и е.** Хотя первообразные  $B$  коэффициентов исходной задачи (0.1) — функции ограниченной вариации, о решении ее мы можем лишь утверждать, что это правильные функции (это обусловлено неполнотой пространства  $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ ).

**4.2.** Рассмотрим задачу Коши для линейного скалярного уравнения  $n$ -го порядка (ср. (0.1)):

$$y^{(n)} + p'_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p'_n(t)y = p'_{n+1}(t), \quad y^{(k-1)}(t_0) = y_{0k}, \quad k \in \{1 : n\} \quad (4.13)$$

( $p_k \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ ,  $k \in \{1 : n + 1\}$ ). Полагая, как обычно,

$$x_k \doteq y^{(k-1)}, \quad x_{0k} \doteq y^{(k-1)}(t_0), \quad k \in \{1 : n\}, \quad (4.14)$$

запишем задачу (4.13) в виде задачи (0.1), где положено

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, \quad x^0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^\top, \quad x_{0k} = y^{(k-1)}(t_0), \quad k \in \{1 : n\},$$

$B$  — произвольная первообразная матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p'_n & -p'_{n-1} & -p'_{n-1} & \dots & -p'_2 & -p'_1 \end{pmatrix}, \quad f = (0, 0, \dots, p_{n+1})^\top.$$

Применив к полученной задаче теорему 6 и учитывая (4.14), убедимся в том, что задача (4.13) имеет единственное решение  $y$  такое, что  $y^{(n-1)}$  — правильная функция, а  $y^{(k)}$  имеет производные порядка  $n - k - 1$  ( $k \in \{0 : n - 2\}$ ), являющиеся правильными функциями.

**4.3.** Таким образом, исходная задача Коши ставится в привычных для теории дифференциальных уравнений терминах, хотя такая постановка и не является вполне корректной (операция умножения обобщенной функции на разрывную не может быть корректно определена в рамках классической теории обобщенных функций). Затем “погружается” в алгебру обобщенных функций Коломбо, где все необходимые операции корректно определены. Сначала решается вопрос о существовании решений — обобщенных функций Коломбо для уравнений, коэффициенты которых — “производные” от ступенчатых функций, совершается предельный переход вида (3.3), который возвращает нас в пространство решений — обычных функций.

В итоге возникает оператор, ставящий в соответствие коэффициентам — обычным функциям решение — обычную функцию. В дальнейшем этот оператор, вначале определенный на множестве ступенчатых функций, с помощью теоремы 1 продолжается по непрерывности на пространство функций ограниченной вариации.

Укажем также на еще одну из достигнутых целей автора: избежать ограничений типа “геометрических” (см., например, [8]). Ограничения такого типа мешают достаточно успешно изучать краевые задачи для рассматриваемых уравнений, вопросы теории неосцилляции и другие вопросы качественной теории.

Вместе с тем замечание к теореме 6 указывает на один из недостатков предлагаемой схемы: не доказано вполне естественное утверждение, что первообразная решения есть функция ограниченной вариации.

Возникает также вопрос: можно ли распространить теорему 6 на все пространство правильных функций, как это сделано в [1] для  $n = 1$ . Скорее всего, для этого потребуются дополнительные, возможно, “геометрические условия” (см., например, [12; 13]).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дерр В.Я., Ким И. Г.** Пространство правильных функций и дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в коэффициентах // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. 2014. №1. С. 3–18.
2. **Kurzweil J.** Generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Math. J. 1958. No. 8 (83). С. 360–388.
3. **Левин А.Ю.** Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II. // Вестн. Ярослав. ун-та. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
4. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. **Дерр В.Я.** К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 2. С. 269–272.
6. **Завалицин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
7. **Colombeau J.F.** Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1985. 300 p. (North-Holland Mathematics Studies, vol. 113.)
8. **Дерр В.Я., Дизендорф К.И.** О дифференциальных уравнениях в  $C$ -обобщенных функциях // Изв. вузов. Математика. 1996. № 11 (414). С. 39–49.
9. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 274 с.
10. **Егоров Ю. В.** К теории обобщенных функций // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 5. С. 3–40.
11. **Радыно Я. В., Нго Фу Тхань.** Дифференциальные уравнения в алгебре новых обобщенных функций // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 4. С. 5–20.
12. **Ligeza J.** On some boundary value problems for ordinary linear differential equations of second order in the Colombeau algebra // Acta Univ. Palacki. Olomouc. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica. 1996. Vol 35. P. 103–119.
13. **Ligeza J.** Boundary value problems for ordinary linear differential equations in the Colombeau algebra // Acta Univ. Palacki. Olomouc. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica. 1999. Vol 38. P. 95–112.
14. **Dieudonne J.** Foundations of modern analysis. New York; London: Academic Press, 1960. 408 p.
15. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
16. **Родионов В.И.** Присоединенный интеграл Римана — Стильбеса // Изв. вузов. Математика. 2007. № 2 (537). С. 79–82.
17. **Федоров В.М.** Теория функций и функциональный анализ. Ч. II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. 191 с.
18. **Шварц Л.** Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.
19. **Толстоногов А.А.** О некоторых свойствах пространства правильных функций // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 6. С. 303–312.
20. **Дерр В.Я.** О дифференциальных уравнениях с обобщенными функциями и  $C$ -интегральных уравнениях // Вестн. Удмурт. ун-та. 2000. № 1. С. 49–60.

21. **Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М.** Альфа-интеграл типа Стильтьеса // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. 2006. № 1. С. 41–65.
22. **Дерр В.Я.** Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высш. шк., 2008. 384 с.
23. **Дерр В.Я.** Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2013. 462 с.
24. **Biagioli H.A., Colombeau J.F.** New generalized functions and  $C^\infty$  functions with values in generalized complex numbers // J. London Math. Soc. 1986. Vol. 2, no. 33. P. 169–179.

Дерр Василий Яковлевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Удмуртский государственный университет  
e-mail: derr@uni.udm.ru, vandv4@gmail.com

Поступила 24.02.2016