ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.17

О ГРАФАХ ДЕЗА С НЕСВЯЗНОЙ ВТОРОЙ ОКРЕСТНОСТЬЮ ВЕРШИНЫ[1]

С. В. Горяинов, Г. С. Исакова, В. В. Кабанов, Н. В. Маслова, Л. В. Шалагинов

Граф Г называется графом Деза, если Г регулярен и число общих соседей пары произвольных различных вершин принимает одно из двух значений. Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, не являющийся сильно регулярным графом. В 1992 г. Гарднер (Gardiner), Годсил (Godsil), Хенсел (Hensel) и Ройл (Royle) показали, что сильно регулярный граф, содержащий вершину с несвязной второй окрестностью, является полным многодольным графом с долями одинакового размера, больше 2. В данной работе мы изучаем точные графы Деза с несвязной второй окрестностью вершин. В разд. 2 мы докажем, что если каждая вершина точного графа Деза имеет несвязную вторую окрестность, то этот граф является либо реберно регулярным, либо кореберно регулярным. В разд. 3 и 4 мы изучаем точный граф Деза, содержащий по крайней мере одну вершину с несвязной второй окрестностью. В разд. 3 показано, что если такой граф реберно регулярен, то он является s-кокликовым расширением сильно регулярного графа с параметрами (n, k, λ, μ), где $s \geq 2$ и $\lambda = \mu$. В разд. 4 показано, что если такой граф кореберно регулярен, то он является 2-кликовым расширением полного многодольного графа с долями одинакового размера, больше либо равного 3.

Ключевые слова: граф Деза; точный граф Деза; несвязная вторая окрестность; реберно регулярный граф; кореберно регулярный граф.

S. V. Goryainov, G. S. Isakova, V. V. Kabanov, N. V. Maslova, L. V. Shalaginov. On Deza graphs with disconnected second neighborhood of a vertex.

A graph Γ is called a Deza graph if it is regular and the number of common neighbors of two distinct vertices is one of two values. A Deza graph Γ is called a strictly Deza graph if it has diameter 2 and is not strongly regular. In 1992, Gardiner, Godsil, Hensel, and Royle proved that a strongly regular graph that contains a vertex with disconnected second neighborhood is a complete multipartite graph with parts of the same size and this size is greater than 2. In this paper we study strictly Deza graphs with disconnected second neighborhoods of vertices. In Section 2, we prove that, if each vertex of a strictly Deza graph has disconnected second neighborhood, then the graph is either edge-regular or coedge-regular. In Sections 3 and 4, we consider strictly Deza graphs that contain at least one vertex with disconnected second neighborhood. In Section 3, we show that, if such a graph is edge-regular, then it is an s-coclique extension of a strongly regular graph with parameters (n, k, λ, μ), where s is integer, $s \geq 2$, and $\lambda = \mu$. In Section 4, we show that, if such a graph is coedge-regular, then it is a 2-clique extension of a complete multipartite graph with parts of the same size greater than or equal to 3.

Keywords: Deza graph, strictly Deza graph, disconnected second neighborhood, edge-regular graph, coedge-regular graph.

MSC: 05C40, 05C07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-50-61

Введение

Все графы в данной работе являются неориентированными, не содержат петель и кратных ребер.

Пусть Γ — граф. Смежность вершин u и v мы будем обозначать как $u \sim v$. *Расстоянием между вершинами* u и v в связном графе будем называть длину кратчайшего пути, соединяющего эти вершины, и обозначать через $d(u, v)$. *Диаметром графа* называется максимальное расстояние между двумя вершинами этого графа.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00316). Четвертый автор частично поддержан грантом Президента Российской Федерации для молодых ученых (проект МК-6118.2016.1), а также является победителем конкурса молодых математиков 2013 г. Фонда Дмитрия Зимина "Династия".

Окрестность $N_1(v) \equiv N(v)$ вершины v, *вторую окрестность* $N_2(v)$ вершины v и *общую окрестность* $N(u, v)$ двух вершин u и v определим равенствами $N(v) := \{u \ : \ u \sim v\}$, $N_2(v) := \{u \ : \ d(v, u) = 2\}$ и $N(u, v) := N(u) \cap N(v)$.

Граф Γ называется *реберно регулярным* с параметрами (n, k, λ), если Γ содержит n вершин, регулярен валентности k и любые две его смежные вершины имеют точно λ общих соседей. Граф Γ называется *кореберно регулярным* с параметрами (n, k, μ), если Γ содержит n вершин, регулярен валентности k и любые две его несмежные вершины имеют точно μ общих соседей. Граф Γ называется *сильно регулярным* с параметрами (n, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с параметрами (n, k, λ) и кореберно регулярнен с параметрами (n, k, μ) (см. [2] или [4]).

В 1998 г. в работе [6] в качестве обобщения понятия сильно регулярного графа было введено понятие графа Деза.

Пусть n, k, b, и a — это целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq a \leq b \leq k < n$. Граф Γ называется *графом Деза* с параметрами (n, k, b, a), если Γ содержит n вершин, регулярен валентности k и для любых различных вершин u и v справедливо $|N(u, v)| = a$ или $|N(u, v)| = b$.

Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, который не является сильно регулярным. Заметим, что для точного графа Деза с параметрами (n, k, b, a) выполняется неравенство $a < b$.

Подграф Δ графа Γ называется *индуцированным*, если для любых различных вершин $u, v \in V(\Delta)$ $u \sim v$ в Δ тогда и только тогда, когда $u \sim v$ в Γ. В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, мы будем одинаково обозначать индуцированный подграф и множество вершин, которые его индуцируют.

Пусть $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ — графы. *Расширением* $\Gamma_1[\Gamma_2]$ графа Γ_1 с помощью графа Γ_2 будем называть граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$ и смежностью, определенной по правилу $(u_1, u_2) \sim (v_1, v_2)$ тогда и только тогда, когда либо $u_1 \sim v_1$, либо $u_1 = v_1$ и $u_2 \sim v_2$. В случае если граф Γ_2 — это 2-клика, расширение $\Gamma_1[\Gamma_2]$ называется 2-*кликовым расширением* графа Γ_1. *Раздуванием* (inflation) графа Γ будем называть реберный граф такого графа, который получается из Γ с помощью замены всех его ребер на пути длины два.

В [8, лемма 3.1] показано, что сильно регулярный граф, содержащий вершину с несвязной второй окрестностью, является полным многодольным графом с долями одинакового размера большего 2. В [5] Циоба и Куленом было получено интересное обобщение этого результата для дистанционно регулярных графов. А. Л. Гаврилюк предложил изучить точные графы Деза, содержащие вершину с несвязной второй окрестностью. Результатом данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— точный граф Деза. Если вторая окрестность каждой вершины несвязна, то* Γ *является либо реберно регулярным, либо кореберно регулярным графом.*

Следующий пример показывает, что теорему 1 не получится обобщить на случай графов Деза большего диаметра. А именно для любого целого $m \geq 2$ существует граф Деза диаметра $m + 1$, не являющийся реберно регулярным, у которого вторая окрестность каждой вершины несвязна. Из [1] следует, что раздувание кубического графа является графом Деза. Рассмотрим кубический граф $A(m)$, являющийся циклом на $2m$ вершинах с соединенными антиподальными вершинами. Несложно показать, что раздувание графа $A(m)$ является графом Деза с параметрами $(6m, 3, 1, 0)$, имеет диаметр $m + 1$, при этом каждая вторая окрестность есть объединение ребра с парой изолированных вершин, т. е. несвязна.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— реберно регулярный точный граф Деза, содержащий вершину* x *такую, что граф* $N_2(x)$ *несвязен. Тогда граф* Γ *является расширением* $\Gamma_1[\Gamma_2]$*, где* Γ_1 *является сильно регулярным графом с параметрами* (n, k, λ, μ)*,* $\lambda = \mu$*, а* Γ_2 *— коклика размера* s *при* $s \geq 2$.

Теорема 3. *Пусть* Γ — *кореберно регулярный граф Деза диаметра* 2, *содержащий вершину* x *такую, что граф* $N_2(x)$ *несвязен. Тогда* Γ *является* 2*-кликовым расширением полного многодольного графа с долями одинакового размера* s, *где* $s > 2$.

Остается открытым вопрос изучения точных графов Деза, которые не являются ни реберно регулярными, ни кореберно регулярными и содержат по крайней мере одну связную и одну несвязную вторые окрестности, а также вопрос изучения графов Деза диаметра больше 2, содержащих несвязные вторые окрестности.

1. Предварительные результаты

В данном разделе мы приводим вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *граф без треугольников, имеющий* n *вершин. Тогда число ребер в графе* Γ *не более* $n^2/4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из [7, Theorem 7.1.1]. $\square$

Лемма 2 [6, Proposition 1.1]. *Пусть* $\Gamma = (V, E)$ — *граф Деза с параметрами* (n, k, b, a). *Для вершины* v *определим числа* α_v *и* β_v *по следующему правилу*: $\alpha_v := |\{u \in V : |N(v, u)| = a\}|$ *и* $\beta_v := |\{u \in V : |N(v, u)| = b\}|$. *Тогда* α_v *и* β_v *не зависят от выбора вершины* v *и могут быть выражены через параметры графа* Γ :

$$\alpha := \alpha_v = \begin{cases} \dfrac{b(n-1) - k(k-1)}{b-a}, & \text{если } a \neq b, \\ \dfrac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b; \end{cases} \qquad \beta := \beta_v = \begin{cases} \dfrac{a(n-1) - k(k-1)}{a-b}, & \text{если } a \neq b, \\ \dfrac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Лемма 3 [6, Theorem 2.6]. *Пусть* Γ — *граф Деза с параметрами* (n, k, b, a). *Равенство* $b = k$ *выполняется тогда и только тогда, когда* Γ *является расширением* $\Gamma_1[\Gamma_2]$, *где* Γ_1 — *сильно регулярный граф с параметрами* (n_1, k_1, λ, μ), $\lambda = \mu$, *а* Γ_2 — *коклика размера* n_2 *при* $n_2 \geq 2$, *для некоторых целых* n_1, k_1, λ *и* n_2. *Более того, параметры удовлетворяют соотношениям* $n = n_1 n_2, \quad k = b = k_1 n_2, \quad a = \lambda n_2$ *и* $n_2 = \dfrac{k^2 - an}{k - a}$.

Лемма 4. *Граф Деза с параметрами* (n, k, b, a), *где* $k = b$, *является реберно регулярным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку число общих соседей пары смежных вершин в регулярном графе степени k не превосходит $k - 1 < b$, то в условиях леммы произвольная пара смежных вершин будет иметь a общих соседей, т. е. Γ является реберно регулярным графом. $\square$

В условии 1 описывается ситуация, которая является ключевой в теоремах 1 и 2.

Условие 1. *Граф* Γ *является точным графом Деза с параметрами* (n, k, b, a), *содержит вершину* x *такую, что граф* $N_2(x)$ *несвязен. Кроме того,* $N_2(x)$ *содержит вершину* t, *для которой справедливо равенство* $|N(x, t)| = a$.

Для графа, удовлетворяющего условию 1, обозначим через $C_{x,t}$ связную компоненту в $N_2(x)$, содержащую вершину t, и положим $D_{x,t} := N_2(x) \setminus C_{x,t}$.

Лемма 5. *Пусть* Γ — *граф, удовлетворяющий условию* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *для любой вершины* $u \in D_{x,t}$ *справедливо включение* $N(x, t) \subseteq N(x, u)$;

(2) *для любой вершины* $y \in N(x, t)$ *справедливо включение* $D_{x,t} \subseteq N(y)$;

(3) *каждая вершина из* $N(x, t)$ *смежна с каждой вершиной из* $D_{x,t}$.

Доказательство. Поскольку вершины t и u принадлежат различным компонентам связности графа $N_2(x)$, общие соседи вершин t и u принадлежат $N(x)$. Вершина t имеет в точности $|N(x,t)| = a$ соседей в $N(x)$, а вершины t и u имеют как минимум a общих соседей в Γ. Таким образом, справедливо равенство $N(u,t) = N(x,t)$, и каждая вершина из $N(x,t)$ смежна с вершиной u. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует из (1). Утверждение (3) следует из (1) и (2). □

Лемма 6. *Пусть* Γ *— граф, удовлетворяющий условию* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *для любой вершины* $y \in N(x,t)$ *справедливо* $|N(x,y)| = a$;

(2) *для любой вершины* $u \in D_{x,t}$ *справедливо* $|N(x,u)| = b$;

(3) $a \leq k - 3$.

Доказательство. Предположим, что существует вершина $y \in N(x,t)$ такая, что $|N(x,y)| = b$. Тогда вершина y имеет как минимум $b+2$ соседей в $\Gamma \setminus D_{x,t}$. В силу п. (2) леммы 5 вершина y смежна с каждой вершиной из $D_{x,t}$. Таким образом, $|D_{x,t}| \leq k - b - 2$. С другой стороны, вершина x и произвольная вершина $u \in D_{x,t}$ имеют не более b общих соседей, т. е. вершина u имеет как минимум $k - b$ соседей в $D_{x,t}$. Отсюда $|D_{x,t}| \geq k - b + 1$. Противоречие. Утверждение (1) доказано.

Предположим, что существует вершина $u \in D_{x,t}$ такая, что $|N(x,u)| = a$. Поскольку вершины x и u имеют a общих соседей, вершина u имеет $k - a$ соседей в $D_{x,t}$, откуда вытекает неравенство $|D_{x,t}| \geq k - a + 1$. С другой стороны, зафиксируем вершину $y \in N(x,t)$. В силу п. (1) вершина y имеет a соседей в $N(x)$. Кроме того, вершина y смежна с вершинами x и t. Таким образом, вершина y имеет по меньшей мере $a + 2$ соседей в $\Gamma \setminus D_{x,t}$. В силу п. (2) леммы 5 вершина y смежна с каждой вершиной в $D_{x,t}$. Отсюда $|D_{x,t}| \leq k - a - 2$, и мы получили противоречие. Утверждение (1) доказано.

Поскольку $k - b + 1 \leq |D_{x,t}| \leq k - a - 2$, то $a \leq b - 3 \leq k - 3$. □

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим точный граф Деза Γ с параметрами (n,k,b,a), у которого вторая окрестность каждой вершины несвязна. Покажем, что Γ либо реберно регулярный, либо кореберно регулярный. От противного. До конца раздела будем предполагать, что Γ не является ни реберно регулярным, ни кореберно регулярным.

Лемма 7. *Существует вершина* x *такая, что граф* Γ *удовлетворяет условию* 1.

Доказательство следует из того, что граф Γ не является кореберно регулярным. □

В леммах 8–18 мы предполагаем, что граф Γ удовлетворяет условию 1.

Лемма 8. *Каждая вершина из* $C_{x,t}$ *имеет* a *общих соседей с вершиной* x.

Доказательство. Предположим, что существует вершина $t_b \in C_{x,t}$ такая, что $|N(x,t_b)| = b$. Обозначим через $B_{x,t} := \{r \in C_{x,t} \mid |N(x,r)| = b\}$ множество вершин из $C_{x,t}$, имеющих b общих соседей с вершиной x. Достаточно рассмотреть два случая.

1) Для каждой вершины $r \in B_{x,t}$ и для каждой вершины $u \in D_{x,t}$ выполняется $|N(r,u)| = b$. Поскольку вершины r и u принадлежат различным компонентами связности графа $N_2(x)$, общие соседи вершин r и u лежат в $N(x)$. В силу того что выбор вершин r и u происходил произвольно, имеем $N(r_1,u_1) = N(r_2,u_2)$ для всех $r_1, r_2 \in B_{x,t}$ и всех $u_1, u_2 \in D_{x,t}$. Другими словами, в $N(x)$ существуют b вершин, которые являются общими соседями для произвольных вершин $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$. Обозначим это множество через W. Отметим также, что для произвольной вершины $u \in D_{x,t}$ справедливо равенство $N(x,u) = W$. Поскольку компонента

связности $C_{x,t}$ не зависит от выбора вершины $t \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$, то в силу п. (1) леммы 5 мы имеем включение $N(x,t) \subseteq N(x,u)$ для любой вершины $t \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$. Таким образом, соседи вершин из $C_{x,t}$ и $D_{x,t}$ в множестве $N(x)$ содержатся в W. Это означает, что ребра между $N(x)$ и $N_2(x)$ — это в точности ребра между W и $N_2(x)$, т. е. ребра между $N(x) \setminus W$ и $N_2(x)$ отсутствуют.

Предположим, что $|N(x) \setminus W| \geq 2$. Возьмем различные $y_1, y_2 \in N(x) \setminus W$. Тогда $b = |W| \leq k-2 < k-1 = |N(y_1,y_2)|$, противоречие. Таким образом, либо множество $N(x) \setminus W$ пусто, либо $|N(x) \setminus W| = 1$. В первом случае мы имеем $b = k$, поэтому в силу леммы 4 граф Γ реберно регулярен. Во втором случае мы имеем $b = k-1$. В этом случае вершина t_b имеет $k-1$ соседей в $N(x)$ и в точности одного соседа в $N_2(x)$. Обозначим эту единственную вершину через y. Если $y \in B_{x,t}$, то отсутствуют ребра между $\{t_b, y\}$ и $C_{x,t} \setminus \{t_b, y\}$, поэтому $C_{x,t}$ не связен, противоречие. Таким образом, $y \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$ и $|N(x,y)| = a$. В силу п. (3) леммы 6 мы имеем $a < k-2$. Значит, существуют по крайней мере два соседа вершины y в $N_2(x)$. Заметим, что эти соседи принадлежат $C_{x,t}$ и один из них — вершина t_b. Таким образом, существует вершина $z \in C_{x,t}$ такая, что $z \neq t_b$ и $z \sim y$. Если $z \in B_{x,t}$, то $N(z,t_b) = W \cup \{y\}$ и $|N(z,t_b)| = k > k-1 = b$, противоречие. Если $z \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$, то $N(z,t_b) = N(x,z) \cup \{y\}$ и $|N(z,t_b)| = |N(x,z)|+1 = a+1$. В силу п. (3) леммы 6 мы имеем $a < k-2$ и $a+1 < k-1 = b$. Таким образом, $a < |N(z,t_b)| < b$. Противоречие с определением графа Деза.

2) Существуют $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$ такие, что справедливо $|N(r,u)| = a$. Поскольку $|N(x,r)| = b, |N(x,u)| = b$ и $|N(r,u)| = a$, то существует вершина r' такая, что $r' \in N(x,r)$ и $r' \notin N(x,u)$. Тогда вершина r' и вершины из множества $C_{x,t}$ принадлежат одной и той же компоненте связности в $N_2(u)$. Значит, эта связная компонента содержит вершину r такую, что справедливо $|N(u,r)| = a$. Таким образом, граф Γ, вершина u и вершина $r \in N_2(u)$ удовлетворяют условию 1, поэтому справедливо включение $C_{x,t} \cup \{x\} \cup \{r'\} \subseteq C_{u,r}$ и $|C_{u,r}| > |C_{x,t}|$. В силу п. (2) леммы 6 справедливо $|N(x,u)| = b$, т. е. множество $B_{u,r}$ не пусто. Таким образом, для вершины u и для вершины $r \in N_2(u)$ справедливы аналогичные аргументы, что и для вершины x и $t \in N_2(x)$.

Отметим, что мы описали процедуру, которая для данной вершины x и вершины $t \in N_2(x)$ таких, что $|N(x,t)| = a$ и $B_{x,t}$ не пусто, находит вершину u и вершину $r \in N_2(u)$ такие, что $|N(u,r)| = a$, $B_{u,r}$ не пусто и $|C_{u,r}| > |C_{x,t}|$. Применяя эту процедуру к конечному графу Γ, мы получим противоречие за конечное число шагов. □

Лемма 9. *Пусть $t' \in N_2(x)$ — еще одна вершина такая, что граф Γ, вершина x и вершина t' удовлетворяют условию 1. Тогда множества $C_{x,t'}$ и $D_{x,t'}$ не зависят от выбора вершины $t' \in N_2(x)$ такой, что $|N(x,t')| = a$, и справедливы равенства $C_{x,t'} = C_{x,t}$, $D_{x,t'} = D_{x,t}$.*

Доказательство. Из п. (2) леммы 6 следует, что для любой вершины $u \in D_{x,t}$ выполнено равенство $|N(x,u)| = b$. Поскольку $|N(x,t')| = a$, то $t' \in C_{x,t}$ и справедливы равенства $C_{x,t'} = C_{x,t}$, $D_{x,t'} = D_{x,t}$. □

В силу леммы 9, если граф Γ, вершина x и вершина $t \in N_2(x)$ удовлетворяют условию 1, мы будем использовать обозначения C_x и D_x вместо $C_{x,t}$ и $D_{x,t}$ соответственно. При этом ввиду леммы 8 C_x состоит из всех вершин $N_2(x)$, имеющих a общих соседей с вершиной x, а D_x состоит из всех вершин $N_2(x)$, имеющих b общих соседей с вершиной x. Кроме того, введем обозначение U_x для множества $\bigcup_{t \in C_x} N(x,t)$.

Лемма 10. *Каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из D_x.*

Доказательство следует из леммы п. (3) леммы 5. □

Лемма 11. *Каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из $N(x) \setminus U_x$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные вершины $y \in U_x$ и $z \in N(x) \setminus U_x$. По определению множеств C_x и U_x существует вершина $t \in C_x$ такая, что $t \sim y$. Отметим, что вершина t не имеет соседей в D_x и вершина z не имеет соседей в C_x. Таким образом, справедливо включение $N(z,t) \subset N(x)$. Но вершина t имеет в точности a соседей в $N(x)$. Значит, справедливо равенство $N(z,t) = N(x,t)$. В силу того что $y \in N(x,t)$, мы получаем $y \sim z$. $\square$

Лемма 12. *Справедливо неравенство* $|U_x| > a$.

Доказательство. Зафиксируем вершину $t' \in C_x$. Отметим, что $|U_x| = |\bigcup_{t \in C_x} N(x,t)| \geq |N(x,t')| = a$. Достаточно показать, что $|U_x| \neq a$. Предположим, что $|U_x| = a$. Тогда каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из C_x. Также в силу п. (3) леммы 5 каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из D_x. Таким образом, каждая вершина из $N(x,t)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$. Далее, оценим с двух сторон мощность $N_2(x)$ и получим противоречие. Возьмем произвольную вершину $y \in U_x$. Поскольку $|N(x,y)| \geq a$, вершина y имеет не более чем $k-a-1$ соседей в $N_2(x)$, откуда $|N_2(x)| \leq k-a-1$. Возьмем теперь произвольную вершину $t \in C_x$. Поскольку $|N(x,t)| = a$, вершина t имеет в точности $k-a$ соседей в $N_2(x)$. Таким образом, $N_2(x)$ содержит как минимум $k-a+1$ вершин (вершина t и ее $k-a$ соседей), и справедливо $|N_2(x)| \geq k-a+1$. Противоречие. $\square$

Лемма 13. *Не существует вершины* $y_b \in U_x$ *такой, что* $|N(x,y_b)| = b$. *Другими словами, для каждой вершины* $y \in U_x$ *справедливо* $|N(x,y)| = a$.

Доказательство. Предположим, что существует вершина $y_b \in U_x$ такая, что справедливо $|N(x,y_b)| = b$. Таким образом, существует вершина $t \in C_x$ такая, что $y_b \in N(x,t)$. В силу п. (1) леммы 6 имеем $N(x,y_b) = a$. Противоречие. $\square$

Пусть x — вершина такая, что граф Γ и вершина x удовлетворяют условию 1. Рассмотрим подграф Δ_x графа Γ, индуцированный множеством вершин $\{x\} \cup (N(x) \setminus U_x) \cup D_x$. Тогда Γ состоит из трех частей: Δ_x, U_x и C_x.

Лемма 14. *Каждая вершина из* Δ_x *смежна с каждой вершиной из* U_x *и не имеет соседей в* C_x.

Доказательство следует из лемм 10 и 11. $\square$

Лемма 15. *Для любых двух вершин* $u_1, u_2 \in \Delta_x$ *справедливо равенство* $|N(u_1,u_2)| = b$.

Доказательство. Отметим, что справедливо включение $U_x \subset N(x)$. В силу п. (3) леммы 5 имеем включение $U_x \subseteq N(u)$ для каждой вершины $u \in D_x$. В силу леммы 11 имеем включение $U_x \subseteq N(z)$ для каждой вершины $z \in N(x) \setminus U_x$. Таким образом, для произвольной пары вершин $u_1, u_2 \in \Delta_x$ таких, что $u_1 \neq u_2$, справедливо включение $U_x \subseteq N(u_1,u_2)$. В силу леммы 12 имеем $|N(u_1,u_2)| \geq |U_x| > a$. $\square$

Лемма 16. *Пусть* $z \in \Delta_x$ *и* $x' \in \Gamma \setminus \{z\}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:
(1) $|N(z,x')| = b$, *если* $x' \in \Delta_x$;
(2) $|N(z,x')| = a$, *если* $x' \notin \Delta_x$;
(3) *мощность множества* Δ_x *не зависит от выбора вершины* x *и равна* $n^* := \beta + 1$.

Доказательство. (1) Справедливо в силу леммы 15.

(2) Пусть $x' \notin \Delta_x$. Рассмотрим сначала случай $z = x$. Если $x' \in C_x$, то в силу леммы 8 имеем $|N(z,x')| = |N(x,x')| = a$. Если $x' \in U_x$, то в силу леммы 13 имеем $|N(z,x')| = |N(x,x')| = a$. Таким образом, множество всех вершин, которые имеют a общих соседей с вершиной $z = x$, — это в точности множество $U_x \cup C_x$. Следовательно, справедливы равенства $\alpha = |U_x \cup C_x|$ и $\beta = |\Delta_x| - 1$.

Теперь рассмотрим случай $z \neq x$. В силу (1) каждая вершина из $\Delta_x \setminus \{z\}$ имеет b общих соседей с вершиной z. Отметим, что $|\Delta_x \setminus \{z\}| = |\Delta_x| - 1 = \beta$. Таким образом, каждая вершина из $\Gamma \setminus \Delta_x = U_x \cup C_x$ имеет a общих соседей с вершиной z.

(3) Следует из (2). $\square$

Лемма 17. *Граф Δ_x является сильно регулярным графом с параметрами $(n_x, k_x, \lambda_x, \mu_x)$, где $n_x = |\Delta_x| = \beta + 1$, $k_x = k - |U_x|$ и $\lambda_x = \mu_x = b - |U_x|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольную вершину $x' \in \Delta_x$. Тогда вершина x' имеет $|U_x|$ соседей (в точности, множество U_x) за пределами Δ_x. Следовательно, вершина x' имеет $k - |U_x|$ соседей внутри Δ_x.

Зафиксируем произвольные вершины $x'_1, x'_2 \in \Delta_x,\ \ x_1 \neq x_2$. Тогда x'_1, x'_2 имеют $|U_x|$ соседей (в точности, множество U_x) за пределами Δ_x. В силу п. (1) леммы 16 вершины x'_1, x'_2 имеют b общих соседей в Γ. Таким образом, вершины x'_1, x'_2 имеют $b - |U_x|$ общих соседей в Δ_x. □

Лемма 18. *Граф Γ и любая его вершина x' удовлетворяет условию* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для любой вершины x' графа Γ в $N_2(x')$ существует вершина t' такая, что $|N(x', t')| = a$. Предположим, что существует вершина x' такая, что для любой вершины t' из $N_2(x')$ справедливо равенство $|N(x', t')| = b$. Поскольку по условию теоремы 1 каждая вторая окрестность несвязна, граф $N_2(x')$ несвязен. В силу несвязности графа $N_2(x')$ общие соседи вершин из разных компонент связности графа $N_2(x')$ лежат в $N(x')$. Возможны следующие два случая. Либо любые две вершины из разных компонент связности графа $N_2(x')$ имеют b общих соседей, либо существует пара вершин t_1, t_2 из разных компонент связности графа $N_2(x')$ такая, что $|N(t_1, t_2)| = a$.

Рассмотрим сначала первый случай. Зафиксируем вершину t_1. Тогда для любой вершины t_2 из другой компоненты связности графа $N_2(x')$ имеет место равенство $N(t_1, t_2) = N(t_1, x')$. Теперь, фиксируя вершину t_2 и делая выбор вершины t_1 произвольным, мы получим, что вершины из $N_2(x')$ имеют в качестве b соседей в $N(x')$ одни и те же b вершин.

В силу леммы 4 справедливо неравенство $b < k$, поэтому в $N(x')$ найдется по крайней мере одна вершина, не имеющая соседей в $N_2(x')$. Таким образом, эта вершина имеет $k - 1$ общих соседей с вершиной x', и для графа Γ справедливо равенство $b = k - 1$. Применим теперь это равенство к графу Δ_x. В силу леммы 17 граф Δ_x является сильно регулярным (напомним, что x — это вершина, для которой граф Γ удовлетворяет условию 1; существование такой вершины показано в лемме 7) с параметрами $k_x = k - |U_x|$ и $\lambda_x = \mu_x = b - |U_x|$. Отсюда в силу равенства $b = k - 1$ граф Δ_x является сильно регулярным с параметрами $(n_x, k_x, k_x - 1, k_x - 1)$. Сильно регулярный граф с таким набором параметров является либо полным графом, и в этом случае $k_x = n_x - 1$, либо объединением изолированных ребер, и в этом случае $k_x = 1$. Во первом случае имеем противоречие с тем, что Δ_x содержит пару несмежных вершин (поскольку D_x не пусто, в качестве пары можно взять вершину x и вершину из D_x). Пусть $k_x = 1$, т. е. Δ_x является объединением изолированных ребер. Заметим сначала, что в этом случае справедливо равенство $|U_x| = k - 1 = b$. С другой стороны, для вершины x' существует в точности $k - 1$ вершин, имеющих с ней a общих соседей. Таким образом, для графа Γ справедливо равенство $\alpha = k - 1$. По построению граф Δ_x состоит из вершины x и всех вершин, имеющих b общих соседей с вершиной x в графе Γ. Это означает, что множество $U_x \cup C_x$ состоит из всех вершин в графе Γ, имеющих a общих соседей с вершиной x. Далее имеем $|U_x| + |C_x| = \alpha = k - 1 = b = |U_x|$, откуда C_x — это пустое множество. Противоречие с тем, что C_x содержит по крайней мере вершину t.

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть существует пара вершин t_1, t_2 из разных компонент связности графа $N_2(x')$ такая, что $|N(t_1, t_2)| = a$. Тогда граф Γ, вершина t_1 и вершина t_2 удовлетворяют условию 1. Заметим, что в C_{t_1,t_2} есть вершина x' такая, что $|N(t_1, x')| = b$. Таким образом, множество B_{t_1,t_2} не пусто, и мы получили противоречие с леммой 8. □

Лемма 19. *Пусть R — бинарное отношение на множестве вершин Γ, определенное по правилу “либо совпадать, либо иметь b общих соседей”. Тогда R является отношением эквивалентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рефлексивность и симметричность очевидны.

Покажем транзитивность. В силу леммы 7 в графе Γ существует вершина такая, что граф Γ и эта вершина удовлетворяют условию 1. В силу леммы 18 граф Γ и каждая его вершина удовлетворяют условию 1. Зафиксируем вершины $x_1', x_2', x_3' \in V(\Gamma)$ такие, что x_1' имеет b общих соседей с x_2', а x_2' имеет b общих соседей с x_3'. В силу леммы 16 вершины x_1', x_3' принадлежат множеству $\Delta_{x_2'}$ и имеют b общих соседей. Транзитивность доказана. Таким образом, R — отношение эквивалентности. Лемма доказана.

Теперь мы готовы завершить д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

В силу леммы 19 множество вершин графа Γ может быть разбито на равномощные классы эквивалентности, причем классом эквивалентности для произвольной вершины x будет множество вершин, имеющих b общих соседей с вершиной x, т. е. множество вершин Δ_x. В силу леммы 17 каждый класс эквивалентности индуцирует сильно регулярный граф. В силу леммы 16 пара различных вершин имеет b общих соседей в Γ, если эти вершины лежат в одном классе, и a общих соседей, если эти вершины лежат в различных классах. В силу леммы 14 любые две вершины из произвольного класса эквивалентности Δ в качестве множества общих соседей за пределами Δ имеют соответствующее множество U. Рассмотрим произвольную вершину y из множества U. Поскольку каждая вершина из Δ смежна с каждой вершиной из U, то все вершины из Δ содержатся в $N(y)$. Рассмотрим класс эквивалентности Δ_y. Вершины из Δ лежат за пределами Δ_y и содержатся в $N(y)$, поэтому каждая вершина из Δ_y смежна с каждой вершиной из Δ. Аналогично рассматривая вершину $z \in C$, можно показать, что ребра между классами эквивалентности Δ и Δ_z отсутствуют. Таким образом, произвольные классы эквивалентности Δ_1 и Δ_2 либо соединены всеми возможными ребрами, либо не соединены ни одним ребром.

Рассмотрим граф Γ', множеством вершин которого является множество упомянутых классов эквивалентности, причем два класса смежны в Γ' тогда и только тогда, когда в графе Γ есть ребро между этими классами.

Покажем, что Γ' является сильно регулярным с параметрами (n', k', λ', μ') для некоторых целых положительных n', k', λ', μ'.

Отметим, что Γ' имеет $n' := n/n^*$ вершин.

Рассмотрим произвольную пару различных несмежных вершин Δ_1, Δ_2 в графе Γ и рассмотрим произвольные вершины $y_1 \in \Delta_1$ и $y_2 \in \Delta_2$. В точном графе Деза Γ несмежные вершины y_1 и y_2 имеют как минимум a соседей, при этом выполняется $a > 0$. Из несмежности вершин Δ_1 и Δ_2 в графе Γ' вытекает, что общие соседи вершин y_1 и y_2 в графе Γ лежат вне множеств Δ_1 и Δ_2. Рассмотрим произвольную вершину $z \in N(y_1, y_2)$, тогда вершина Δ_z является общим соседом вершин Δ_1 и Δ_2 в графе Γ', и, следовательно, Γ' связен. Теперь для доказательства регулярности Γ' достаточно установить, что произвольные смежные в Γ' вершины имеют одинаковую валентность. Рассмотрим пару смежных вершин $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \in V(\Gamma')$. Посчитаем число соседей Γ вершин $x_1, x_2 \in V(\Gamma)$. Имеем $|N_\Gamma(x_1)| = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})||\Delta_{x_1}| + k_{x_1}$ и $|N_\Gamma(x_2)| = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})||\Delta_{x_2}| + k_{x_2}$. Поскольку $|N_\Gamma(x_1)| = k = |N_\Gamma(x_2)|$, получаем $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})||\Delta_{x_1}| + k_{x_1} = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})||\Delta_{x_2}| + k_{x_2}$. В силу п. (3) леммы 16 справедливо $|\Delta_{x_1}| = |\Delta_{x_2}| = n^*$. Таким образом, получаем $k_{x_1} - k_{x_2} = (|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})| - |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})|)\ n^*$. Поскольку $0 < k_{x_1} < |\Delta_{x_1}|$ и $0 < k_{x_2} < |\Delta_{x_2}|$, мы заключаем $k_{x_1} = k_{x_2}$ и $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})| = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})|$. Таким образом, граф Γ' регулярен. В частности, мы доказали, что значение k_{x_1} не зависит от выбора вершины x_1. Обозначим это число через k^*.

Покажем, что Γ' является реберно регулярным. Рассмотрим пару смежных вершин Δ_{x_1}, $\Delta_{x_2} \in V(\Gamma')$. В силу леммы 16 справедливо равенство $|N_\Gamma(x_1, x_2)| = a$. С другой стороны, число общих соседей вершин $x_1, x_2 \in \Gamma$ равно $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^* + k_{x_1} + k_{x_2}$. Таким образом, имеем $a = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^* + k_{x_1} + k_{x_2} = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^* + 2k^*$ и, следовательно, $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})| = (a - 2k^*)/n^* = \lambda'$. В частности, $a = \lambda' n^* + 2k^*$.

Покажем, что Γ' является кореберно регулярным. Рассмотрим пару несмежных вершин $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \in V(\Gamma')$. В силу леммы 16 справедливо равенство $|N_\Gamma(x_1, x_2)| = a$. С другой стороны, число общих соседей вершин $x_1, x_2 \in \Gamma$ равно $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^*$. Таким образом, имеем $a =$

$|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^*$ и, следовательно, $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})| = \frac{a}{n^*} = \mu'$. В частности, $a = \mu' n^*$.

Приравнивая два выражения для параметра a, получим $\lambda' n^* + 2k^* = \mu' n^*$ и, следовательно, $(\mu' - \lambda')n^* = 2k^*$. Поскольку $0 < k^* < n^*$, имеем $n^* = 2k^*$ и, следовательно, $n^* - 1$ и k^* взаимно просты. Рассмотрим соотношение на параметры сильно регулярного графа Δ. Имеем $\lambda^*(n^* - 1) = k^*(k^* - 1)$. В силу взаимной простоты чисел $n^* - 1$ и k^* заключаем, что $n^* - 1$ делит $k^* - 1$. В силу того что $k^* < n^*$, получили противоречие. □

3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим точный граф Деза Γ с параметрами (n, k, b, a), который является реберно регулярным с параметрами (n, k, λ) и содержит вершину x с несвязной второй окрестностью.

Если Γ обладает свойством $b = k$, то лемма 3 покрывает этот случай и дает описание таких графов. А именно граф Γ является расширением $\Gamma_1[\Gamma_2]$, где Γ_1 сильно регулярен с условием $\lambda = \mu$ и Γ_2 — коклика размера $s \geq 2$. Легко видеть, что вторая окрестность каждой вершины в этом случае несвязна.

Предположим, что справедливо неравенство $b < k$. В этом предположении докажем ряд вспомогательных лемм и получим противоречие.

Лемма 20. *Граф Γ и вершина x удовлетворяют условию 1, т. е. существует вершина $t \in N_2(x)$ такая, что $|N(x,t)| = a$.*

Доказательство. Предположим, что равенство $|N(x,t)| = b$ справедливо для любой вершины $t \in N_2(x)$. Следовательно, каждая вершина y, такая что равенство $|N(x,y)| = a$ справедливо, принадлежит $N(x)$ (поскольку граф Γ не является сильно регулярным, существует по крайней мере одна вершина $y \in V(\Gamma)$, такая что $|N(x,y)| = a$). В силу реберной регулярности графа Γ каждая вершина из $N(x)$ имеет $\lambda = a$ общих соседей с вершиной x и $N(x)$ состоит из всех вершин графа Γ, которые имеют a общих соседей с вершиной x. Таким образом, параметр α (см. лемму 2) равен $|N(x)| = k$. Также в силу реберной регулярности графа Γ для произвольной вершины $x' \in V(\Gamma)$ окрестность $N(x')$ состоит из всех вершин графа Γ, имеющих a общих соседей с вершиной x'. Таким образом, для любой вершины $x' \in V(\Gamma)$ вторая окрестность $N_2(x')$ состоит из всех вершин графа Γ, имеющих b общих соседей с вершиной x', и граф Γ является сильно регулярным. Противоречие. □

Лемма 21. *Справедливо равенство $\lambda = a$.*

Доказательство. В силу леммы 20 граф Γ и вершина x удовлетворяют условию 1, поскольку существует вершина $t \in N_2(x)$ такая, что справедливо равенство $|N(x,t)| = a$. Следовательно, в силу п. (1) леммы 6 равенство $|N(x,y)| = a$ справедливо для всех $y \in N(x,t)$. В силу реберной регулярности графа Γ мы имеем $\lambda = a$. □

Зафиксируем произвольную вершину $t \in N_2(x)$ такую, что выполняется $|N(x,t)| = a$.

Лемма 22. *Все вершины из $C_{x,t}$, имеющие a общих соседей с вершиной x, имеют одних и тех же общих соседей с вершиной x.*

Доказательство. Предположим, что существует вершина $t' \in C_{x,t}$ такая, что выполнены условия $|N(x,t')| = a$ и $N(x,t') \neq N(x,t)$. В силу п. (1) леммы 5 для каждой вершины $u \in D_{x,t}$ справедливо включение $N(x,t) \subseteq N(x,u)$. Поскольку вершины t и t' принадлежат одной и той же компоненте связности графа $N_2(x)$, имеем равенство $C_{x,t} = C_{x,t'}$ и, следовательно, $D_{x,t} = D_{x,t'}$. Таким образом, снова по п. (1) леммы 5 справедливо включение $N(x,t') \subseteq N(x,u)$ для каждой вершины $u \in D_{x,t'} = D_{x,t}$. Теперь мы можем заключить, что для всех $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ выполнено соотношение $|N(u_1,u_2)| \geq |N(x,t) \cup N(x,t')| > a$. Это означает, что для любых различных вершин $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ выполнено равенство $|N(u_1,u_2)| = b$. В силу реберной регулярности графа Γ и условия $\lambda = a$ мы можем заключить, что для любых различных вершин $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ справедливо $u_1 \not\sim u_2$ и, следовательно, $D_{x,t}$ — это коклика. Таким образом, $b = k$, противоречие. □

Лемма 23. *Компонента $C_{x,t}$ содержит вершину t_b такую, что $|N(x, t_b)| = b$.*

Доказательство. Предположим, что для любой вершины $t' \in C_{x,t}$ выполнено равенство $|N(x, t')| = a$. В силу леммы 22 каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $C_{x,t}$. В силу п. (3) леммы 5 каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $D_{x,t}$. Таким образом, каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$. В силу леммы 21 справедливо равенство $\lambda = a$. Отсюда каждая вершина из $N(x)$ имеет $\lambda = a$ соседей в $N(x)$ и $k - a - 1$ соседей в $N_2(x)$. Поскольку каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$ и справедливо включение $N(x, t) \subseteq N(x)$, мы заключаем, что каждая вершина из $N(x)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$ и, следовательно, $b = k$. Противоречие. Лемма доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 2.

Пусть $B_{x,t} := \{r \in C_{x,t} \mid |N(x, r)| = b\}$ — множество всех вершин из $C_{x,t}$, имеющих b общих соседей с вершиной x. Для доказательства теоремы 2 достаточно рассмотреть следующие два случая и получить противоречие в каждом из них.

1) Для любых вершин $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$ выполнено равенство $|N(r, u)| = b$.

Зафиксируем вершину $r \in B_{x,t}$ и вершину $u \in D_{x,t}$. В силу того, что выбор вершин r и u произволен, для любых $r_1, r_2 \in B_{x,t}$ и для любых $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ справедливо равенство $N(r_1, u_1) = N(r_2, u_2)$. Таким образом, в $N(x)$ существует подмножество из b вершин, являющееся множеством общих соседей произвольной пары вершин r, u, где $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$. Обозначим это множество через W.

В силу п. (1) леммы 5 для каждой вершины $t' \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$ и для каждой вершины $u' \in D_{x,t}$ справедливо включение $N(x, t') \subseteq N(x, u')$. В силу леммы 22 в W найдется вершина, которая смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$. В силу реберной регулярности графа Γ мы можем заключить, что каждая вершина из $N(x)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$ и, следовательно, $k = b$. Противоречие.

2) Существуют вершина $r \in B_{x,t}$ и вершина $u \in D_{x,t}$ такие, что справедливо равенство $|N(r, u)| = a$. Отметим, что выполняется включение $N(x, r) \cap N(x, u) \subseteq N(x)$. Таким образом, справедлива оценка $k = |N(x)| \ge |N(x, r) \cup N(x, u)| = |N(x, r)| + |N(x, u)| - |N(x, r) \cap N(x, u)| = b + b - |N(r, u)| = 2b - a$. Следовательно, $a \ge 2b - k$.

Оценим параметр a с другой стороны. Сначала мы покажем, что граф $D_{x,t}$ не содержит треугольников. Рассмотрим произвольную пару смежных вершин $u_1, u_2 \in D_{x,t}$. Отметим, что справедливы включения $N(x, t) \subseteq N(u_1, t)$ и $N(x, t) \subseteq N(u_2, t)$. Таким образом, $|N(u_1, u_2)| \ge |N(x, t)| = a$. Но в силу реберной регулярности графа Γ мы имеем $|N(u_1, u_2)| = \lambda = a$. Следовательно, вершины u_1, u_2 не имеют общих соседей в $D_{x,t}$, и поэтому $D_{x,t}$ — граф без треугольников. Также отметим, что $D_{x,t}$ — регулярный граф валентности $k - b$. Таким образом, $|E(D_{x,t})| = \dfrac{(k - b)|D_{x,t}|}{2}$. В силу леммы 1 справедливо неравенство $|E(D_{x,t})| \le \dfrac{|D_{x,t}|^2}{4}$. Зафиксируем вершину из $z \in N(x, t)$. В силу п. (1) леммы 6 вершина z имеет a соседей в $N(x)$, смежна с вершиной x и имеет по крайней мере одного соседа в $C_{x,t}$. В силу п. 3 леммы 5 вершина z смежна с каждой вершиной $D_{x,t}$. Поскольку z имеет k соседей в Γ, то справедливо неравенство $|D_{x,t}| \le k - a - 2$. Таким образом, имеем $2(k - b) \le |D_{x,t}| \le k - a - 2 \le k - (2b - k) - 2 = 2(k - b) - 2$. Противоречие. □

4. Доказательство теоремы 3

Зафиксируем параметры (n, k, b, a) графа Γ и μ в качестве параметра кореберной регулярности. Если выполняется $b = k$, то в силу леммы 4 граф Γ является реберно регулярным и, следовательно, сильно регулярным, что противоречит условию теоремы. Далее будем считать, что $b < k$.

Зафиксируем вершину $y_1 \in N_2(x)$. Обозначим через C_{y_1} компоненту связности в $N_2(x)$, содержащую вершину y_1. Выберем произвольную вершину $y_2 \in N_2(x) \setminus C_{y_1}$. Тогда общие соседи вершин y_1, y_2 принадлежат $N(x)$. Заметим, что вершины y_1, y_2 имеют как минимум a общих соседей. Поскольку $|N(x, y_1)| = \mu$ и $|N(x, y_2)| = \mu$, справедливо $N(x, y_1) = N(x, y_2) = N(y_1, y_2)$. Далее, фиксируя вершину y_2 и делая выбор вершины y_1 произвольным, мы получим, что для любых $y_1, y_2 \in N_2(x)$ справедливо равенство $N(x, y_1) = N(x, y_2)$. Другими словами, вершины из $N_2(x)$ имеют одних и тех же μ соседей в $N(x)$. Обозначим через M_x это множество общих соседей.

Достаточно рассмотреть два случая: $\mu = a$ и $\mu = b$.

1) Пусть справедливо $\mu = a$. В силу кореберной регулярности графа Γ мы имеем $|N(x, y)| = \mu = a < b$ для каждой вершины $y \in N_2(x)$. Поскольку $|M_x| = \mu = a < b \leq k$, множество M строго содержится в $N(x)$. Отметим, что вершины из $N(x) \setminus M_x$ не имеют соседей в $N_2(x)$. Таким образом, в силу регулярности графа Γ, если $x' \in N(x) \setminus M_x$, то справедливо $N(x') = \{x\} \cup (N(x) \setminus \{x'\})$ и, следовательно, $b = k - 1$.

Пусть A — произвольная связная компонента графа $N_2(x)$. Покажем, что A — клика размера $k - \mu + 1$. Каждая вершина из A имеет μ соседей в $N(x)$ и $k - \mu$ соседей в A. Таким образом, в A содержится не менее $k - \mu + 1$ вершин. Предположим, что A содержит пару несмежных вершин. Тогда A содержит пару вершин x_1, x_2 таких, что расстояние между ними в графе A равно 2. Таким образом, справедливо $|N(x_1, x_2)| \geq |M_x| + 1 \geq \mu + 1 > \mu = a$. Противоречие с тем, что Γ является кореберно регулярным.

Отметим, что граф $\{x\} \cup (N(x) \setminus M_x)$ также является кликой размера $k - \mu + 1$. Следовательно, мы можем мыслить граф Γ как соединение графа M с графом, представляющим собой объединение $t \geq 3$ изолированных клик размера $k - \mu + 1$.

Пусть A — клика размера $k - \mu + 1$. Зафиксируем вершину $y \in M_x$ и вершину $z \in A$. Посчитаем число общих соседей вершин y и z. Для этого достаточно посчитать общих соседей внутри A и снаружи A. Число общих соседей внутри A равно $k - \mu$, а число общих соседей снаружи A равно $k - (n - \mu)$. Действительно, вершина y имеет в качестве соседей все $n - \mu$ вершин вне M_x и следовательно, $k - (n - \mu)$ соседей внутри M_x. Вершина z смежна с каждой вершиной M_x. Таким образом, $|N(y, z)| = k - \mu + k - (n - \mu) = 2k - n$. Поскольку клик как минимум три, существуют по крайней мере две клики, отличных от A. Поскольку эти клики не пусты, существуют как минимум две вершины (по одной в каждой клике), которые смежны с y и не смежны с z. Следовательно, справедливо неравенство $|N(y, z)| \leq k - 2 < k - 1 = b$, и мы заключаем, что $|N(y, z)| = a = \mu$. Таким образом, имеем $2k - n = \mu$ и, следовательно, $k - \mu = n - k$. Отсюда число вершин в каждой клике равно $n - k + 1$. Но множество вершин по крайней мере в одной клике есть подмножество в $N_2(x)$, и справедливо равенство $|N_2(x)| = n - k - 1$. Мы получили противоречие в случае $\mu = a$.

2) Пусть $\mu = b$. Достаточно рассмотреть случаи $\mu = k$ и $\mu < k$.

Если $b = \mu = k$, то Γ является кореберно регулярным со свойством $k = \mu$. Хорошо известно (например, [3, с. 3]), что в этом случае Γ является полным многодольным графом с долями одинакового размера и, в частности, сильно регулярным.

Если $b = \mu < k$, то множество $N(x) \setminus M_x$ не пусто, и для каждой вершины $x' \in N(x) \setminus M_x$ справедливо $N(x') = \{x\} \cup (N(x) \setminus \{x'\})$. Таким образом, выполняется $|N(x, x')| = k - 1 = b = \mu$. Это означает, что множество $N(x) \setminus M_x$ состоит только из вершины x'. Кроме того, это означает, что вторая окрестность каждой вершины несвязна, поскольку является объединением изолированных ребер. Поэтому для произвольной вершины графа Γ будут справедливы те же самые рассуждения, что и для вершины x. Граф, индуцированный множеством вершин $\{x, x'\} \cup N_2(x)$, является объединением $(n - k + 1)/2$ изолированных ребер, и число ребер не меньше 3. Обозначим этот граф через L_x, а число ребер в нем — через s. Отметим, что для любой вершины $z \in L_x$ справедливо равенство $L_z = L_x$и и z смежна со всеми вершинами из M_x. Таким образом, множество вершин графа Γ может быть разбито как минимум на 2 подмножества, каждое из которых индуцирует граф, являющийся объединением s изолированных ребер, и любые две вершины из разных подмножеств смежны. Мы получили, что Γ является 2-кликовым расширением полного многодольного графа с долями одинакового размера $s \geq 3$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **А. В. Митянина.** О $K_{1,3}$-свободных точных графах Деза // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 22, № 1. С. 231–234.
2. **Biggs N.** Algebraic graph theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 216 p.
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
4. **Brouwer A.E., van Lint J. H.** Strongly regular graphs and partial geometries, enumeration and design // Proc. of the Silver Jubilee Conference at the University of Waterloo / eds. D. M. Jackson and S. A. Vanstone. Toronto: Academic Press, 1984. P. 85–122.
5. **Cioaba S. M., Koolen J. H.** On the connectedness of the complement of a ball in distance-regular graphs // J. Algebraic Combinator. 2013. Vol. 38, iss. 1. P. 191–195.
6. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson, S. Fernando, W. H. Haemers, D. Hardy, J Hemmeter // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
7. **Diestel R.** Graph theory. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 410 p.
8. Second neighbourhoods of strongly regular graphs / A. D. Gardiner, C. D. Godsil., A. D. Hensel, G. F. Royle // Discrete Math. 1992. Vol. 103. P. 161–170.

Поступила 10.12.2015

Горяинов Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
преподаватель
Челябинский государственный университет
e-mail: 44g@mail.ru

Исакова Галина Сергеевна
студент
Челябинский государственный университет
e-mail: carleink@gmail.com

Кабанов Владислав Владимирович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Шалагинов Леонид Викторович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Челябинский государственный университет
e-mail: leonidshalaginov@rambler.ru